



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA
E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

ELIZABETH GOMES SOUZA

A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM
MATEMÁTICA

Salvador
2012

ELIZABETH GOMES SOUZA

A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências, sob orientação do Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa.

**Salvador-BA
2012**

FICHA CATALOGRÁFICA

Sistema de Bibliotecas - IF/UFBA

S729 Souza, Elizabeth Gomes

A aprendizagem matemática na modelagem matemática /

Elizabeth Gomes

Souza . – 2012.

143 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa.

Tese (doutorado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física. Universidade

Estadual de Feira de Santana, 2012.

1 Matemática – Estudo e ensino.2. Modelagem matemática.3. Práticas de ensino. 4. Matemática – Aprendizagem.5. Wittgenstein, Ludwig, 1889- 1951.I. Barbosa, Jonei Cerqueira.II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Física.III. Universidade Estadual de Feira de Santana.IV.Título.

CDD- 510.7

CDU- 51(07)

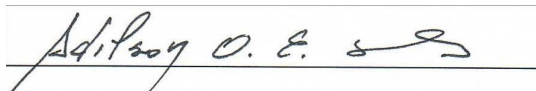
ELIZABETH GOMES SOUZA

A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

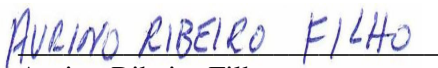
Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, avaliada pela seguinte banca examinadora:



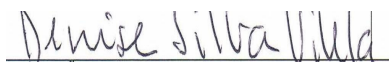
Jonei Cerqueira Barbosa (Orientador)
Universidade Federal da Bahia (UFBA)



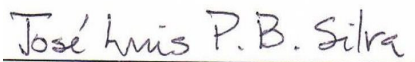
Adilson Oliveira do Espírito Santo
Universidade Federal do Pará (UFPA)



Aurino Ribeiro Filho
Universidade Federal da Bahia (UFBA)



Denise Silva Vilela
Universidade Federal de São Carlos
(UFSCar)



José Luís de Paula Barros Silva
Universidade Federal da Bahia
(UFBA)

RESULTADO: APROVADA

Salvador, 25 de Maio de 2012

Uma fonte principal de nossa incompreensão é que não temos uma visão panorâmica de nossas palavras- Falta caráter panorâmico à nossa gramática-A representação panorâmica permite a compreensão, que consiste justamente em “ver as conexões”. Daí a importância de encontrar e inventar *articulações intermediárias*.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999, p. 67.

Ao meu pai, Ruy Silva Souza (*In memorian*), pelo amor, orientação e zelo.

Agradecimentos

Agradeço a todos e a todas que contribuíram para a realização desse trabalho. Em especial, quero agradecer, nominalmente, algumas pessoas que são responsáveis diretamente pela sua finalização.

A Deus, pela vida, em especial pela saúde física e espiritual que me permitiram ser possível a dedicação ao trabalho.

Aos meus antepassados familiares que se dedicaram para que hoje eu pudesse desenvolver um trabalho dessa natureza.

Ao meu orientador, Jonei Cerqueira Barbosa, pela amizade, compreensão, seriedade e dedicação na orientação dessa pesquisa. Jonei foi uma enorme honra ser sua orientada. Talvez você não tenha ideia do quanto eu aprendi com você. Muito grata por tudo.

Ao professor Adilson Oliveira do Espírito Santo, grande incentivador e colaborador na minha trajetória acadêmica. Professor: sou imensamente grata pela sua existência em minha vida.

Aos professores Adilson Oliveira do Espírito Santo, Aurino Ribeiro Filho, José Luís de Paula Barros Silva e Antônio Miguel, pelos comentários, ideias e sugestões feitas na ocasião do exame de qualificação. Obrigada professores pelo tempo e dedicação destinados à leitura da tese.

À professora Denise Silva Vilela, por ter aceitado participar da comissão avaliadora da versão final da tese. Obrigada pela disponibilidade de ler e contribuir com o trabalho.

Aos professores do Programa, em especial, aos professores Olival Freire Jr, André Luís Mattedi Dias, Ileana Maria Rosa Greca, Charbel Niño El-Hani, agradeço o aprendizado que tive em História, Ensino e Filosofia das Ciências.

Ao Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA), Ana Virginia de Almeida Luna, Flávia Cristina Macedo, Jamille Villas Boas, Maiana Santana da Silva, Maria Raquel Queiroz, Thaine Souza Santana, pela amizade tão especial que nutrimos umas pelas outras no grupo. Obrigada pelo carinho, pelo incentivo e pela interlocução acadêmica com vocês. Eternas saudades!

Às amigas, Silvana Silva, Janice Lando, Pedro Barboza, Mayane Nóbrega e Indiana Silva, pela amizade e troca de conhecimentos nas disciplinas.

Aos amigos e amigas do Grupo Colaborativo em Modelagem Matemática: Andréia Maria Pereira de Oliveira, Airam da Silva Prado, Carlos Henrique Carneiro, Celina Nunes Bacellar, Elaísse Araújo Silva, Jonson Ney Dias da Silva, Joubert Lima Ferreira, Lilian Aragão da Silva, Mércia Cleide Barbosa Mota, Sofia Marinho da Natividade e Wedeson Oliveira Costa, pelo imenso aprendizado que tive no período que fiz parte do grupo. Muito Obrigada pelo crescimento!

Aos funcionários da Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Marli, Geraldo e Elenice, obrigada pela atenção e pelo atendimento de minhas solicitações.

Aos professores *Nanda* e *Marcus* e aos alunos que aceitaram participar dessa pesquisa.

À minha querida amiga Ana Virgínia de Almeida Luna. Amiga obrigada pelo carinho, apoio e amizade incondicionais.

Ao meu amigo Jonson Ney Dias da Silva, pela lúdica amizade, pelo companheirismo, pela presença sempre constante na minha vida feirense. Amigo, obrigada pelo apoio de irmão que tive de você. Muitíssimo grata.

À amiga, irmã e mãe de coração, D. Lucinete, minha infinita gratidão. Pelo enorme aprendizado pessoal e profissional que tive com a senhora. Seu carinho fez a distância de minha família ser um inesquecível aprendizado.

À minha mãe e professora, Claudomira Gomes Souza, pelo ilimitado apoio, incentivo e amor. Mãe, obrigada.

Ao meu pai, Ruy Silva Souza que desde 2011 me ampara, protege e guia do mundo espiritual.

Aos meus avós, obrigada pelo incentivo e pela compreensão de minha ausência ao lado de vocês.

Aos meus irmãos e à minha irmã, pelo constante incentivo. Em especial, ao Thomas Edson Gomes Souza pelo exemplo de superação que ele é para todos da família.

Aos meus sobrinhos, Thone, Pedro, Sara, Amanda e Soraya. A alegria de vocês é a minha força.

À Coordenação de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Capes, pelo apoio financeiro dado a essa pesquisa.

À Ana Paula, pela revisão atenciosa da escrita da tese.

À Gil, Eliete, Elizabete, Jiudete, Graça e Luciana pela amizade feirense.

A todos os baianos e baianas que me receberam e me acolheram com amor e hospitalidade inesquecíveis e únicos. Meu axé!

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática. Modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática, pode ser entendida como a abordagem matemática de situações-problema reais em âmbito escolar. A temática de pesquisa possui como fundamentação teórica e filosófica, as ideias da pesquisadora Anna Sfard e do filósofo Ludwig Wittgenstein, respectivamente. Em particular, foram adotados o entendimento de linguagem e de matemática propostos pelo filósofo para a análise das definições teóricas de Anna Sfard sobre matemática e aprendizagem matemática. Com base nas ideias de ambos os autores, foram elaboradas compreensões sobre modelagem matemática e aprendizagem matemática na modelagem. A identificação da aprendizagem matemática que se constitui na modelagem foi realizada, a partir de três estudos, um de cunho exclusivamente teórico e filosófico e outros dois, de natureza empírica. Esses estudos estão subdivididos no corpo da tese, em três artigos distintos. No primeiro artigo, objetiva-se apresentar contribuições teóricas e filosóficas sobre aprendizagem matemática na modelagem. Nos artigos de natureza empírica, foram analisados discursos produzidos por alunos e professores durante o desenvolvimento de tarefas de modelagem. Esses discursos foram coletados utilizando o procedimento de *observação*. No primeiro artigo empírico, os discursos são analisados com base no conceito teórico de *regras* de Anna Sfard. Já no segundo, utiliza-se a ideia de *uso* de Ludwig Wittgenstein. Os estudos realizados apontam que a aprendizagem matemática, que se constitui na modelagem, pode ser vista como a aprendizagem da maneira de *usar* as palavras à luz da matemática escolar e da identificação de semelhanças entre esses *usos* e os *usos* das palavras sugeridos pelas situações-problema. Além disso, identifica-se que a produção discursiva dos professores é adotada pelos alunos como *modelo* de que *regras* relativas à matemática escolar eles devem mobilizar para abordarem as situações-problema de maneira legítima. Por fim, são discutidas algumas implicações da delimitação de aprendizagem matemática na modelagem para a implementação da modelagem em âmbito escolar.

Palavras- Chave: Modelagem Matemática. Aprendizagem Matemática. Matemática. Regras. Uso.

Abstract

This research aims to identify that mathematics learning is constituted in the mathematical modelling. Mathematical modelling in the perspective of Mathematics Education can be understood as the real problem-solving approach, though mathematical contents. The theme of this research has as its theoretical and philosophical framework the ideas of the researcher Anna Sfard and the philosopher Ludwig Wittgenstein, respectively. I have adopted the understanding of language and mathematics proposed by Wittgenstein to analyze the theoretical definitions by Anna Sfard about mathematics and mathematics learning. Based on the ideas of both authors, I have elaborated understandings about mathematical modelling and mathematics learning in the modelling. The identification of mathematics learning that has been constituted in the modelling has been carried out according to three studies. One which is exclusively theoretical and philosophical nature and the others which are based on the empirical data. Those studies have been subdivided into three different articles in the thesis. In the first article, I have aimed to point out the theoretical and philosophical contributions about mathematics learning in the modelling. In the articles of empirical nature, I have analyzed the discourses produced by the students and teachers during the development of modelling tasks. Those discourses have been collected by using the procedure of *observation*. In first empirical article, it has analyzed according to the *rules* of Anna Sfard. In the second, I have used the idea of *use* developed by Ludwig Wittgenstein. The studies which have been carried out point that mathematics learning that is constituted by the modelling can be seen as the learning of the way of using the words according to the school mathematics and it is also seen the identification of similarities among these uses and those uses of words suggested by solving-problem situations. I have also identified that the discursive production of the teachers is adopted by students as a *model* of the *rules* related to school mathematics that they should mobilize to approach solving-problem legitimately. Finally, I have discussed some implications about mathematics learning in the modelling for use the modelling in the school context.

Keywords: Mathematical Modelling. Mathematics Learning. Mathematics. Rules. Use.

Sumário

CAPÍTULO 1 – A PESQUISA	11
1.1. Introdução	11
1.2. Os percursos da trajetória acadêmica	11
1.3. O objetivo da pesquisa.....	17
1.4. A relevância da pesquisa	18
1.5. A organização da tese em formato de artigos	20
1.6. Os enfoques dos artigos e dos capítulos da tese.....	22
Referências	24
 CAPÍTULO 2 – OS ARTIGOS DA TESE	
2.1 A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM	
MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS E FILOSÓFICAS	27
2.1.1. Introdução	27
2.1.2. O papel da linguagem em Wittgenstein	29
2.1.3. A matemática como sistema normativo	33
2.1.4. A matemática como discurso	36
2.1.5. A aprendizagem matemática em âmbito escolar	39
2.1.6. Modelagem: Uma maneira de <i>organizar</i> situações empíricas.....	44
2.1.7. Implicações para a aprendizagem matemática na modelagem	48
Agradecimentos	50
Referências	50
 2.2 A APRENDIZAGEM DE REGRAS DO SISTEMA MATEMÁTICO	
ESCOLAR NA MODELAGEM MATEMÁTICA	55
2.2.1. Introdução	56
2.2.2. O papel da linguagem em Wittgenstein	57
2.2.3. Matemática: Um conjunto de enunciados normativos regrados	60
2.2.4. A aprendizagem matemática em âmbito escolar	64
2.2.5. Modelagem: Uma maneira de organizar situações empíricas	67
2.2.6. Os sujeitos e o <i>lócus</i> de registro de seus discursos	72
2.2.7. A tarefa de modelagem: O lixo eletrônico	73
2.2.8. O método e os procedimentos de registro dos discursos dos participantes ...	74
2.2.9. Procedimentos de análise dos discursos.....	75
2.2.10. A análise descritiva preliminar	76
2.2.11. A Análise dos discursos	82
2.2.12. Ideias conclusivas	86
Agradecimentos	88
Referências	88

2.3 AS IMPLICAÇÕES DA IDEIA DE <i>USO</i> DE WITTGENSTEIN PARA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA ...	93
2.3.1. Introdução	94
2.3.2. A ideia de <i>uso</i> em Wittgenstein	95
2.3.3. Um uso da linguagem : O uso matemático	98
2.3.4. A aprendizagem do <i>uso</i> das palavras	100
2.3.5. Modelagem: Uma maneira de lidar com nossas experiências	103
2.3.6. Método de pesquisa, procedimentos de obtenção e registro dos discursos	107
2.3.7. O contexto espacial de registro dos discursos	108
2.3.8. Procedimentos de análise dos discursos	109
2.3.9. A tarefa de modelagem e a análise descritiva preliminar de sua realização ...	111
2.3.10. A análise de dados	117
2.3.11 Implicações para a implementação da modelagem no contexto escolar	122
Referências	124
Agradecimentos	124
 CAPÍTULO 3 – APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES GERAIS	 128
3.1. Modelagem: <i>Uma</i> maneira de organizar situações empíricas	128
3.2. A aprendizagem matemática na modelagem	132
Referências	137
 CAPÍTULO 4 – IMPLICAÇÕES DA PESQUISA	 138
4.1. Implicações para a prática pedagógica do professor	138
4.2. Implicações para as pesquisas em modelagem	140
4.3. Implicações para algumas definições teóricas de Anna Sfard	141
4.4. Estudos futuros	142
Referências	143

CAPÍTULO 1

A PESQUISA

1.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo introdutório, apresento, resumidamente, alguns fatos de minha trajetória acadêmica que corroboraram para a escolha da *aprendizagem matemática na modelagem matemática* como tema de pesquisa e trago a pergunta norteadora, juntamente com o objetivo da presente pesquisa. Em linhas gerais, a modelagem matemática em âmbito escolar pode ser compreendida como a abordagem de situações-problema do dia a dia ou de outras áreas das ciências, por meio de conteúdos matemáticos escolares.

Também nesse capítulo, discuto a relevância do estudo para o campo de pesquisa em modelagem matemática em âmbito educacional e para a implementação da modelagem matemática nas escolas, bem como, de que maneira essa pesquisa se entrelaça com estudos que venho desenvolvendo sobre modelagem matemática.

Em uma seção específica, cito ainda como esta pesquisa está estruturada e descrevo os enfoques dos capítulos que compõem a tese.

1.2 OS PERCURSOS DA TRAJETÓRIA ACADÊMICA

As minhas primeiras participações em disciplinas de Matemática, com enfoque predominantemente relacionado às aplicações da matemática, ocorreram durante a graduação em Licenciatura em Matemática que cursei na Universidade Federal do Pará.

No período referente ao primeiro semestre em que eu cursava a licenciatura, o professor destinado a ministrar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral¹ resolveu mudar o livro que utilizava nas disciplinas de Cálculo por ele ministradas. O professor explicou aos alunos que buscava identificar os impactos na aprendizagem dos estudantes, proporcionados pela utilização de uma nova metodologia de ensino dos conteúdos referidos a essa disciplina.

A nova metodologia de ensino compreendia a abordagem dos conteúdos referentes à disciplina de Cálculo, por meio da resolução de problemas do dia a dia e de outras áreas das

¹ Ao longo dessa seção, denominarei a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, somente pela expressão de disciplina de Cálculo.

ciências. Comumente, esses problemas consistiam na construção de modelos matemáticos² de problemas peculiares à Física, à Economia, à Biologia etc.

Algumas diferenças dessa proposta em relação a outras estratégias de ensino dos conteúdos de Cálculo foram identificadas por nós, alunos da disciplina. Notávamos que os conteúdos eram abordados de maneira mais lenta, quando comparávamos ao ritmo da abordagem dos mesmos, em outra disciplina de mesma nomenclatura, cujo enfoque era totalmente desprovido de aplicações da matemática a outras ciências.

Também, reclamávamos pelo fato de os problemas propostos para resolução no livro, não serem problemas de simples utilização de métodos anteriormente explicitados, para tal resolução, como víamos em outras disciplinas. Além disso, no livro não havia uma seção de apresentação das respostas finais dos problemas, o que tornava o enfoque adotado pelo professor, ainda mais complexo para nós, estudantes.

Apesar de reconhecer essas peculiaridades do ensino dos conteúdos de Cálculo aplicáveis a outras ciências, eu e outros alunos da turma, afirmávamos que por outro lado, estávamos identificando a utilidade da aprendizagem dos conteúdos matemáticos aprendidos na universidade, para resolução de problemas oriundos de outras ciências e do dia a dia.

Meu interesse em estudar a matemática, no que se refere às suas possíveis aplicabilidades em outras ciências e/ou para análise de situações do dia a dia me conduziu a elaborar um trabalho de conclusão de curso dessa natureza. Em dupla e sob a orientação do professor da disciplina de Cálculo, desenvolvemos um trabalho que consistia na construção de modelos matemáticos que representassem o conflito ocorrido entre as tropas americanas e as tropas japonesas na Ilha de Iwo Jima, em 1945.

O trabalho de conclusão de curso me proporcionou conhecimentos relativos a como modelar problemas do dia a dia e/ou de outras áreas da ciência. Todavia, não debatíamos sobre conhecimentos de natureza didático-pedagógica a respeito de como implementar a modelagem³ ou outras metodologias de ensino em âmbito escolar, em qualquer disciplina específica de matemática cursadas durante a graduação.

Além disso, minha experiência profissional não contemplava esse aspecto, haja vista que naquele período exercia profissionalmente a função técnica de analisar, elaborar e apresentar relatórios estatísticos, em um órgão da Prefeitura Municipal de Belém/PA.

² Modelos matemáticos de maneira geral, correspondem às fórmulas e às expressões matemáticas que representam em termos matemáticos, a resolução dos problemas adotados para análise.

³ Ao longo deste capítulo, em alguns momentos, opto pelo uso do termo *modelagem*, em substituição à expressão *modelagem matemática*.

Ciente de que a ausência de debates de cunho didático-pedagógico relativo ao ensino da matemática de maneira ampla, não somente ao possível ensino da matemática por meio de modelos matemáticos, representava uma lacuna em minha formação profissional, enquanto professora de matemática, iniciei em 2004, o curso de especialização em Educação Matemática ofertado pelo Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico⁴ (NPADC) da Universidade Federal do Pará.

Além do curso de especialização contemplar meus objetivos, em termos de realização de discussões referentes à educação matemática de maneira geral, foi cursando a disciplina intitulada “Modelagem matemática no âmbito da educação matemática”, oferecida pelo curso, que tive meus primeiros contatos com leituras específicas sobre modelagem na perspectiva da educação matemática.

Nas leituras realizadas, pude constatar algumas semelhanças e diferenças, em relação à modelagem que desenvolvia durante o período que cursei a graduação. A implementação da modelagem motivava aos alunos a aprenderem matemática e permitia que eles atribuíssem utilidade aos conteúdos matemáticos na resolução de problemas do dia a dia.

Motivada pelas leituras iniciais, a respeito dos impactos da aprendizagem matemática, que a implementação da modelagem pode gerar em âmbito escolar ingressei, em 2005, no curso de mestrado em Educação Matemática, organizado institucionalmente, pelo mesmo núcleo em que realizei a especialização.

O ingresso no curso de mestrado me proporcionou a elaboração de artigos e a participação em eventos científicos sobre modelagem, bem como, de educação matemática, nos quais os estudos sobre modelagem eram realizados em grupos de trabalhos específicos. Entre eles, destaco a minha primeira participação na Conferência bianual de Modelagem Matemática na Educação Matemática, ocorrida em 2005, e minha presença na reunião de Grupo de Trabalho em modelagem matemática, no III Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática, realizado em 2006.

As discussões ocorridas nesses eventos, meu estudo da revisão de literatura sobre modelagem e os debates com meus pares no grupo de pesquisa que eu integrava⁵, conduziram-me a pesquisar sobre a implementação da modelagem em escolas estruturadas em ciclos de formação, como tema de dissertação do curso de mestrado.

⁴ Tendo em vista que o debate sobre educação matemática não ser de amplo interesse entre o corpo docente do curso de licenciatura em matemática, o curso de especialização era realizado em um local que possuía total independência administrativa, em relação ao Departamento de Ciências Exatas e Naturais da Universidade que organizava o curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

⁵ Nesse período, eu integrava o Grupo de Estudos em Modelagem Matemática na Universidade Federal do Pará.

Os ciclos de formação correspondem a um modelo de organização escolar que entre, outras questões oficiais, possui como característica o tempo escolar ampliado para, no mínimo dois anos; o currículo estruturado em eixos temáticos interdisciplinares; a avaliação escolar descritiva e não quantitativa; os conteúdos disciplinares não preestabelecidos⁶; entre outros.

Nas pesquisas e nos relatos de professores a respeito da implementação da modelagem no contexto escolar, frequentemente, a organização escolar em séries anuais era citada como obstáculo institucional ao uso da modelagem. Isso porque a modelagem é caracterizada pela não linearidade dos conteúdos matemáticos, pela interdisciplinaridade e pela demanda maior de tempo para abordagem dos conteúdos.

Já a organização em séries anuais, é vista como obstáculo institucional à implementação da modelagem, em virtude de essa organização escolar ser caracterizada por conteúdos disciplinares lineares e preestabelecidos; o currículo da escola não é organizado em eixos temáticos; o tempo escolar é exíguo e compartimentalizado; entre outros.

Por outro lado, os ciclos de formação eram explicitamente citados nas pesquisas como uma organização escolar que supria as demandas curriculares geradas pela implementação da modelagem, bem como contemplava outras questões, como a necessidade de um tempo extraclasse para elaboração de problemas a serem matematizados em modelagem e a existência de uma avaliação escolar que engloba itens para além dos conteúdos disciplinares, como a avaliação da participação dos alunos, por exemplo.

Além de considerações teóricas sobre o uso da modelagem em escolas organizadas em ciclos de formação, a pesquisa previa também análises, a partir da realização da modelagem em uma escola que oficialmente adotava essa organização escolar. Então, elaborei três tarefas de modelagem⁷ para serem desenvolvidas pelos alunos do III Ciclo de uma escola organizada em ciclos de formação da rede municipal de Belém.

A realização dessas tarefas foram as minhas primeiras experiências de modelagem matemática no papel de professora⁸. Elas foram realizadas, de maneira intercalada, ao ensino de conteúdos disciplinares que eram abordados aos alunos, durante seus horários oficiais de

⁶ As propostas de organização escolar em ciclos de formação são diversificadas, as características acima citadas referem-se à proposta oficial de organização escolar em ciclos de formação da Prefeitura Municipal de Belém, desenvolvida no ano de 2006.

⁷ Denomino de tarefas de modelagem, as tarefas escolares, as quais os alunos resolvem problemas do dia a dia e/ou de outras áreas das ciências, utilizando conteúdos matemáticos escolares.

⁸ As demais experiências de modelagem vivenciadas por mim, como professora, ocorreram a partir de então, especificamente, no âmbito da formação continuada e inicial de professores.

aula, pelo professor da disciplina de matemática da escola⁹. Minha presença na escola teve duração de oito meses.

Além de obter informações empíricas sobre o tema da pesquisa de mestrado, essa primeira experiência em implementar modelagem como professora me provocou questionamentos a respeito da realização da modelagem pelos alunos. Em particular, me questionei sobre como os alunos compreendiam os conteúdos matemáticos vistos em modelagem, que compreensões de matemática passavam a sustentar e que aprendizagem matemática era proporcionada pela modelagem, entre outras indagações.

Algumas dessas indagações resultaram na publicação de um artigo (SOUZA, 2007) que apresenta os entendimentos de matemática e de aprendizagem matemática que os alunos possuíam, após terem vivenciado o ensino de conteúdos matemáticos, por meio da modelagem.

No início do ano de 2007, concluí a dissertação de mestrado com temáticas de pesquisas futuras advindas do estudo sobre a implementação da modelagem em organizações escolares pautadas em ciclos de formação. Análises a respeito da implementação da modelagem em um período dilatado de dois anos e em uma organização curricular orientada por eixos temáticos foram vislumbrados como futuros estudos, os quais poderiam suscitar desdobramentos sobre a efetivação da modelagem em âmbito escolar.

No final de 2007, elaborei um projeto de tese mantendo as implicações da organização escolar para a realização de tarefas de modelagem como tema de estudo. Em particular, propus um projeto cujo objetivo era *estudar o tempo escolar e suas implicações para a implementação da modelagem em âmbito escolar* e o submeti ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, realizado em parceria pela Universidade Estadual de Feira de Santana e a Universidade Federal da Bahia.

Após aprovação no curso de doutorado e sob a orientação do professor Drº Jonei Cerqueira Barbosa, me tornei integrante do Núcleo de Pesquisas em Modelagem Matemática (NUPEMM) da Universidade Estadual de Feira de Santana. Nas reuniões do NUPEMM, tínhamos como pauta artigos sobre modelagem, sobre metodologia de pesquisa e também analisávamos os resultados parciais e artigos de pesquisas desenvolvidas pelos integrantes do referido grupo¹⁰.

⁹ A sugestão de ensino dos conteúdos estudados pelos alunos na disciplina de matemática da escola foi feita pela coordenação pedagógica da escola, justificando que os alunos precisavam melhorar seus rendimentos escolares nessa disciplina.

¹⁰ A partir de 2010, integro o Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia e não mais o NUPEMM, em virtude de o orientador dessa

Minhas participações nas reuniões do NUPEMM contribuíram para que eu decidisse escolher um novo tema para a pesquisa que se articulava, em alguma medida, com ideias suscitadas durante meu desenvolvimento de tarefas de modelagem. Em particular, alguns integrantes do NUPEMM pesquisavam sobre a produção discursiva dos alunos em modelagem, por isso, comumente, debatíamos essa temática nas reuniões.

Entre os possíveis desdobramentos de pesquisa gerados, a partir da análise da produção discursiva dos alunos no desenvolvimento de tarefas de modelagem, tive interesse em pesquisar sobre a produção discursiva dos alunos sobre matemática. Como articulam os conceitos matemáticos, de que maneira os utilizam na resolução de problemas, de que maneira falam sobre os conteúdos matemáticos, etc., compõem os questionamentos advindos desse novo interesse de pesquisa.

Pesquisar os discursos dos alunos sobre matemática remetia inicialmente, a necessidade de identificações e análises a respeito da própria matemática. Na busca de referências para a análise dessa questão, em 2009, tive acesso a um livro que sustentava um entendimento de matemática e de delineamentos a respeito de que produção discursiva poderia ser denominada de matemática e por quê. Era um livro que em português pode ser intitulado “Pensamento como comunicação: Desenvolvimento humano, o aumento dos discursos e matematização” escrito por Anna Sfard, pesquisadora da área de Psicologia em Educação Matemática.

Nesse livro, Sfard (2008) apresenta um conjunto de conceitos e definições a respeito da delimitação do que vem a ser a matemática escolar e de questões que envolvem a aprendizagem matemática. Um das principais definições da autora nessa direção se refere a seu entendimento de matemática escolar como discurso matemático escolar.

Para Sfard (2008), matemática é toda produção discursiva escrita ou oral sobre objetos matemáticos. Essa produção discursiva é denominada pela autora de narrativas matemáticas. Já os objetos matemáticos possuem como distinção, em relação aos objetos de outros discursos, serem objetos discursivos.

Em relação à aprendizagem matemática, entre outras considerações, Sfard (2008) esclarece que esta aprendizagem ocorre a partir de um conflito entre as regras que regem a produção discursiva dos alunos e regras que regem a produção discursiva do professor.

Para apontar que a produção discursiva matemática é regida por regras e que essas

pesquisa passar a compor o quadro de docentes da referida Faculdade. O ENCIMA é um grupo de pesquisa composto por docentes e estudantes que desenvolvem pesquisas, principalmente, nas áreas de ensino de ciências e matemática.

regras são relativas aos usos atribuídos pelos indivíduos às palavras, Sfard (2008) se fundamenta, filosoficamente, nas ideias apresentadas por Wittgenstein, em seu livro *Investigações Filosóficas*.

Ludwig Wittgenstein foi um filósofo austríaco que viveu entre os anos de 1889 e 1951, cujas ideias fundamentam o movimento denominado de virada linguística do século XXI e são consideradas opostas ao entendimento de linguagem como *meio* de expressão da realidade.

Em particular, em seu livro *Investigações Filosóficas*, o filósofo instiga os leitores a analisar os usos que atribuímos às palavras, a fim de compreender a sua significação. Ele também nos sugere conceber a linguagem como uma *atividade* regida por regras. Regras que são formadas a partir de crenças, hábitos, concepções de mundo, etc., em que os indivíduos estão vinculados.

A referência de Sfard (2008) à obra de Wittgenstein (1999) me conduziu a uma leitura direta da obra do filósofo. A partir dessa leitura, as definições e conceitos elaborados por Sfard (2008) adquiriram outros entendimentos, e uma nova temática de pesquisa passou a ter as definições teóricas de Anna Sfard e as ideias filosóficas de Ludwig Wittgenstein, como fonte teórica e filosófica. É com base nas ideias de ambos os autores que essa pesquisa possui a seguinte pergunta norteadora: **Que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática em âmbito escolar?**

1.3 O OBJETIVO DA PESQUISA

Esta pesquisa possui o seguinte objetivo: **identificar que aprendizagem matemática se constitui no desenvolvimento da modelagem matemática em âmbito escolar**. O verbo *constituir* é usado como sinônimo de *gerar*, *formar*, *criar* e indica que visio identificar que aprendizagem matemática é *gerada* pela modelagem, ou seja, que aprendizagem matemática a modelagem tem como característica. Esse tema é estudado, como mencionado, com base nas ideias teóricas e filosóficas de Anna Sfard e Ludwig Wittgenstein, respectivamente.

Na modelagem, a matemática é utilizada na resolução de problemas do dia a dia e de outras áreas das ciências, ou seja, conceitos, fórmulas, procedimentos matemáticos são utilizados para essas resoluções. Diante disso, questiono: Que aprendizagem matemática se constitui na modelagem? Como os conceitos e procedimentos relativos à matemática são abordados, quando vistos em função de resolver problemas do dia a dia ou de outras áreas das

ciências? De que maneira o professor aborda esses conceitos e procedimentos? Qual a dinâmica da aprendizagem matemática na modelagem? Esses são exemplos de questões que busco compreender na realização dessa pesquisa.

A seguir, relato porque julgo relevante a realização da pesquisa a respeito da aprendizagem matemática na modelagem, em função de possíveis contribuições para as pesquisas em modelagem no âmbito escolar, para a implementação da modelagem na prática pedagógica dos professores e ainda para aprofundamentos relativos aos meus estudos sobre modelagem.

1.4 A RELEVÂNCIA DA PESQUISA

A modelagem matemática em âmbito escolar se caracteriza pela abordagem de problemas do dia a dia ou de outras áreas, também denominados de problemas reais, por meio de conteúdos matemáticos escolares. São exemplos dos problemas abordados na modelagem, aqueles que versam a respeito da dinâmica “populacional” (BASSANEZI, 2002, p. 331), sobre a quantidade de “gasolina consumida em um carro” (BLUM; FERRI, 2009, p.46), sobre o consumo de “fraldas” (LEISS et al., 2010, p. 121), etc.

Assim, os conteúdos matemáticos escolares são vistos de maneira relacionada a temáticas do dia a dia ou de outras áreas da ciência. Com base nessa característica, artigos, reiteradamente, afirmam que a utilização da modelagem no ensino da matemática pode motivar os alunos a aprenderem matemática (BARBOSA, 2003; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; SANTOS; BISOGNIN, 2007; SWAN et al., 2007), possibilita aos alunos identificarem que os conteúdos matemáticos podem ser utilizados na resolução de problemas em sua vida cotidiana, em seus ambientes de trabalho, ou na resolução de problemas de outras ciências (BLUM; FERRI, 2009; CALDEIRA, 2007; KAISER; SCHWARZ, 2010), além de propiciar que os alunos avaliem criticamente que argumentos matemáticos sustentam alguns debates pautados em matemática (BARBOSA, 2003).

Muito embora as argumentações em torno da aprendizagem matemática dos alunos estejam presentes nas sugestões para a implementação da modelagem no contexto escolar, ainda são poucas as pesquisas que tematizam que aprendizagem matemática a utilização da modelagem matemática suscita, de que maneira os conteúdos matemáticos são abordados pelo professor e pelos alunos, que aprendizagem se constitui em modelagem, que pressupostos filosóficos são assumidos na tematização da aprendizagem matemática na modelagem, entre outros.

Araújo (2007) apresenta os pressupostos filosóficos que sustentam algumas perspectivas de modelagem. Já Velela e Almeida (2010), relatam os pressupostos filosóficos sobre realidade presente em algumas definições de modelagem apresentadas na literatura.

Essa pesquisa visa contribuir com esses estudos, pois apresento delimitações teóricas e filosóficas sobre matemática, contudo, adoto essas delimitações para a identificação de que aprendizagem matemática se constitui na modelagem.

A aprendizagem matemática na modelagem foi poucas vezes, focos específicos de pesquisa. Entre algumas pesquisas que já foram realizadas sobre o tema, cito as desenvolvidas por Chaves (2005), Ferruzi e Almeida (2009), Smith (2008), Vertuan e Almeida (2007) e Bisognin e Bisognin (2011). Esses estudos apontaram para a identificação de aprendizagem matemática pelos alunos, fundamentada, em teorias de aprendizagem específicas.

Além disso, há estudos que, por outro lado, citam a aprendizagem matemática como resultado identificado pela implementação da modelagem em âmbito escolar. Mas a grande maioria não tiveram o objetivo específico de tratar teoricamente a temática. São exemplos os estudos de Ferreira e Wodewotzki (2007), Sant'Ana (2007), Swan et al. (2007), Biembengut e Hein (2003), Santos e Bisognin (2007) e Souza e Rego (2010).

Nessa direção, esta pesquisa visa contribuir com os estudos já realizados sobre a aprendizagem matemática na modelagem, em particular, objetivo contribuir com compreensões a respeito de que aprendizagem matemática se constitui na modelagem, identificando essa aprendizagem à luz de ideias teóricas e filosóficas sobre matemática e sobre aprendizagem matemática, portanto, um enfoque distinto de alguns estudos até então realizados sobre o tema.

Pesquisar sobre a aprendizagem matemática na modelagem pode conduzir ainda, a debates a respeito de que matemática se aprende em modelagem e por que sua implementação em âmbito escolar é relevante.

Sobre essa questão, aponto juntamente com outros autores que a utilização da modelagem em âmbito escolar, entre outros argumentos possibilita aos alunos identificarem que os conteúdos matemáticos são úteis para resolução de problemas oriundos de diversos contextos (ALMEIDA; VERTUAN, 2011; ARAÚJO, 2010; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; KAISER; SCHWARZ, 2010; SOUZA; BARBOSA, 2009; SWAN et al., 2007).

Além dessas possíveis contribuições para as pesquisas em modelagem na perspectiva da educação matemática, aponto que a presente pesquisa pode ter implicações para a prática pedagógica dos professores em modelagem, pois esses poderão identificar a dinâmica da aprendizagem matemática que se desenvolve em modelagem e de que maneira os conteúdos

matemáticos são abordados pelo professor e mobilizados pelos alunos.

Também, buscar compreender a aprendizagem matemática na modelagem na presente pesquisa, me direciona, em termos de meus estudos anteriores sobre modelagem, a ter como foco, estudos sobre a dinâmica específica e particular de sala de aula no desenvolvimento da modelagem.

Para mim, esse novo aspecto de estudo amplia as pesquisas e os entendimentos anteriores advindos do estudo longitudinal que realizei durante o mestrado. Apesar de ser uma temática distinta, considero que essa pesquisa tem como enfoque um aspecto do fazer modelagem, em particular, enquanto que nos estudos realizados durante o mestrado, obtive esclarecimentos sobre uma temática mais ampla que envolve esse fazer, a organização escolar.

Esse movimento que considero do mais amplo para o mais específico, me proporciona um esclarecimento a respeito das nuances ora gerais, ora específicas que envolvem a implementação da modelagem no âmbito escolar.

A partir dessas considerações sobre a relevância do presente estudo, apresento como esta tese está estruturada, explicitando os enfoques dos capítulos que a compõe.

1.5 A ORGANIZAÇÃO DA TESE EM FORMATO DE ARTIGOS

Esta tese pode ser denominada de tese em formato de múltiplos artigos. Duke e Beck (1999) elaboraram esse termo para se referir a teses que são compostas por artigos, juntamente com capítulos de natureza introdutória e conclusiva, relativos às justificações da pesquisa, seus resultados, material utilizado, etc. No caso da referida pesquisa, os artigos elaborados serão enviados para publicação, após serem submetidos à comissão avaliadora da tese¹¹.

Optei por organizar a tese em formato de artigos por concordar com os argumentos apresentados por Duke e Beck (1999). Um deles se refere ao fato de que a ação de escrever em forma de artigos, prepara o pesquisador, profissionalmente, para uma de suas principais práticas profissionais que é a de pesquisar e divulgar os resultados em formato de artigos, tanto para os periódicos de sua área, como também, para serem compartilhados e debatidos em eventos científicos, além da necessidade de avaliá-los quando o pesquisador é integrante de comissões científicas.

¹¹ Essa é uma opção dos integrantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Bahia, do qual sou integrante. É possível, portanto, constatar em outros programas de pós-graduação, artigos já publicados serem submetidos à comissão julgadora da tese/dissertação.

Sobre isso, entendo que escrever artigos mobiliza um aprendizado particular, entre eles, o de aprender a sintetizar os conceitos e ideias adotados e articulá-los coerentemente, com as demais partes que compõem o artigo. A escrita da tese em formato de artigos possibilita ao estudante de mestrado e doutorado a oportunidade de aprender a escrever artigos, tendo o suporte do orientador e do grupo de pesquisa, do qual passa a se vincular.

Também, adoto esse formato em virtude de possibilitar que a partir de um mesmo tema, sejam abordados focos, dados, métodos e análises de dados distintos em um único material de tese. Uma possibilidade não viável em um formato de tese clássico¹², já que o mesmo é caracterizado por dados, focos, métodos, teoria e análises únicos, mobilizados a partir de um tema, apontam Duke e Beck (1999).

Duke e Beker (1999) citam que o formato de tese/dissertação em artigos já é adotado de maneira consolidada em diversas universidades dos Estados Unidos e da Europa, principalmente nas áreas das Ciências Biológicas, em Química, em Física, etc., e, em crescimento, no campo da Educação.

Em particular, esse formato de tese/dissertação tem sido adotado consensualmente, como formato padrão de teses e dissertações pelos integrantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Bahia que desenvolvem pesquisas vinculadas ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Outros alunos do referido programa, também têm escolhido esse formato para organização de suas teses.

Organizei essa pesquisa em formato de múltiplos artigos, da seguinte maneira: capítulo introdutório, capítulo de artigos, capítulo de considerações gerais e capítulo de possíveis implicações da pesquisa. Esse é o capítulo introdutório que destino a descrever alguns fatos de minha trajetória acadêmica que confluíram para a escolha da temática de pesquisa.

Também nesse capítulo, cito o objetivo geral da pesquisa e a sua relevância, bem como os motivos pelos quais estruturei essa tese em formato de múltiplos artigos. Ainda no capítulo introdutório, apresento uma descrição geral do que versam os artigos e os demais capítulos. A seguir, relato então, os enfoques de cada artigo da tese e, posteriormente, cito a abordagem dos demais capítulos.

¹² Refiro-me a teses que mantêm a seguinte estrutura: Introdução, referencial teórico, discussão da literatura, metodologia, dados e análises de dados. Em geral, cada um desses itens é abordado em um capítulo separadamente.

1.6 OS ENFOQUES DOS ARTIGOS E DOS CAPÍTULOS DA TESE

Esta pesquisa tem como objetivo identificar **que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática**. Essa identificação da aprendizagem matemática que se constitui na modelagem é realizada, a partir de três estudos, um de natureza teórica e filosófica e outros dois de natureza empírica. Esses estudos são apresentados separadamente em cada um dos artigos da tese.

O primeiro artigo tem como objetivo oferecer contribuições teóricas e filosóficas sobre que aprendizagem matemática se constitui na modelagem. Trata-se de um artigo que tematiza as definições teóricas de matemática e de aprendizagem matemática de Anna Sfard, com base nos entendimentos de matemática de Ludwig Wittgenstein.

A partir dessas ideias, apresento uma compreensão de modelagem e de aprendizagem matemática na modelagem e aponto implicações para os argumentos relativos a aprendizagem matemática na modelagem. Esse artigo tem como título, *a aprendizagem matemática na modelagem matemática: contribuições teóricas e filosóficas*.

O segundo artigo tem, nominalmente, o mesmo objetivo da tese, o de identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem. Esse objetivo é abordado, principalmente, com base na definição de regras de Anna Sfard e na ideia de matemática como *uso* normativo da linguagem apontada por Ludwig Wittgenstein. Diante disso, intitulei o artigo de: *a aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática*.

Diferentemente do primeiro, nesse segundo artigo da tese, a aprendizagem matemática na modelagem é analisada, a partir de dados coletados empiricamente. Esses dados correspondem aos discursos de um grupo de alunos e uma professora produzidos durante o desenvolvimento de uma tarefa de modelagem e obtidos por meio do procedimento de *observação*.

Em termos de considerações finais, aponto a aprendizagem matemática na modelagem como aprendizagem das *regras* relativas ao sistema matemático escolar, delineando questões que permeiam a aprendizagem matemática na modelagem. Como por exemplo, a adoção pelos alunos da produção discursiva do professor como modelo, as divergências entre as regras que regem a produção discursiva dos alunos e a produção discursiva do professor, bem como as estratégias adotadas pelo professor para auxiliarem os alunos no desenvolvimento da tarefa de modelagem.

Já no terceiro artigo da tese, que também possui o objetivo de identificar que

aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática, adoto a ideia de *uso* de Ludwig Wittgenstein como fundamentação teórica principal, para o estudo do tema. Esse artigo tem como título, *as implicações da ideia de uso de Wittgenstein para a aprendizagem matemática na modelagem matemática*. Semelhantemente ao segundo artigo da tese, as produções discursivas de um grupo de alunos e um professor são tomadas como material empírico de análise.

As análises realizadas com base nas ideias teóricas e filosóficas assumidas geraram uma compreensão de aprendizagem matemática na modelagem em termos de aprendizagem de como as palavras são *usadas* à luz do sistema matemático escolar. Identifico esses *usos* e tematizo como os mesmos são abordados na modelagem. Por fim, apresento implicações desse entendimento para a implementação da modelagem em âmbito escolar.

O primeiro artigo da tese possui relação com os demais artigos, no sentido de que ele foi elaborado com vistas à construção do quadro teórico e filosófico principal a ser utilizado nos demais artigos, bem como, com intuito de abordar o tema sem estar relacionado a um específico conjunto de dados empíricos.

Já o segundo e o terceiro artigo da tese, são artigos distintos, mas ambos visam apresentar uma compreensão sobre que a aprendizagem matemática se constitui na modelagem, porém, a partir de dados empíricos e de conceitos teóricos principais diferentes.

Além do presente capítulo introdutório e do capítulo composto pelos três artigos, elaborei um capítulo específico que apresenta um entendimento geral a respeito da temática de pesquisa, com base nas delimitações teóricas suscitadas nos três artigos da tese.

No último e quarto capítulo, aponto possíveis implicações do estudo realizado para a prática do professor na implementação da modelagem, para as pesquisas em modelagem na perspectiva da educação matemática e para algumas definições teóricas de Anna Sfard. Também nesse capítulo, aponto possíveis projetos de pesquisas que podem ser desenvolvidos, a partir das ideias geradas na pesquisa.

Destaco que os artigos que compõem a tese já estão escritos na terceira pessoa do plural, haja vista que posteriormente à avaliação da comissão julgadora da tese, eles serão escritos e publicados em coautoria com o orientador da pesquisa. Ressalto ainda que a presença de argumentações e citações semelhantes nos três artigos da tese é intencional, em virtude de que os artigos possuem temáticas similares e serão submetidos separadamente a periódicos.

Após a breve descrição da temática que compõe cada um dos capítulos da tese, apresento a seguir, o capítulo referente aos artigos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. *ZDM- The internacional Journal on Mathematics Education*, v. 42, p. 337- 348, 2010.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, 17-32.

ALMEIDA, L.M.W de; VERTUAN, R. E. Discussões sobre o “como fazer” modelagem na sala de aula. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p. 19-43.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. *Anais...* São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BISOGNIN, E; BISOGNIN, V. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p. 123-140.

BLUM, W; FERRI, R. Mathematical modeling: can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, p. 45-58, 2009.

CALDEIRA, A.D. Etnomodelagem e suas relações com a educação matemática na infância. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 81-98.

CHAVES, M. I A. *Modelando questões ambientes relacionadas com a água a propósito do ensino- aprendizagem de funções no 1º ano do ensino médio*. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. *Educational Researcher*, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

FERREIRA, D.H.L; WODEWOTZKI, M.L.L. Questões ambientais e modelagem matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental. In.: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação*

Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 115-132.

FERRUZI, E.C; ALMEIDA, L. M. W de. Modelagem matemática: contexto para a construção do conhecimento matemático. In.: SEMINÁRIO NACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 4.,2009, Brasília, *Anais...*, Brasília: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010, 1. CD-ROM.

KAISER, G; SCHWARZ, B.. Authentic modeling problems in mathematics education- examples and experiences. *Journal Mathematics Didatik*, v. 31, p. 51- 76, 2010.

LEISS, D. et al. The role of the situation model in mathematical modelling- task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal Mathematics Didatik*, v. 31, p. 119-141, 2010.

SANT'ANA, M. F. Modelagem de experimento e ensino de cálculo. In.: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 149 - 160.

SANTOS, L. M.M; BISOGNIN. Experiências de ensino por meio da modelagem matemática na educação fundamental. In.: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 99- 114.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: university press, 2008.

SMITH, S. D. C. *Modelagem matemática gerando um ambiente de ensino e aprendizagem para a educação de jovens e adultos*. 106f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

SOUSA, D.B; REGO, M.R. A modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem de conteúdos geométricos no 7º ano de ensino fundamental. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010, 1. CD-ROM.

SOUZA, E. G. Um debate sobre o uso da modelagem matemática a partir das inferências dos alunos. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 5.,2007, Ouro Preto. *Anais...*Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto e Universidade Federal de Belo Horizonte, 2007. 1 CD-ROM.

SOUZA, E.G; BARBOSA, J.C. Modelar matematicamente uma situação-problema: um enfoque participacionista.In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 6.,2009, Londrina.*Anais...* Paraná, 2009, 1 CD-ROM.

SWAN, M. et al. The roles of modeling in learning mathematics. . In: BLUM, et. al., *ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education – discussion document*, 2007. p. 275-284.

VELEDA, G. G; ALMEIDA, L.M. W de. A caracterização da realidade em trabalhos de

modelagem matemática. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010, 1. CD-ROM.

VERTUAN, R.E; ALMEIDA, M. L W de. O uso de diferentes registros em atividades de modelagem matemática. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 5.,2007, Ouro Preto. *Anais...*Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto e Universidade Federal de Belo Horizonte, 2007. 1 CD-ROM.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações Filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

ARTIGO 1

A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS E FILOSÓFICAS

Resumo

Este artigo tem como objetivo contribuir para o debate teórico e filosófico sobre a aprendizagem matemática que se constitui na modelagem matemática. Para esse fim, adotamos as ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein relativas ao seu entendimento de linguagem e de matemática como uma modalidade normativa de uso da linguagem. Esses entendimentos são utilizados como embasamento filosófico para a análise das definições teóricas apresentadas por Anna Sfard sobre matemática e aprendizagem matemática em âmbito escolar. A partir da interseção das ideias de ambos os autores, apresentamos uma compreensão de modelagem e de aprendizagem matemática na modelagem e apontamos algumas implicações para a inserção da modelagem em âmbito escolar.

Palavras- Chave: Modelagem Matemática. Sistema matemático. Aprendizagem Matemática.

THE MATHEMATICS LEARNING IN THE MATHEMATICAL MODELLING: PHILOSOPHICAL AND THEORETICAL CONTRIBUTIONS

Abstract

This paper aims to contribute to the theoretical and philosophical debate about what mathematics learning constitutes in the mathematical modelling. In order to it, we have followed the ideas of the philosopher Ludwig Wittgenstein about his understanding of language and of mathematics as a normative use of language. Those ideas have been used as a philosophical framework for the analysis of the theoretical definitions pointed by Anna Sfard on mathematics and mathematics learning in school context. From the crossing of ideas of both researchers, we show an understanding of modelling and mathematics learning in the modelling as well as we point out to some implications for the insertion of the modelling in school context.

Keywords: Mathematical Modelling. Mathematics System. Mathematics Learning.

2. 1. 1 INTRODUÇÃO

Afirmações relativas à importância de os alunos utilizarem os conteúdos matemáticos que aprendem na escola para resolverem problemas com os quais podem se deparar no dia a dia, em seus ambientes de trabalho e nas tomadas de decisões diárias diversas, estão sendo cada vez mais explícitas em parâmetros curriculares nacionais. Citações que apontam ser esse um dos objetivos de ensino da matemática estão presentes, por exemplo, em guias curriculares alemães (GERMANY, 2004), norte-americanos (NCTM, 2000) e brasileiros (BRASIL, 2002).

A modelagem matemática¹³, na perspectiva da Educação Matemática, pode ser definida, de maneira geral, como a abordagem de problemas da realidade, utilizando conteúdos matemáticos escolares.

As argumentações a respeito das implicações do uso da modelagem no contexto escolar e acadêmico para a aprendizagem matemática resultaram em sua consolidação como campo de pesquisa na área Educação Matemática. Essa consolidação é representada pela realização bianual da Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática no Brasil e pelo, também bianual, Encontro da Comunidade de Professores de Modelagem e Aplicações, o qual é realizado em âmbito internacional.

Algumas pesquisas e relatos de experiências apontaram, nesses congressos e em outros encontros¹⁴, que a modelagem gerava motivações nos alunos para aprenderem matemática (MAASS, 2010; SILVA, 2009), permitia que os alunos identificassem que os conteúdos da matemática escolar eram úteis em situações cotidianas (FERRUZI; ALMEIDA, 2009; SWAN et al., 2007), possibilitava que os alunos previssem como resolveriam problemas em seus ambientes de trabalho (KAISER; SCHWARZ, 2010), que os alunos analisassem criticamente argumentos pautados em matemática (BARBOSA, 2006), entre outras ênfases geradas pela implementação da modelagem para a aprendizagem matemática dos estudantes.

Embora as pesquisas e os artigos científicos que tratem da aprendizagem matemática dos estudantes proporcionada pela implementação da modelagem em contextos escolares e acadêmicos sejam diversas, elas têm, predominantemente, como foco o relato de argumentos favoráveis à aprendizagem matemática dos alunos (BIEMBENGUT; SCHMITT, 2010; LESH; FENNWALD, 2010) ou a descrição de como os alunos resolveram os problemas propostos, por meio de conteúdos matemáticos (BARBOSA, 2007; FERREIRA; WODEWOTZKI, 2007; MAAB, 2006).

Em termos filosóficos, as pesquisas de Araújo (2007) e de Veleza e Almeida (2010) tiveram como objetivo identificar que fundamentação filosófica sobre matemática embasa algumas das principais definições de modelagem sustentadas na literatura.

Nessa direção, o presente estudo visa contribuir com as pesquisas já realizadas sobre aprendizagem matemática e sobre os aspectos filosóficos relativos à modelagem, no sentido de oferecer contribuições teóricas e filosóficas sobre a aprendizagem matemática na

¹³A partir desse momento, citaremos apenas a palavra *modelagem* em substituição à expressão *modelagem matemática*, para evitarmos demasiadas repetições.

¹⁴ Por exemplo, citamos o Seminário Nacional de Pesquisas em Educação Matemática (SIPEM) e o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).

modelagem.

Iniciamos por explicitar os fundamentos filosóficos que sustentam nosso entendimento de linguagem e de matemática, com base nas ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein. Em seguida, utilizando essas ideias, analisamos os conceitos teóricos de Anna Sfard sobre matemática e aprendizagem matemática. E, por fim, elaboramos implicações das delimitações elaboradas para a aprendizagem matemática na modelagem¹⁵.

2.1.2 O PAPEL DA LINGUAGEM EM WITTGENSTEIN

As ideias subjacentes à denominada *virada linguística*, conhecidas, predominantemente, no final de século XX, são caracterizadas pelo papel da linguagem na constituição de significados. Um dos autores cujas ideias fundamentam a virada linguística, é o filósofo Ludwig Wittgenstein.

A virada linguística é caracterizada pela mudança no entendimento do papel da linguagem na constituição de significados em seus múltiplos aspectos. Por exemplo, no que denominamos de dor¹⁶, na maneira de saudar um amigo, em que fatos consideramos tristes ou alegres, na maneira de fazermos perguntas e de denominarmos os objetos ao nosso redor, entre outros inúmeros exemplos.

Com base nesse entendimento de linguagem, é possível analisar que *é pela* linguagem e *na* linguagem que os significados são constituídos, ou seja, é a própria linguagem o elemento formador / constituidor de significados.

Com essa mudança, a linguagem deixa de ser concebida somente como um meio ou ainda um *condutor de passagem* para a significação que se residiria sobre entidades mentais, ideais ou empíricas que são consideradas autônomas e independentes da linguagem, ou seja, a significação ocorreria em um nível extralinguístico. Esse entendimento de linguagem é intitulado de compreensão referencial de linguagem¹⁷.

¹⁵ Apontamos que o leitor pode encontrar algumas citações e argumentações presentes nesse artigo serem repetidas nos demais artigos que compõem a tese. Essa preservação de ideias foi intencional, haja vista que os artigos possuem a mesma temática e serão submetidos a periódicos, separadamente.

¹⁶ Usamos as palavras para dar significado às nossas experiências no mundo. Sensações e emoções são fisiológicas, mas a sua denominação e a especificação são constituições linguísticas.

¹⁷ Ressaltamos que o entendimento referencial de linguagem, o qual Wittgenstein(1999) se opõe, deve ser entendido em relação à compreensão de que a linguagem não exerce papel crucial na constituição de significados de maneira ampla, ou seja, na significação das emoções, das palavras, das crenças, da maneira de lidar e viver no mundo, etc. Isso porque nesse caso, a significação seria compreendida como algo que ocorre na esfera extralinguística, ou seja, advém dos objetos os quais as palavras nomeiam. Por exemplo, a significação da palavra dor seria uma significação que se daria em nível interno das emoções, portanto particular e pessoal. Todavia, Wittgenstein (1999) esclarece que as palavras têm critérios públicos de significação, porque seus

Wittgenstein (1999) se opõe a essa ideia referencial de linguagem, ou seja, de linguagem somente como veículo formador de significados. Em sua obra, essa ideia é representada pela seguinte visão agostiniana¹⁸ de linguagem: “cada palavra tem uma significação. Esta significação é agregada à palavra. É o objeto que a palavra substitui.” (WITTGENSTEIN, 1999, §1).

Para o filósofo, a significação das palavras não corresponde à identificação da relação de um para um, entre a palavra e o objeto que a palavra supostamente *representa*. A significação ocorre e se operacionaliza no *uso* da palavra (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; JESUS, 2002; MORENO, 2003, 2005). É a ideia de *uso* que fundamenta a compreensão de linguagem como cenário de constituição de significados.

Wittgenstein (1999) relata que a denominação de objetos é um dos usos da linguagem, mas isso não nos indica que a significação repousa sobre os objetos, e sim, que nós instituímos usar a linguagem dessa maneira.

Notemos que a palavra mãe, por exemplo, é usada, predominantemente, para designar uma mulher que possui filhos. Porém, especialmente, na Bahia, essa palavra é também usada para nomear alguém, em um sentido afetivo. Esse alguém pode ser uma criança ou mesmo um homem, e não somente uma mulher. É nessa direção que as ideias de Wittgenstein (1999) nos sugerem a buscar pela significação no *uso* que atribuímos às palavras.

Notemos ainda que os objetos podem não mais existir, mas a palavra que os denominavam podem manter a sua significação. Por outro lado, como exemplifica Wittgenstein (1999), se esquecermos que a palavra vermelho denota um objeto de uma cor vermelha, a palavra vermelho perde a sua significação, independente da existência desse objeto.

Assim, Wittgenstein (1999) aponta para um entendimento dinâmico e pragmático de linguagem e não estático e rigidamente fundamentado nos objetos. Essa compreensão de linguagem está assinalada na elaboração do termo “jogos de linguagem”, por Wittgenstein (1999, §7, 23, 67, 21).

A expressão *jogos de linguagem* utilizada pelo filósofo tem o objetivo de nos sugerir a identificação dos diversos usos que fazemos da linguagem, ou ainda, de nos indicar que

significados são constituições linguísticas. Isso justifica o fato de podermos falar de uma dor que nunca sentimos, exemplifica Moreno (2003).

¹⁸ A visão agostiniana de linguagem é atribuída a Santo Agostinho e está presente em sua obra denominada de Confissões. Santo Agostino foi um padre que viveu durante os anos de 354 a 430. Suas ideias são relativas à filosofia cristã.

“vejamos” como a linguagem funciona em diversas situações em nossa vida (1999, §66,106). Usamos a linguagem para os mais variados fins. São exemplos de jogos de linguagem citados pelo filósofo,

[...]comandar e agir segundo comandos [...] representar um teatro, cantar uma cantiga de roda, resolver enigmas, fazer uma anedota, contar, resolver um exemplo de cálculo aplicado, traduzir de uma língua para a outra, pedir, agradecer, maldizer, saudar [...] (WITTGENSTEIN, 1999, §23).

Dessa forma, a expressão *jogos de linguagem* instaura a análise e a identificação dos diversos usos que podemos realizar com a linguagem. Em particular, Wittgenstein (1999) também delimita de *jogos de linguagem* os diferentes usos que as palavras possuem. Como exemplo, o filósofo denomina de *jogos de linguagem* da palavra “jogos” os diversos usos da palavra “jogos”. Também, os diversos usos da expressão “ser bom” e “sei continuar” são designados de “jogos de linguagem” dessas expressões (WITTGENSTEIN, 1999, §66,77, 179).

Além dessas designações, Wittgenstein (1999) identifica como *jogos de linguagem* todo conjunto de atividades vinculadas ao uso da linguagem; como, por exemplo, aquelas atividades relacionadas à solicitação de um item de construção feita por um pedreiro ao seu ajudante.

O grito de um pedreiro da palavra “lajota” ao seu ajudante não se limitou somente à identificação do objeto lajota, mais também à entrega desse objeto ao pedreiro (WITTGENSTEIN, 1999, §2). Assim, *jogos de linguagem* pode ser uma expressão utilizada na identificação de todas as possíveis atividades mobilizadas pela linguagem, nesse caso, mobilizadas pelo uso da palavra lajota.

Diante dessas questões, podemos dizer que a linguagem, em Wittgenstein, (1999) possui uma conotação ampla. Ora denotando as maneiras de usar a linguagem, incluindo somente a oralidade ou a escrita, ora o uso do corpo, atrelado ou não, à oralidade/escrita, como é o caso da indicação de que “representar um teatro” é um exemplo de *jogos de linguagem*¹⁹.

¹⁹ Embora haja uma amplitude na delimitação de linguagem, em Wittgenstein (1999), talvez, em virtude do termo linguagem estar, tradicionalmente, vinculado somente à oralidade, é possível identificar a busca de ampliação do termo por alguns autores. Em LEKTORSKY (2002, p. 110-111 apud MIGUEL, 2010, p. 47), o autor utiliza a expressão *jogos de práticas* para se referir a jogos que envolvem movimentos do corpo, como a maneira de andar ou de rezar, por exemplo. Já Miguel, Vilela, Moura (2010, p. 158) adotam a expressão “jogos de cenas” cuja significação tem inspiração no termo *jogos de linguagem* de Wittgenstein (1999), agora, correspondendo às imagens, à disposição física dos objetos, às cores, ao próprio espaço físico, etc.

Assim, a opção pelo uso do termo jogos de linguagem e não somente linguagem visou salientar que a linguagem é uma *atividade* (GLOCK, 1998; MORENO, 2003, 2005), em oposição ao entendimento de linguagem como um sistema de símbolos fixos e universais. Uma atividade cuja característica é ser regida por regras.

A identificação da existência de regras vinculadas à linguagem explicita a noção de que o *uso* da linguagem em suas mais diversas formas, não é uma atividade arbitrária, o *uso* não é qualquer um. As regras nesse sentido, não se referem à organização dos símbolos, embora os envolvam, mas às regras que Wittgenstein (1999) explicita são regras relacionadas aos usos da linguagem.

Essas regras são denominadas de regras gramaticais. A gramática, aqui, se refere “tanto às regras constitutivas da linguagem, quanto à investigação filosófica das regras”, ressalta Glock (1998, p. 193). As regras da gramática dizem respeito aos padrões de correção, ou seja, ao uso da linguagem que faz ou não sentido.

Importante destacar que as regras, mesmo possuindo a aparência de serem anteriores em relação ao uso da linguagem, elas são consideradas orientadoras, normas de direção. Elas não ditam como as palavras devem ser usadas, garantindo o seu uso correto, apenas sugerem quais usos podem ser assim considerados. Questões contingenciais, por exemplo, podem e modificam, frequentemente, esse uso²⁰.

As regras da gramática são regras que orientam que usos das palavras são usos que fazem sentido. Como, por exemplo, dizermos que sentimos dor, mas não faz sentido atribuímos esse sentimento a coisas, como por exemplo, à cadeira ou à mesa.

Todavia, afirmar se o uso de uma determinada palavra faz ou não sentido, depende de conhecermos em que *forma de vida* determinados jogos de linguagem das palavras estão instaurados/vinculados. Isso explica o entendimento de que a linguagem passa a ser embasada em “fundamentos sem fundamentos” (MORENO, 2003, p. 125), pois *formas de vida* são dinâmicas e instáveis, mas são justamente elas que dão à linguagem a constituição de seus significados. A expressão *forma de vida*, em Wittgenstein (1999), é citada sempre em conjunto com a expressão jogos de linguagem ou linguagem,

[...] E representar uma linguagem significa representar-se uma forma de vida (WITTGENSTEIN, 1999, §19)

²⁰ Wittgenstein (1999) não sustenta uma noção comum de regras como estipulações fixas e imutáveis. Regras da gramática são orientadoras de quais são os possíveis usos corretos das palavras. Com base na ideia de regras como orientadoras de direção, o filósofo nos previne e adverte para o fato de que novos usos podem ser elaborados e acrescentados aos anteriores, antigos usos podem ser extintos e, contingencialmente, novos usos podem ser criados.

[...] O termo jogo de linguagem deve salientar que o falar da linguagem é parte de uma atividade, de uma forma de vida (WITTGENSTEIN, 1999, §23)

Para Glock (1998, p. 174), uma *forma de vida* pode ser entendida como “uma formação cultural ou social, é a totalidade de atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem”. Moreno (2003, p.129) apresenta um entendimento semelhante, descrevendo *formas de vida* como “sistemas regrados de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem; sistemas que se entrecruzam hábitos, atitudes, éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões de vontade”.

O que ambas as definições nos apontam e as citações de Wittgenstein (1999) referenciadas acima, é que *forma de vida* seria, justamente, o conjunto de sistemas que compõe a vida, que caracterizam a vida ser uma determinada maneira e não de outra. *Forma de vida* pode ser entendida também, como o conjunto de valores, crenças, ações, sentimentos, concepções, a própria linguagem, etc. que uma determinada coletividade/ou grupo social sustenta.

A linguagem concebida como elemento constituidor de significados, a partir da virada linguística, possui um papel de constituidor também das *formas de vida*; pois, é *na e pela* linguagem que valores, hábitos, ações, concepções, etc. são constituídos. Essa questão deve justificar o fato de que *representar uma linguagem* conduz a compreensão de uma *forma de vida*, citada por Wittgenstein (1999).

A seguir, apresentaremos algumas delimitações de Wittgenstein relativas a sua compreensão de matemática, as quais, como veremos, embute a busca da identificação da matemática, a partir de quais usos da linguagem a caracteriza.

2.1.3 A MATEMÁTICA COMO SISTEMA NORMATIVO

Para Wittgenstein²¹, as proposições matemáticas, asserções das mais diversas ordens, por exemplo, as proposições aritméticas, geométricas, algébricas, etc., são proposições de caráter normativo (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; JESUS, 2002; MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010; MORENO, 2005; VILELA, 2007, 2010).

²¹ Nessa seção e em alguns momentos ao longo do texto, citaremos Wittgenstein sem referenciar uma obra em particular. Quando assim fizermos, visamos apontar que a ideia de Wittgenstein citada não foi extraída somente de seu livro *Investigações Filosóficas*, mas também, corresponde a ideias apresentadas por alguns de seus comentadores referentes a outras obras do filósofo. Os comentadores adotados são: Jesus (2002), Glock (1998), Gottschalk (2004a, 2004b, 2008), Vilela (2007, 2010), Moreno (2003, 2005) e Miguel, Vilela e Moura (2010).

Isso significa que as proposições matemáticas têm como características serem normatizadoras de nossas experiências no mundo. Elas são *normas de como proceder*, *sistemas*, ou ainda, podem ser denominadas de *padrões de correção*, pelos quais podemos adotar para organizar algumas de nossas mais diversas experiências (GOTTSCALK, 2004a, 2004b, 2008).

Assim, as proposições matemáticas funcionam como *sistemas* pelos quais nossas experiências podem ser configuradas. A proposição aritmética “ $2+2=4$ ”, por exemplo, pode ser usada para nossa experiência de escrever artigos e dizer que nos últimos meses escrevemos quatro artigos: dois em janeiro e dois em fevereiro.

Caso adotássemos outro sistema normativo, poderíamos fazer outras afirmações. Ou seja, faz sentido dizermos que escrevemos quatro artigos desde que tenhamos escolhido a proposição aritmética “ $2+2=4$ ” para organizar nossa experiência de contagem.

Nesse exemplo, podemos observar que a proposição aritmética é anterior, em relação a nossa experiência de citar quantos artigos nós escrevemos, no sentido de que, nós a adotamos como normas/sistemas para essa experiência, por isso, seu caráter normativo e não descritivo de nossas experiências.

Essa questão evidencia que as proposições matemáticas não são proposições que *descrevem* nossas experiências, e sim, as normatizam. Um entendimento descritivo de matemática poderia considerar que as proposições matemáticas possuem relação de um para um com nossas experiências, podendo ser usadas indiscriminadamente para descrever quaisquer experiências, obtendo a mesma configuração.

O fato de as proposições matemáticas serem concebidas como normativas e não descritivas implica dizer que os fatos empíricos e as experiências não refutam, não negam as suas proposições. Isso porque as proposições matemáticas são o *próprio padrão de correção*, padrões de correção não podem eles mesmos ser passíveis de refutação e de falseabilidade, em função dos fatos²². Assim, afirma Gottschalk (2008) que para Wittgenstein,

Seguimos as proposições matemáticas “sem correr perigo de entrar em conflito com a experiência”, pois não são falseáveis por ela. Têm uma função normativa, e não descritiva. Não se referem a nada, apenas organizam a nossa experiência empírica (GOTTSCALK, 2008, p. 79, ênfase do autor).

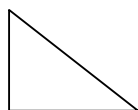
²² Wittgenstein (1999) compara as proposições matemáticas à uma régua e a experiência ao objeto a ser medido. A régua não é refutada e falseada pelo objeto medido. Semelhantemente, por serem normativas, as proposições matemáticas são o próprio *padrão de correção*, não sendo falseadas pela experiência, a qual as proposições foram tomadas como padrão de correção. Sua falseabilidade é interna ou nas palavras de Glock (1998, p.30) é fornecida pelas “provas”.

Diante disso, ainda que nós não encontremos mais quatro artigos escritos em um dos computadores dos autores desse artigo, o sistema normativo adotado (a proposição matemática $2+2=4$), não é refutado, por exemplo. Ele pode não ser mais útil para a normatização de nossa experiência e podemos nos valer de outro sistema, ou simplesmente, um dos artigos pode ter sido excluído ao acaso do computador.

Além disso, proposições matemáticas, por serem normativas permitem a transformação de proposições empíricas de diversas ordens (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2008; MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010). Por exemplo, a partir de nossa afirmação sobre a escrita de quatro artigos, podemos criar a proposição “escrevemos mais artigos esse ano do que no ano passado²³”.

Assim, as proposições matemáticas por serem *normativas*, ou seja, funcionarem como sistemas, ditam como uma “coisa deve ser” e não “como uma coisa é”, caso eu adote esse sistema (VILELA, 2007, p. 154). Em outras palavras, essas proposições dão a certas situações determinado formato, quando as adotamos. Essas situações passam a ser uma determinada forma, mas só assim se configuram, em virtude das proposições normativas adotadas.

Importante destacar que as situações, nas quais, as proposições matemáticas podem ser adotadas como sistemas para a organização e configuração são as mais diversas. Podemos por exemplo, constatar que as proposições matemáticas podem ser usadas como sistema normativo para a identificação do seguinte desenho:



Para a experiência de identificar essa figura, podemos usar as seguintes proposições matemáticas como sistema normativo: “polígonos são formas geométricas planas cujo contorno é fechado e formado por segmentos de reta que não se cruzam” (RIBEIRO, 2010, p. 186) e “triângulo é um polígono que tem três lados” (RIBEIRO, 2010, p. 211). A partir do uso dessas proposições como sistema normativo, podemos identificar a figura desenhada acima como um *triângulo*.

²³ Proposições empíricas podem vir a ser normativas, desde que passem a ser sistemas normativos para outras proposições empíricas. Se uma proposição é empírica ou normativa, isso depende de como ela é usada, ou seja, é um atributo do uso. Proposições empíricas são aquelas que podem ser refutadas pela experiência e que são *usadas* para denominar fatos e objetos no mundo.

Podemos identificar no estudo de Vilela (2007) a existência de outros sistemas normativos. A autora realizou um estudo que identifica, nas diferentes adjetivações referentes à matemática, apresentadas em algumas pesquisas (p.ex. a matemática da rua, dos agricultores, da escola, etc.), a existência de diferentes matemáticas, ou, em nossas palavras, diferentes sistemas matemáticos normativos, pelos quais, podemos organizar nossas experiências.

No contexto escolar, somente um sistema normativo matemático é abordado. Ele é denominado de matemática escolar²⁴. Entendemos que é sobre esse sistema que Sfard (2008) busca delimitar e apontar definições sobre matemática e a aprendizagem. Buscaremos, a seguir, analisar as delimitações da autora, a partir dos entendimentos de Wittgenstein, apresentados anteriormente sobre matemática.

2.1.4 A MATEMÁTICA COMO DISCURSO

Os estudos de Sfard (2008, p. 91, tradução nossa) se caracterizam por apresentarem uma definição de matemática escolar, como “uma forma de comunicação²⁵”. Com isso, a autora identifica e delimita a matemática escolar, com base nos padrões comunicacionais característicos de determinados grupos sociais.

A matemática instituída na disciplina de matemática no contexto escolar passa a ser analisada como uma produção discursiva específica que possui particularidades em relação a outras produções discursivas.

Sfard (2008) concebe a sociedade, como sendo formada por grupos de comunidades discursivas e as adota como base de análise. Em outras palavras, para a autora, a sociedade seria formada por pessoas cujas produções discursivas se assemelham ou se diferenciam, entre aquelas que produzem discursos sobre objetos matemáticos (p. ex. os professores de matemática), as que produzem discursos sobre plantas e animais (p. ex. os biólogos), as que produzem discursos sobre saúde humana (p. ex. os médicos), entre outras.

Não há nos estudos de Sfard (2007, 2008), a tradicional referência às áreas de produção do conhecimento, por exemplo, a Biologia, a Química e a Matemática, e sim, aos discursos que caracterizam determinado grupo social, ou seja, a natureza da produção

²⁴ Quando utilizarmos a nomenclatura escolar estamos nos referindo em particular a um conjunto de informações, historicamente, abordadas no contexto escolar com *status* de disciplina.

²⁵ A expressão “uma forma de comunicação” é a tradução literal da expressão “a form of communication”, citada por SFARD (2008, p. 129). Todavia, ela não deve ser entendida como a *forma* de comunicação ou a *maneira* como algo é comunicado, e sim, a temática pela qual uma determinada produção discursiva versa.

discursiva produzida por grupos sociais específicos, denominando essas diferentes produções discursivas de *discursos* da biologia, da matemática, da química, etc.

Sfard (2008) não define que tipo de produção discursiva é considerada *discurso*. Ela denomina discurso como “os diferentes tipos de *comunicação* que agregam alguns indivíduos e enquanto excluem alguns outros” (SFARD, 2008, p. 91, tradução nossa), todavia, não especifica se ela considera como *discurso*: os gestos, a fala, a escrita, as vestimentas dos indivíduos, a organização física de objetos em um espaço, etc., já que poderíamos dizer que todos esses itens comunicam algo.

Tendo em vista que Sfard (2008) classifica os discursos com base nos objetos e na natureza dos objetos pelos quais os discursos versam, compreendemos que sua definição de *discurso* limita-se a produção comunicativa oral e escrita²⁶, não incluindo, por exemplo, a organização física das pessoas em um determinado espaço ou ainda a vestimenta, haja vista esses últimos não poderem se constituir como discursos sobre objetos, quaisquer que sejam eles.

Ainda que Sfard (2008) destaque que os *discursos*, ao versarem sobre determinados objetos, não versam de maneira arbitrária, mas orientados por regras, a definição de *discurso* de Sfard (2008) é mais limitada e diferente do que a ideia de *jogos de linguagem* que Wittgenstein (1999) sugere.

A limitação e a diferença decorrem entre outras questões, do fato de que o conceito de *discurso* de Sfard (2008) não abrange muitos exemplos de modos de se comunicar, como representar um teatro e produzir determinados gestos, como os de surpresa ou os de tristeza.

Enquanto *jogos de linguagem* de Wittgenstein (1999) correspondem aos diversos usos da linguagem e ao conjunto de atividades que estão vinculadas a esses usos, a utilização que Sfard (2008) faz da palavra *discurso* sugere que ela se refere apenas à linguagem na forma escrita ou oral.

Isso nos aponta que o estudo de Sfard (2008) se detém na identificação e na busca de compreensão especificamente do que vem a ser a matemática que é ensinada em âmbito escolar. Isso justifica a ausência de referencial teórico para abordar questões referentes à organização espacial dos alunos e do professor, às vestimentas dos mesmos, à dinâmica escolar, como os horários, as regras de comportamento, etc.

Assim, Sfard (2008) apresenta uma perspectiva de matemática escolar, como sendo

²⁶ O fato de Sfard (2008) considerar o discurso matemático escolar como sendo a produção de narrativas matemáticas e essas, por sua vez, serem a *escrita* e o *fala* dos indivíduos sobre objetos matemáticos, reitera que a sua definição de discurso está limitada à produção discursiva oral e escrita.

um entre outros tipos de *discurso que existem na sociedade*. Um discurso cuja peculiaridade se institui em função da natureza dos objetos dos quais o referido discurso é tema.

Para Sfard (2008), o discurso matemático escolar versa sobre objetos matemáticos, que possuem como distinção, em relação a outros objetos, o fato de serem *objetos discursivos*. Os objetos discursivos existem somente nos discursos matemáticos *sobre* eles. Conforme citamos anteriormente, tais discursos são considerados em uma forma escrita e verbal, portanto, os objetos matemáticos também possuem somente essas configurações. São exemplos de objetos matemáticos: os números, os gráficos, as formas geométricas, etc.

Acrescentamos que para Sfard (2008), os objetos *discursivos* diferem dos *objetos não discursivos*, como por exemplo, as plantas e os animais, haja vista estes últimos possuírem existência independente dos discursos sobre eles. Concordamos que se utilizarmos a classificação de Sfard (2008), poderíamos dizer que há uma diferença de natureza entre um objeto *discursivo*, aquele que possui apenas forma discursiva, como o desenho de um triângulo e um objeto não discursivo, como uma mesa, por exemplo.

Porém, destacamos que os objetos como mesa, planta ou quaisquer objetos que permeiam nosso vocabulário discursivo, possuem *constituição* discursiva. Ou seja, é *pelo* discurso e *no* discurso que tais objetos, discursivos ou não, passaram a existir para nós. O que ainda não nos foi instituído pela linguagem, ainda não tem existência para nós. Portanto, todos os objetos possuem formação *discursiva*, nesse sentido, embora reconheçamos que os objetos existentes no mundo possuem diferentes formas de apresentação, diferentes natureza.

Mesmo que mantivéssemos essa peculiaridade para objetos matemáticos, ou seja, de terem natureza discursiva, essa peculiaridade não poderia ser adotada como o *é*, ou seja, como único elemento distintivo em relação a outros *discursos*. O *discurso* da língua portuguesa também é caracterizado por objetos discursivos, como o *aposto*, o *sujeito* e o *adjetivo*, etc., os quais possuem natureza discursiva e também só existem no discurso sobre eles.

Além disso, questionamos o fato de Sfard (2008) sugerir, a partir dessa classificação em objetos discursivos (objetos matemáticos) e objetos não discursivos, a existência de uma propriedade intrínseca ao objeto, uma propriedade independente do *uso*, que garantiria ao objeto, pertencer ou não a um determinado *discurso*.

Quando analisamos essa questão, a partir da ideia de *uso* indicada por Wittgenstein (1999), podemos afirmar que não é o objeto em si que apresenta um *status* de ser intrínseco ou não, de um determinado *discurso*. Ao invés disso, é o uso do objeto que poderíamos dizer, ser um *uso* característico do *discurso* da medicina ou do *discurso* matemático.

Portanto, um desenho de uma figura que, à luz da geometria euclidiana,

identificaríamos de *triângulo* em uma sala de matemática na escola, não garante ser esse objeto um objeto matemático. Isso porque essa figura pode ser usada em uma aula de música, com propósitos de mostrar a forma de um instrumento musical que possui a mesma denominação e como ele é tocado, e assim, não se configurar mais como um suposto objeto matemático.

Semelhantemente, um professor de matemática, pode utilizar um triângulo musical, um objeto não discursivo, nos termos de Sfard (2008) com propósito de identificar arestas, pontos, lados, ângulos e todo um conjunto de elementos e propósitos específicos de uma aula sobre proposições da geometria euclidiana.

Diante desse uso, esse objeto passaria, então, a ser um objeto matemático, pois seu *uso* ocorre com base no sistema geométrico adotado na disciplina de matemática abordada no contexto escolar, ainda que não seja um objeto *discursivo*, segundo a classificação de Sfard (2008).

Por conta desses aspectos, apontamos que o entendimento de matemática de Sfard (2008) é referencial. Ou seja, a autora busca identificar os discursos, a partir dos objetos *sobre* os quais eles versam, pressupondo ainda, a sua existência autônoma e peculiar. Já para Wittgenstein, os enunciados matemáticos não têm referentes, tais enunciados são sistemas que podem ser utilizados para organizarmos nossas experiências.

Nessa seção, analisamos as definições de Sfard (2008) relativas à matemática, a partir do embasamento filosófico de Wittgenstein, quanto à matemática como uso normativo da linguagem. Com base nessas análises, denominaremos matemática escolar de sistema matemático escolar. O uso da palavra sistema visa apontar o caráter normativo da matemática abordada no contexto escolar como *status* de disciplina.

A seguir, apresentaremos as definições de Sfard (2008) relativas à aprendizagem matemática, buscando analisá-las, em termos de aprendizagem do sistema normativo. Ou seja, um sistema que não tem referentes, cujo foco reside no uso de suas proposições.

2.1.5 A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA EM ÂMBITO ESCOLAR

O contexto escolar é concebido como um *espaço*, um *local* específico *de e para* aprendizagens. Essas aprendizagens se referem especificamente a conhecimentos intitulados de disciplinas, como Matemática, Física, Química, Biologia, História, Geografia, etc.

Em particular, a disciplina de Matemática abordada no contexto escolar é frequentemente, organizada em conteúdos. É a partir dessa compreensão de matemática que

Sfard (2008) apresenta um modo de conceber a aprendizagem matemática escolar.

Para Sfard (2008), aprender matemática está relacionado à proficiência em produzir discursos orais e escritos sobre objetos matemáticos. Por isso, podemos concluir que a autora apresenta uma perspectiva discursiva de aprendizagem matemática. A produção discursiva que resulta da aprendizagem não é aleatória, ela deve estar estritamente vinculada à maneira como essa produção está historicamente instituída e estipulada na nomenclatura de matemática escolar.

No entendimento de matemática de Sfard (2008), afirma-se que alguém aprendeu matemática, quando o indivíduo produz discursos à luz da produção discursiva historicamente estabelecida. Tendo em vista que o discurso historicamente estabelecido está *vivo* na produção discursiva dos participantes que já compõem o grupo social que produz discursos sobre objetos matemáticos, ou seja, nas pessoas que já discursam²⁷ o discurso matemático escolar, aprender matemática diz respeito a produzir discursos à luz da produção discursiva de alguns representantes desse discurso.

Disso decorre uma das questões condições importantes para a aprendizagem, segundo essa perspectiva, que é a existência de um discursante do discurso matemático escolar, aquele cujo discurso é considerado o discurso modelo para a produção discursiva dos aprendizes. Esse discursante é denominado de discursante experiente, por Sfard (2008).

Em âmbito escolar, o professor de matemática pode ser considerado tal discursante, mas não somente ele, pois os alunos se tornam discursantes experientes, quando produzem discursos à luz do discurso matemático escolar. Os alunos que ainda não produzem esses discursos são intitulados de discursantes iniciantes ou aprendizes.

Com base nessas ideias, podemos concluir que a aprendizagem sustentada por Sfard (2008) é analisada como um percurso, que se inicia em não sendo um discursante e culmina em tornar-se discursante de um determinado discurso, nesse caso, o discurso matemático escolar.

Conforme relatamos anteriormente, enquanto Sfard (2008) denota a matemática escolar de *discurso*, nós a concebemos de maneira diferente, denominando a matemática escolar de *sistema matemático*. Ou seja, como um conjunto de proposições que normatizam nossas experiências no mundo.

Diante disso, podemos dizer que os estudos de Sfard (2008) sugerem que os alunos na aprendizagem matemática escolar, utilizam outros sistemas matemáticos que não o

²⁷ Assim, *pessoas pertencem ao discurso*, por produzirem discursos que se identificam aos padrões discursivos de uma comunidade discursiva.

matemático escolar para normatizar as suas experiências. Segundo a autora, os alunos utilizam o discurso matemático do dia a dia, quando na aprendizagem do discurso matemático escolar.

Por conta disso, Sfard (2007, p. 576, tradução nossa) esclarece que a aprendizagem matemática corresponde a uma “mudança” de natureza discursiva por parte dos alunos. Uma mudança de adoção do discurso matemático do dia a dia para a adoção do discurso matemático escolar, ou em nossos termos, uma mudança entre sistemas matemáticos normativos. Nas palavras de Sfard (2007),

Porque a aprendizagem do discurso matemático escolar na escola é a modificação do discurso do dia a dia das crianças, aprendizagem pode ser vista como a *transformação* desse discurso aprendido espontaneamente ao invés de se buscar a construção de um novo (SFARD, 2007, p. 576, tradução nossa, grifo nosso).

Entendemos que o termo *mudança* embute a ideia de que apenas um único sistema matemático deve ser adotado pelos alunos, o matemático escolar, e de que esse sistema deve suplantear o sistema matemático que aluno utiliza em contextos não escolares.

Porém, apontamos que os alunos podem adotar o sistema matemático escolar no contexto escolar, mas não julgamos que esse sistema deve ou pode substituir outro sistema matemático, conforme as ideias de Sfard (2008) sugerem.

Isso porque entendemos que sistemas matemáticos distintos estão relacionados a *formas de vida* também distintas. Diante disso, julgamos que cada sistema é importante e válido no interior das *formas de vida*, as quais estão vinculados. Assim, os alunos podem e provavelmente, manterão a utilização do sistema do dia a dia no contexto e em situações que julguem que esse sistema é o mais útil.

Ainda que a mudança na produção discursiva sugerida por Sfard (2008) ocorra somente em âmbito contextual, ou seja, somente no contexto escolar, Sfard (2008) atribui à mudança discursiva como uma necessidade de realização pelos alunos, unicamente.

Com isso, a autora não aponta para a existência de situações, as quais sejam necessárias mudanças nas produções discursivas dos professores, porque eles se equivocaram ou porque os alunos apresentam uma produção discursiva mais útil para a compreensão de uma determinada temática.

Diante disso, argumentamos que a aprendizagem matemática em âmbito escolar possa se constituir como uma *delimitação discursiva*, em alternativa à *mudança discursiva*.

Delimitação discursiva, no sentido de que os alunos identifiquem a utilização de determinado *sistema*, em função das finalidades elaboradas no interior da *forma de vida*, a qual o sistema está vinculado. Dessa forma, os alunos podem utilizar um ou outro sistema, avaliando que *forma de vida* o uso de determinado sistema está relacionado.

Para Sfard (2008), a identificação da necessidade de mudança discursiva por parte dos alunos ocorre por meio de um conflito denominado de “conflito commognitivo”²⁸(SFARD, 2008, p. 276, tradução nossa). O conflito commognitivo é uma situação indicativa de que os alunos e os professores estão usando diferentes discursos, ou em nossos termos, diferentes sistemas.

Em termos de *delimitação discursiva*, podemos entender que a existência do conflito pode se constituir como um importante momento para o professor esclarecer as peculiaridades de diferentes sistemas e suas importâncias no interior das formas de vidas em que esses sistemas são utilizados.

Para nós, o sistema matemático escolar como sistema historicamente estabelecido e que possui *status* disciplinar, deve ser ensinado aos alunos pelos professores, como *um* dos sistemas possíveis, aquele que pode ser utilizado como sistema normativo para organização de algumas de suas experiências, mas que não é o único.

Entretanto, julgamos que a maneira como esse sistema é apresentado aos alunos pode conduzi-los a compreender que somente esse sistema é válido e deve ser usado para a organização de todas as experiências com as quais eles se deparem.

Para nós, Sfard (2008) reitera esse posicionamento de unicidade, pois destaca que os alunos devem adotar o sistema matemático como modelo e abandonar outros sistemas normativos que utilizem, em virtude de que o sistema matemático escolar é um sistema historicamente estabelecido e abordado, como padrão para o ensino da matemática por muito tempo, devendo haver razões, ainda que não explícitas, para essa escolha.

Nas palavras da autora, os alunos devem se convencer de que “se eles [o professor, o autor do livro didático, etc.] estão falando o modo como eles fazem, eles devem ter boas razões. Além disso, eles já têm feito isso por um longo tempo até agora” (SFARD, 2008, p. 287, tradução nossa).

Sobre essa questão, temos um entendimento de que o sistema matemático escolar

²⁸ A palavra *commognitivo* é uma tradução do neologismo “commognitive” criado por Sfard (2008, p. 83). Esse neologismo corresponde à junção das palavras comunicação e cognição, escritas, originalmente, em língua inglesa. O termo commognitive foi criado pela autora para evidenciar o seu entendimento de que os processos cognitivos são processos comunicacionais. Entre esses processos cognitivos, por exemplo, a autora define a atividade de pensar, em termos comunicacionais, como sendo “uma comunicação consigo mesmo” (SFARD, 2008, p. 82, tradução nossa)

deve ser abordado no contexto escolar, mas não como o único sistema matemático existente, como já sinalizamos, e nem isento de análise crítica, conforme as ideias de Sfard (2008) podem conduzir a concluir.

Ainda que Sfard (2008) sugira que os alunos devam se alinhar ao sistema matemático escolar acriticamente, pois devem simplesmente compreender que ele é adotado como padrão para a organização de experiências, em âmbito escolar, por longo tempo, a autora reconhece que esse alinhamento dos alunos ao sistema matemático escolar é uma questão de “relação de poder” (SFARD, 2008, p. 283, tradução nossa).

Sfard (2008) aponta que essa relação de poder é decorrente da liderança do discurso do professor como discurso modelo, o qual os alunos devem seguir, haja vista o discurso do professor ser um discurso peculiar ao sistema matemático escolar. A autora destaca que essa liderança é historicamente incontestável e predeterminada.

Todavia, julgamos que a relação de poder relativa ao fato de os alunos deverem seguir o discurso matemático do professor como *discurso líder*, ou ainda como discurso modelo, é uma relação instituída entre os discursos, ou ainda, em nossos termos, entre os sistemas matemáticos normativos.

O sistema matemático escolar é adotado, *por longo tempo*, como sistema padrão em aulas de matemática, ou seja, como o sistema normativo, pelo qual, diversas experiências devem ser organizadas. Excluindo assim, a possibilidade de outros sistemas matemáticos normativos serem utilizados. Por isso, justificamos que a liderança do discurso do professor é uma liderança exercida, implicitamente, pelo sistema que o discurso do professor é orientado.

Em uma perspectiva wittgensteiniana, aprender algo pode ser entendido como aprender a *ver* (GOTTSCHALK, 2008; MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010; MORENO, 2005). Com base nessa ideia, podemos dizer que a aprendizagem matemática, a aprendizagem do sistema matemático escolar, proporciona uma maneira de *ver* nossas experiências, de organizar nossas experiências de determinado modo.

No contexto escolar, os alunos possuem a oportunidade de aprender a organizar determinadas experiências de *um* modo particular, aquele proporcionado pelo sistema matemático escolar. Aponta-nos Sfard (2008) que essa aprendizagem envolve a adoção única desse sistema e do alinhamento dos alunos a ele.

Na seção seguinte, apresentaremos uma maneira de compreender modelagem, com base nas ideias de matemática como sistema normativo.

2.1.6 MODELAGEM: UMA MANEIRA DE ORGANIZAR SITUAÇÕES EMPÍRICAS

Em diversas fontes de referência, como livros, artigos, dissertações e teses sobre modelagem na perspectiva da Educação Matemática, o termo modelagem é frequentemente usado, para a designação da elaboração, investigação e/ou resolução de problemas denominados de problemas reais, utilizando conteúdos matemáticos escolares (ALMEIDA; ARAÚJO; BISOGNIN, 2011; BARBOSA; CALDEIRA; ARAÚJO, 2007; KAISER et al., 2011; SILVEIRA, 2007).

Algumas pesquisas explicitam que essa realização da modelagem em âmbito escolar tem inspiração direta em uma prática peculiar aos matemáticos aplicados (BIEMBENGUT; HEIN; DOROW, 2007). Tal prática consiste no uso de conceitos matemáticos em geral, ou seja, conceitos da álgebra, da geometria, do cálculo diferencial, etc., na resolução de problemas reais.

Há também como característica, o fato de a resolução desses problemas ser desenvolvida por meio de etapas. Partes dessas etapas, de maneira geral, são nomeadas de matematização, interpretação e validação (BLUM; FERRI, 2009; GALBRAITH; STILLMAN, 2006; MAAB, 2006).

Com base na referência à designação de modelagem advinda dessa prática, passou-se a denominar de modelagem a resolução de problemas nos moldes citados acima, quando o contexto de desenvolvimento é o contexto escolar.

Todavia, a partir de algumas pesquisas que tiveram como objetivo analisar como esse desenvolvimento é realizado pelos alunos (BLUM; FERRI, 2009; FERRI, 2006), iniciou-se a constatação de que esse desenvolvimento no contexto escolar destoa da prática de modelagem originalmente adotada por pesquisadores da área da Matemática Aplicada.

Isso porque no contexto escolar, os alunos não seguem linearmente as etapas da realização da modelagem, aponta Blum e Ferri (2009). Já Burak (2004), apresenta outras etapas relativas à implementação da modelagem em âmbito escolar. Além disso, em âmbito escolar, há variáveis intrínsecas a esse contexto, por exemplo, conteúdos escolares pré-estabelecidos a ser ensinados e tempo escolar fixo e compartimentalizado que dão a implementação da modelagem no contexto escolar, uma configuração própria (BARBOSA, 2001; KLUBER; BURAK, 2009).

Algumas pesquisas, reconhecendo essa peculiaridade da implementação da modelagem em âmbito escolar, como a de Araújo (2007) e a de Velda e Almeida (2010),

buscaram identificar nas principais perspectivas de modelagem existentes que entendimento de matemática, implicitamente, elas embutem, ou seja, se tal peculiaridade era preservada.

Como resultado, essas pesquisas identificaram que as principais perspectivas de modelagem sustentam compreensões de matemática que são inspiradas, originalmente, no entendimento de matemática implícito na definição de modelagem de pesquisas relativas à matemática aplicada.

Isso porque predominantemente, na literatura em modelagem na perspectiva da Educação Matemática, constatamos a identificação da modelagem como o uso da *matemática* para resolver problemas da *realidade* (BLUM; FERRI, 2009; BURAK; KLUBER, 2011; KAISER; SCHWARZ, 2010; NISS, 2010) ou problemas com referência na realidade (BARBOSA, 2006).

Ambas são identificações diretamente inspiradas, pelo campo de pesquisa em matemática aplicada. Isso porque originalmente, nesse campo, a realização da modelagem é predominantemente ilustrada como um conjunto de etapas que iniciam com a existência de um problema *real*, cujo uso de conceitos matemáticos resulta na representação *matemática* do problema *real*.

Podemos concluir da diferenciação entre matemática e realidade, basicamente, três premissas. A primeira é a de que os problemas abordados em modelagem não são matemáticos. Outra é que a matemática tem a potencialidade de resolvê-los. E por fim, que a modelagem teria a função de realizar a união entre a realidade e a matemática.

Para nós, essas questões sugerem um entendimento descritivo de matemática, pois nesse caso, a matemática teria a função de *descrever* a realidade, fatos e situações, haja vista não pertencer à realidade. Seu caráter seria universal e simbólico, cujo objetivo seria o de expressar simbolicamente essa *realidade*, da mesma forma e em qualquer contexto.

A compreensão de matemática de Wittgenstein nos permite ampliar esse entendimento, oferecendo mais uma maneira de delimitar essa questão em modelagem. Como vimos, para o filósofo, a matemática não descreve a realidade, ela tem caráter normativo, o que significa considerar que a matemática é utilizada como uma maneira de organizar nossas experiências.

Partiremos de um exemplo para delimitar o papel da matemática na abordagem dos problemas em modelagem à luz da compreensão de matemática como sistema normativo, e, dessa maneira, indicar uma possível delimitação para o *uso* da palavra modelagem.

O exemplo adotado foi extraído de Niss (2010). O autor apresenta um problema relativo à identificação da altura que se deve encher de vinho uma taça para que ela seja

preenchida em dois terços de seu volume total.

Tendo em vista que, em âmbito escolar, a modelagem adota como sistema matemático normativo, o sistema matemático escolar, um dos primeiros encaminhamentos para a matematização do referido problema é a identificação de que proposições matemáticas normativas podem ser utilizadas para a organização dessa experiência.

Podemos dizer que Niss (2010) adotou as proposições geométricas como sistema normativo, particularmente aquelas relativas à figura geométrica cone, mas em sua forma invertida, pois assim, essa figura se assemelhava à forma da taça de vinho. Assim, realizou-se os cálculos relativos ao volume do cone, à identificação de sua altura, de sua área lateral, etc.

Por fim, Niss (2010) utilizou os cálculos encontrados relativos ao *cone*, para concluir, que a *taça de vinho* seria preenchida em dois terços de volume de seu total, se fosse inserido vinho a uma altura que corresponderia a 0,79 da altura total da taça.

O sistema matemático escolar foi utilizado como sistema normativo, haja vista ser a partir desse sistema que Niss (2010) identificou semelhanças entre a figura geométrica cone e a taça de vinho. O sistema matemático permitiu Niss (2010) organizar essa experiência de um determinado modo, o modo possibilitado pelo sistema.

Essa experiência poderia ser organizada de maneira diferente. Poderíamos não usar o sistema matemático escolar e identificar a altura de vinho a ser inserido em uma taça para que a taça fosse preenchida em dois terços de seu volume total, valendo-se, para isso, somente de nossa percepção visual.

Nessa caracterização da matematização de problemas na modelagem, a partir do entendimento de matemática escolar, como sistema normativo, ressaltamos que esses problemas possuem a sua peculiaridade. Dizemos que em modelagem, o sistema normativo matemático é utilizado para matematizar *situações de natureza empírica*. Ou seja, situações que podem ser refutadas e falseadas, a partir da análise dos fatos.

Com isso, apontamos que podemos conferir, por meio dos fatos, observando se a taça de vinho está preenchida em dois terços de sua capacidade, por exemplo. Ou ainda, podemos verificar se os cálculos referentes aos gastos com gasolina correspondem a esses gastos, no exemplo citado por Blum e Ferri (2009), ou se a área irrigada diz respeito aos resultados matemáticos encontrados sobre a sua otimização, no problema citado por Kaiser e Schwarz (2010).

Ressaltamos, porém, que a matemática não é refutada quando os cálculos matemáticos encontrados não correspondem ao que ocorre com os fatos. Não se reelabora

uma nova fórmula para os cálculos do volume do cone²⁹, nem se modifica a figura geométrica que possui esse nome, por exemplo.

A busca por uma matematização cujos resultados possam ser delimitados como os mais fiés possíveis, em relação aos fatos, faz com que se busque por outras proposições matemáticas normativas, por exemplo, por outras proposições geométricas ou algébricas, ou se acrescentem outras variáveis às proposições adotadas. Ou seja, essa procura não gera mudanças nas proposições normativas propriamente.

Além disso, destacamos que a compreensão de matemática como sistema normativo pode nos auxiliar a explicar o fato de que os resultados matemáticos encontrados na matematização de problemas na modelagem são denominados de *aproximações* da realidade (ARAÚJO, 2007; BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; CIFUENTES; NEGRELLI, 2011).

Podemos também, compreender que a matematização de problemas em modelagem não *representa* fielmente os fatos, porque a matemática não é descritiva da realidade, não tem uma correspondência de um para um ela. Como sistema normativo, a matematização corresponde a um modo de *ver* as situações empíricas e, a depender das proposições matemáticas adotadas, esse modo de *ver* se modifica.

Assim, os diferentes resultados matemáticos possíveis de serem encontrados relativos à matematização de um problema em modelagem, podem ser compreendidos como diferentes maneiras de organizar experiências de natureza empírica.

Diante dessas ponderações, entendemos que modelagem pode ser caracterizada pela utilização do sistema matemático escolar na organização de situações empíricas. Organização no sentido de que essas situações passam a ser configuradas, moldadas de determinada maneira.

O uso do próprio sistema já é responsável por essas situações serem organizadas de forma específica. Assim, resumidamente, podemos também, designar modelagem como *uma* maneira de organizar situações empíricas. *Uma*, porque é a *maneira* proporcionada pela adoção do sistema matemático escolar como sistema normativo.

Além disso, enfatizamos que essa designação de modelagem deve ser entendida como um dos *usos* possíveis que pode ser atribuído à palavra modelagem, na perspectiva da Educação Matemática.

²⁹ A menos que a fórmula do volume do cone adotada não seja a fórmula peculiar ao sistema matemático escolar. Nesse caso, a fórmula do cone permanece não sendo refutada pela experiência, haja vista esse exemplo, tratar-se de um equívoco na adoção da fórmula.

Na seção seguinte, iremos apresentar algumas implicações da compreensão de matemática e de modelagem para a aprendizagem matemática na modelagem.

2.1.7 IMPLICAÇÕES PARA A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM

Neste artigo, a modelagem foi concebida como uma maneira de organizar situações empíricas. Uma organização realizada, a partir da adoção do sistema matemático escolar como sistema normativo.

Nessa direção, podemos dizer que a aprendizagem matemática que se configura na modelagem é a aprendizagem de um sistema matemático escolar, no que se refere à possibilidade de organizar situações de natureza empírica.

Um dos objetivos da implementação da modelagem em âmbito escolar é possibilitar que os alunos utilizem os conteúdos matemáticos escolares na resolução de problemas em ambientes extraescolares, como seus ambientes de trabalho, em situações cotidianas externas à escola, em seus lares, etc. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003; KAISER et al., 2011; KAISER; SCHWARZ, 2010), ou seja, que aprendam a utilizar o sistema matemático escolar para organização das situações empíricas que se deparem nos mais diversos contextos.

Assim, a aprendizagem matemática na modelagem oferece *uma* específica maneira de abordar esses problemas, a maneira gerada pelo sistema matemático escolar. Em alguns contextos externos ao contexto escolar, o sistema matemático escolar é o sistema adotado para a resolução de certos problemas, pois esse sistema tem *status* de válido e útil em contextos não escolares, também. É o caso, por exemplo, de cálculos realizados para compras a prazo no ambiente comercial, de cálculos realizados para se obter os índices de preços dos valores da cesta básica e até nos cálculos do quociente eleitoral realizado para a determinação de quantos candidatos por partido irão ocupar as vagas da esfera política legislativa.

Todavia, devemos considerar que alguns contextos podem ter o seu próprio sistema normativo para organizar as situações empíricas que lhes são peculiares. Ou seja, certas situações podem estar vinculadas à *forma de vida* distinta na qual o sistema matemático escolar está vinculado. Os estudos sobre a matemática da rua, dos agricultores, dos carpinteiros e etc., são exemplos de outros sistemas utilizados em ambientes não escolares.

Inicialmente, essa questão pode destituir a ideia de que a aprendizagem matemática na modelagem propicia aos alunos que resolvam, usando o sistema matemático escolar, situações empíricas que se deparem em todo e em qualquer contexto, haja vista, existem

contextos regidos por *formas de vida* diferentes daquela do contexto escolar.

Diante dessa questão, entendemos que a aprendizagem matemática na modelagem pode se constituir como um cenário para *delimitação discursiva*, no sentido de explicitar e delimitar que sistema normativo é adotado como modelo em determinada *forma de vida*.

Os estudos de Sfard (2007, 2008) sugerem que outros sistemas matemáticos se fazem presentes na aprendizagem do sistema matemático escolar e algo precisa ser realizado com eles, para que a aprendizagem do sistema matemático escolar se estabeleça. Em sua opinião, esses sistemas não escolares devem ser abandonados no contexto escolar, necessitando que os alunos, para isso, *mudem* os seus discursos.

Contudo, em termos de *delimitação discursiva* não apontamos que esses sistemas não devam ser abandonados, no sentido de serem substituídos pelo sistema matemático escolar, e sim, abordados no que se referem às suas peculiares a determinadas *formas de vida*.

Entretanto, nos questionamos como essas delimitações discursivas podem se fazer presentes na abordagem matemática de situações empíricas na modelagem implementada em âmbito escolar. Apenas delimitaremos que certos sistemas não são peculiares ao contexto matemático escolar, portanto, as situações empíricas devem ser abordadas utilizando o sistema matemático escolar? Ou iremos ampliar os sistemas pelos quais essas situações serão abordadas e com isso, expandir a própria definição de modelagem?

Ainda se mantivermos a aprendizagem do sistema matemático escolar como único sistema a ser adotado para a organização de situações empíricas nos perguntamos: que aprendizagem matemática se configura na modelagem? Ela preserva semelhanças com a maneira que esse sistema matemático é abordado em aulas de matemática não pautadas em modelagem? Os alunos assumem os discursos dos professores como discurso líder, conforme aponta Sfard (2008)? É a partir das sugestões dos professores que os alunos identificarão que proposições matemáticas devem ser utilizadas na organização das situações empíricas, conforme sugere Sfard (2008), em relação à aprendizagem do discurso matemático escolar?

Sustentamos nesse artigo que a matemática é um sistema normativo e, em modelagem, esse sistema é adotado para organização de situações empíricas. Dessa forma, a aprendizagem do sistema matemático se dará em função das situações empíricas. Sobre isso, nos questionamos: por que determinadas proposições matemáticas são escolhidas para a organização dessas situações em detrimento de outras? Por exemplo, por que se escolhe a figura geométrica cone e não, a figura geométrica *cilindro* para comporem o sistema normativo da experiência com a taça de vinho?

Essas e outras questões aqui relatadas foram temáticas suscitadas, quando na análise

da modelagem e da aprendizagem matemática na modelagem, a partir das considerações filosóficas de Ludwig Wittgenstein e teóricas de Anna Sfard.

Nessa direção, objetivamos que as considerações aqui, elaboradas possam contribuir em termos teóricos e filosóficos para *um* possível entendimento sobre a aprendizagem matemática na modelagem.

Agradecimentos

Agradecemos aos participantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Bahia, Ana Virgínia de Almeida, Jamille Vilas Boas, Maria Raquel Queiroz, Thaine Santana, pelos comentários feitos à versão prévia desse artigo.

Pela mesma razão, agradecemos, aos professores participantes do processo de qualificação doutoral, os professores Adilson Oliveira do Espírito Santo, Antônio Miguel, Aurino Ribeiro Filho e professor José Luís de Paula Barros Silva.

Também, agradecemos, em particular, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro à pesquisa, a qual esse artigo integra.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO; J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Edue, 2011, p.65-81.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, 17-32.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores*. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 161-174.

BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p.

17-32.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, M. S.; SCHMITT, A. L. F. Modelagem matemática no ensino fundamental: um meio de despertar no estudante o interesse em aprender matemática. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: SBEM, 2010. 1. CD-ROM.

BIEMBENGUT, S.; HEIN, H.; DOROW. Mapeamento das pesquisas sobre modelagem matemática: análise das dissertações e teses. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto. *Anais...* Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto e Universidade Federal de Belo Horizonte, 2007. 1 CD-ROM

BLUM, W.; FERRI, R. Mathematical modeling: can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, p. 45-58, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *PCN: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2004, Londrina. *Anais...* Paraná: UEL, 2004. 1. CD-ROM.

BURAK, D.; KLUBER, T. E. Encaminhamentos didáticos-pedagógicos no contexto de uma atividade de modelagem matemática para a educação básica. In.: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p. 65-81.

CIFUENTES, C. J.; NEGRELLI, L. G. O processo de modelagem e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In.: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p. 123-140.

FERREIRA, D. H. L.; WODEWOTZKI, M. L. L. Questões ambientais e modelagem matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 115-132.

FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

FERRUZI, E. C.; ALMEIDA, M. W. L. O contexto da modelagem matemática: possibilidade de construção do conhecimento. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2009, Londrina,

Anais..., Paraná, 2009.1. CD-ROM.

GALBRAITH, P; STILLMAN, G. A Framework for identifying student Blockages during transitions in the modelling Process, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v.38, p. 143- 162, 2006.

GERMANY.Federal Ministry of Education and Research. *The development of Nacional Educacional Standarts*. 2004. Disponível em: < [http.: //www the_development_of_national_educationel_standarts.pdf.bmbf.de/pub/](http://www.the_development_of_national_educationel_standarts.pdf.bmbf.de/pub/) >. Acesso em: 16 jun. 2011.

GLOCK, H.J. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. *Cadernos de História e Filosofia das Ciências*, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul- dez, 2004a.

GOTTSCHALK, C. M. C. Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, São Paulo, *Anais...*, 2004b.1.CD ROM.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Cadernos Cedex*, Campinas, v. 28,n. 74, p. 75-96, 2008.

JESUS, W.P. de J. *Educação Matemática e filosofias sociais da Matemática: um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest*. 2002. 212 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

KAISER, G. et al. (Org). *Trends in teaching and learning of mathematical modeling ICTMA 14*. New York: Springer, 2011.

KAISER, G; SCHWARZ, B. Authentic modeling problems in mathematics education- examples and experiences. *Journal Mathematics Didatik*, v. 31, p. 51- 76, 2010.

KLUBER, T. E; BURAK, D. Bases epistemológicas e implicações para as práticas de modelagem matemática na sala de aula. In.: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília, *Anais...*, Brasília, 2009. 1. CD-ROM

LESH, R; FENNEWALD,T. Introduction to part I modeling: What is it? Why do it?. In: LEISS et al (Org.). *Modeling student mathematical modeling competences: 13 ICTMA*. New York: Springer, 2010. p. 5-10.

MAAß, K. What are modelling competencies. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

MAASS, K. modeling in class and the development of beliefs about the usefulness of mathematics. In: LESS et al. (Orgs.). *Modeling student mathematical modeling competences: 13 ICTMA*. New York: Springer, 2010. p. 409-420.

MIGUEL, A. Percursos indisciplinados na atividade de pesquisa em história (da educação matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos. *Bolema*, v. 23, n.35a, p. 1- 57, 2010.

MIGUEL, A; VILELA, D. S; MOURA, A. R. L. Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké*, v. 18, p.129- 203, 2010.

MORENO, A. Descrição fenomenológica e descrição gramatical - idéias para uma pragmática filosófica. *Revista Olhar*, v. 7, n. 7, p. 94-139, 2003.

MORENO, A. *Os labirintos da linguagem*: ensaio introdutório. São Paulo: Moderna, 2005.

NCTM. National Council of teachers of mathematics. *Principles and Standards of School Mathematics*. 2000. Disponível em : < <http://standards.nctm.org/document/index.htm>>. Acesso em: 16 jun. 2011.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. In: LESS et al. (Org). *Modeling student mathematical modeling competences: 13 ICTMA*. New York: Springer, 2010. p. 43-59.

RIBEIRO, J. *Matemática*: ensino fundamental. São Paulo: Scipione, 2010.

SFARD. A. When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint . *The Journal of the learning Sciences*, v. 16, n.4, p. 567- 615, 2007.

SFARD. A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press, 2008.

SILVA. D. K. A transposição didática de conceitos de geometria espacial em situações didáticas de modelagem matemática. In.: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília, *Anais...*, Brasília, 2009. 1. CD-ROM.

SILVEIRA, E. *Modelagem Matemática em Educação no Brasil*: entendendo o universo de teses e dissertações. 197 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2007.

SWAN,M. et al. The roles of modeling in learning mathematics. . In: BLUM, et. al., *ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education – discussion document*, 2007. p. 275-284.

VELEDA, G. G; ALMEIDA, L.M. W de. A caracterização da realidade em trabalhos de modelagem matemática. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010, 1. CD-ROM.

VILELA. D. S. *Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática*. 247f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2007.

VILELA, D. S. Elementos para uma compreensão das matemáticas como práticas sociais. In.: MIORIM, M.A; VILELA, D. S. (Org.). *História, filosofia e educação matemática: práticas de pesquisa*. Campinas: Editora Alinea, 2010, p. 89-125.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999. (Coleção os pensadores).

ARTIGO 2

A APRENDIZAGEM DE REGRAS DO SISTEMA MATEMÁTICO ESCOLAR NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo

Este artigo objetiva identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática, na perspectiva da Educação Matemática. Modelagem matemática pode ser compreendida, de maneira geral, como abordagem de situações-problema reais, utilizando conteúdos matemáticos escolares. Analisamos essa temática a partir da compreensão de matemática como sistema *normativo regido por regras*. Uma compreensão elaborada pelas análises das delimitações filosóficas de Ludwig Wittgenstein e dos entendimentos teóricos de Anna Sfard. As ideias do referido filósofo nos auxiliam a compreender o papel da matemática na abordagem de situações reais adotadas em modelagem. Os conceitos teóricos de Anna Sfard nos auxiliam na tematização da aprendizagem matemática na modelagem. Os discursos produzidos por um grupo de alunos e uma professora, durante a implementação da modelagem, foram adotados como material empírico para análise da temática e obtidos por meio do procedimento de *observação*. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, cujos resultados apontam que a aprendizagem matemática na modelagem corresponde à aprendizagem de regras, e a escolha dessas regras molda a maneira pela qual a situação-problema é analisada. Também, apontamos que essa aprendizagem envolve um conjunto de estratégias elaboradas pelo professor com vistas à abordagem da situação-problema pelos alunos, e apresentamos como esses configuram tais estratégias em seus discursos.

Palavras- Chave: Modelagem Matemática. Regras. Aprendizagem Matemática. Sistema matemático.

THE LEARNING OF RULES OF MATHEMATICS SYSTEM IN MATHEMATICAL MODELLING

Abstract

This article aims at the identification of what mathematics learning is constituted in mathematical modelling in the perspective of mathematics education. Mathematical modelling can be understood, in a general sense, as the approach for the real solving problem situations, through the use of school mathematics contents. This issue has been analyzed based on the understanding of mathematics as a *normative rule governed system*. This view of mathematics is based on Ludwig Wittgenstein's analysis of philosophical delimitations as well as Anna Sfard's theoretical understanding about it. Wittgenstein's ideas have helped us to understand the mathematics role in the real situations adopted in mathematical modelling. Anna Sfard's theoretical concepts have helped to substantiate the understanding on mathematics learning in the modelling. The discourses produced by a group of students and a teacher during the implementation of the modelling have been adopted as empirical material for the analysis of the theme. These data have been collected through observation method. This is a qualitative study, whose results identify that mathematics learning in the modelling correspond to the learning of rules and the choice of those rules govern the way the problem-solving situation is analyzed. We have also pointed out that this learning involves a set of strategies which are done by teacher to help students in the solving problem approach, as well as how those strategies configure the student's discourses.

Keywords: Mathematical Modelling. Rules. Mathematics Learning. Mathematics System.

2.2.1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática³⁰ em âmbito educacional pode ser definida, de maneira geral, como a abordagem de situações-problema da realidade, utilizando os conteúdos matemáticos escolares. Como resultado, tais situações são ditas de *matematicamente* compreendidas. Situações sobre a variação da concentração de álcool no sangue durante um determinado tempo (SOUZA; BARBOSA, 2009), a determinação do melhor período para a pesca de um peixe, com base em seu peso (BASSANEZI, 2002), são exemplos de situações, cujas abordagens, em âmbito escolar, podem ser denominadas de modelagem.

No Brasil, principalmente a partir da década de 90, muitas pesquisas e relatos de experiências começaram a destacar resultados a respeito das implicações que o *uso* da modelagem pode gerar nos processos de ensino e aprendizagem da matemática escolar e acadêmica. Alguns autores, por exemplo, apontaram que a modelagem pode motivar os alunos a aprenderem os conteúdos matemáticos escolares (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT; HEIN, 2003), permitindo-lhes que percebam a importância desses conteúdos matemáticos no contexto escolar, para resolução de problemas oriundos de outros contextos, como de seus ambientes de trabalho (BLUM et al., 2007; KAISER; SCHWARZ, 2010). Outras pesquisas destacaram que a modelagem tem o potencial de suscitar discussões sobre argumentos baseados em matemática presentes em assertivas sobre diversas questões de cunho político-social (BARBOSA, 2003), entre outros resultados de pesquisas.

Essas e outras questões referentes aos resultados que a modelagem pode suscitar na aprendizagem de matemática escolar têm consolidado a modelagem como um campo de pesquisa na área da Educação Matemática. Em Barbosa, Cadeira e Araújo (2007) e Araújo (2009), já podemos identificar estudos no campo de modelagem, para além do foco motivacional que sugerem ações para a implementação da modelagem em contexto escolar, apontando em particular, a necessidade de sua inclusão na formação profissional do professor.

A aprendizagem matemática é tema de algumas pesquisas já realizadas em modelagem, principalmente, no que se refere à busca da identificação de aprendizagem pelos alunos, com base em teorias de aprendizagem específicas, por exemplo, as pesquisas de Chaves (2005), Smith (2008), Vertuan e Almeida (2007), Ferruzi e Almeida (2009) e a pesquisa de Bisognin e Bisognin (2001)

Há, também, pesquisas que apontam a ocorrência da aprendizagem matemática, a

³⁰ Por vezes, escreveremos o termo modelagem em substituição à expressão modelagem matemática.

partir do desenvolvimento da modelagem, como as pesquisas de Biembengut e Hein (2003), Ferreira e Wodewotzi (2007), Sant’Ana (2007), Swan et al. (2007), Santos e Bisognin (2007) e Souza e Rego (20010). Contudo, as mesmas não tiveram como foco tematizar a aprendizagem matemática, em particular.

O presente artigo visa contribuir com as pesquisas que abordam a aprendizagem matemática na modelagem, apresentando um enfoque distinto. Ele tem como objetivo, *identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática*. Em outras palavras, compreender que aprendizagem matemática a modelagem gera, forma ou constitui. Nesse sentido, o verbo constituir está sendo adotado em seu sentido etimológico, de gerar e de formar.

Este estudo possui como fundamentação teórica as definições elaboradas por Anna Sfard. Uma pesquisadora, em particular da área da psicologia em educação matemática, cujos estudos aqui adotados, apresentam a aprendizagem matemática em termos de aprendizagem de *regras*. A autora relata essas regras, e as analisamos para a compreensão da aprendizagem matemática na modelagem.

Além disso, esse estudo é embasado em alguns entendimentos elaborados pelo filósofo Ludwig Wittgenstein. As ideias do filósofo referidas neste artigo sustentam uma compreensão específica de linguagem e de matemática, e essas, por sua vez, fundamentam nosso entendimento de modelagem.

Desenvolvemos um estudo de natureza qualitativa, no qual analisamos os discursos de uma professora e de um grupo de alunos, escolhendo a observação como procedimento de obtenção de dados empíricos.

De início, apresentaremos a ideia de Ludwig Wittgenstein sobre linguagem e posteriormente, tomamos esse entendimento como base para a delimitação de matemática e de modelagem.

2.2.2 O PAPEL DA LINGUAGEM EM WITTGENSTEIN

As ideias de Wittgenstein (1999) sobre matemática advêm da delimitação que o filósofo assume quanto ao papel da linguagem na constituição dos *sentidos*. Constituição de *sentidos* deve ser entendida pela maneira como estruturamos nossas experiências no mundo. Por exemplo, instituímos *na* e *pela* linguagem, que palavras usar para a indicação de sensações no corpo; que expressões faciais designam alegria ou raiva; quem denominaremos de mãe, pai ou filhos; o que denominaremos de artigo científico, entre outros exemplos.

Para o filósofo, a linguagem é constituinte de todos os *sentidos* que atribuímos às nossas experiências. Por conta disso, podemos dizer que o que faz *sentido* dizer, fazer, sentir, nominar, etc., são *na* e *pela* linguagem constituídos. Linguagem, nesse contexto, possui significação ampla, não apenas relacionada aos atos da fala e da escrita, mas, também, aos movimentos corporais imbricados, ou não, com os atos da fala e da escrita.

A compreensão de Wittgenstein (1999) a respeito do papel da linguagem era distinta das ideias predominantemente vigentes no final do século XX. Nesse período, predominavam entendimentos de que a linguagem era apenas um *meio*, um *canal* de expressão para a constituição dos *sentidos*, pois essa constituição, por sua vez, possuía formação em outros domínios para além da linguagem. Tal entendimento de linguagem é frequentemente denominado de compreensão referencial de linguagem.

Para Wittgenstein (1999), devemos nos deter na análise dos usos efetivos da linguagem e mediante essa análise, compreendermos como os *sentidos* são constituídos. Um dos *usos* da linguagem é nominar objetos³¹. Mas, não é o único. Usamos a linguagem para diferentes fins. Dar e obedecer ordens, relatar um acontecimento, ou ainda, representar uma peça de um teatro são exemplos desses outros fins que realizamos com a linguagem (WITTGENSTEIN, 1999, §23).

Embora Wittgenstein (1999) apresente delimitações amplas sobre o uso da linguagem, o filósofo direciona grande parte de suas considerações sobre a noção de significação das palavras, ou seja, sobre parte do universo que constitui o uso da linguagem.

Se nos detivéssemos sobre os usos das palavras, identificaríamos, afirma Wittgenstein (1999), que a significação das palavras não repousa sob objetos os quais as palavras nomeiam. Por exemplo, utilizamos a palavra cor para designar a tonalidade de um objeto e não seus sons ou suas formas, ou seja, não dizemos que uma cor tem um som ou tem um cheiro.

O fato de não fazermos as afirmações, a cor do som ou a cor do cheiro não decorre de uma possível impossibilidade sensorio-física, isso acontece, porque não instituímos esses

³¹ O ato de nominar objetos não deve ser visto como uma reinserção da compreensão referencial de linguagem. Wittgenstein (1999) apresenta essa questão, como um dos usos possíveis da linguagem, o que não implica, por exemplo, afirmarmos que o significado da palavra está no objeto que a palavra representa (uma compreensão referencial de linguagem). Nesse sentido, Wittgenstein (1999, §40) nos sinaliza, “[...]confunde-se a significação de um nome com o portador do nome. Se o Sr. N.N morre, diz-se que morre o portador do nome, e não que morre a significação do nome”. Essa ideia pode ser ampliada para o entendimento de toda a palavra usada denominar objetos. A significação das mesmas não repousa sobre os objetos, e sim, no uso que a palavra possui na práxis linguística.

usos à palavra *cor*³². Diante disso, o que Wittgenstein (1999) nos sugere que analisemos a significação das palavras a partir do uso das mesmas, pois é no uso que reside a sua significação.

Wittgenstein (1999, §7, 23, 66) utiliza a expressão “jogos de linguagem” para indicar entre outras questões, que as palavras possuem diferentes significações. Por exemplo, estendemos o uso da palavra *cor* para a designação da tonalidade de objetos para denominarmos, a cor do céu, ou ainda, a cor dos olhos, etc.

O uso do termo *jogos de linguagem* também visa destacar que os usos que fazem sentido atribuímos às palavras, dependem da *forma de vida* em que os jogos de linguagem estão ancorados³³. Em outras palavras, *a constituição de sentidos* que se dá *na e pela* linguagem está relacionada às questões mais gerais da comunidade que faz determinado uso das palavras.

Wittgenstein (1999) não aponta, como faz com a expressão *jogos de linguagem*, o que vem a ser *forma de vida*. Entretanto, utiliza a expressão, na designação de que existem diferentes maneiras de usar a linguagem e que essas são indicadoras de *formas de vida*. Como exemplo, cita uma linguagem composta somente por comandos e afirmações e aponta “e representar uma linguagem é representar uma forma de vida” (WITTGENSTEIN, 1999, §19).

Uma linguagem composta por comandos e afirmações pode ser indicativa, por exemplo, da linguagem adotada por soldados em um contexto de guerra que precisem manter mensagens sigilosas e imperativas. Assim, identificar uma linguagem conduz a compreensão de um conjunto de elementos relacionados ao uso da linguagem, como hábitos e valores, por exemplo.

Adotamos a definição de Moreno (2003) e compreendemos *formas de vida* como “sistemas *regrados* de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem; sistemas em que se entrecruzam hábitos, atitudes, éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões de vontade” (MORENO, 2003, p. 129, grifo nosso).

Com isso, *forma de vida* é uma expressão que indica a amplitude de questões as

³² Essa afirmação não deve ser entendida como a negação da existência de sensações corporais e nem de objetos materiais, pelos quais as palavras nomeiam. O que os estudos de Wittgenstein (1999) nos sugerem é que a significação das palavras não depende da constatação das sensações no corpo ou nem da existência dos objetos, pois a significação é uma constituição linguística. Essa questão pode ser constatada pelo fato de podermos falar de uma cor mesmo que não exista mais os objetos que ela nomeava, ou ainda, podermos falar de uma dor que nunca sentimos, conforme exemplifica Moreno (2003).

³³ Notemos que Wittgenstein (1999) ancora a linguagem a entidades não linguísticas, mas essas são de outra ordem, quando comparamos aos estáveis objetos físicos, ou estados mentais específicos de um entendimento referencial de linguagem. Elas, agora, referem-se a um conjunto de crenças, hábitos e costumes de determinado grupo social, ou seja, a linguagem está vinculada às instáveis e múltiplas *formas de vida*.

quais, a constituição de *sentidos* está vinculada. Crenças, concepções a respeito do mundo, hábitos e valores, etc. explicam, geram e reelaboram os diversos usos da linguagem.

Formas de vida são constituições humanas, ou seja, *forma de vida* se refere à *forma de vida* de uma determinada comunidade ou de um determinado grupo social. *Formas de vida* não são arbitrárias, pois indicam específicos hábitos, costumes, etc., o que justifica a designação de sistemas *regrados*.

Com base nessas considerações de Wittgenstein (1999) a respeito do papel da linguagem na constituição dos *sentidos* e sua vinculação e explicação pautados em *formas de vida*, iremos, na seção seguinte, apresentar algumas delimitações de Wittgenstein sobre *matemática*.

2.2.3 MATEMÁTICA: UM CONJUNTO DE ENUNCIADOS NORMATIVOS REGRADOS

Na seção anterior, pudemos notar que as considerações que Wittgenstein³⁴ tece em relação à linguagem se focam na análise do papel da linguagem na vida humana. Citamos como exemplo, o uso da linguagem para dar e receber ordens, representar um teatro ou, ainda, para gerar uma determinada ação, como é o caso das brincadeiras de roda.

Nesse contexto, Wittgenstein foi específico no que se refere ao papel que os enunciados matemáticos possuem na vida humana. Os enunciados matemáticos são enunciados normativos, são aqueles *empregados* como *normas/sistemas* para organização de nossas experiências no mundo (JESUS, 2002; GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010; VILELA, 2007, 2010).

Conceber os enunciados matemáticos como normativos implica dizer que eles são usados para a organização de nossas experiências, moldando essas experiências de uma determinada forma. Por exemplo, podemos utilizar o sistema de números naturais para a contagem de objetos ao nosso redor e, assim, contabilizarmos cinco canetas em cima de nossa mesa de trabalho.

Caso adotássemos outro sistema, poderíamos contabilizar oito, dez, ou três canetas, enfim, poderíamos dar outro sentido a nossa experiência. Nas palavras de Gottschalk (2008, p.

³⁴ Para a compreensão de matemática assumida por Wittgenstein, adotamos algumas conceituações presentes em seu livro *Investigações Filosóficas*, bem como, as ideias de alguns de seus comentadores sobre essa e outras obras de Wittgenstein. Em particular, citamos as considerações de Jesus (2002), Glock (1998), Gottschalk (2004a, 2004b, 2008), Miguel, Vilela, Moura (2010) e Vilela (2007, 2010). Por conta disso, nessa seção e em alguns momentos ao longo do texto, não identificaremos às ideias de Wittgenstein citando uma específica referência.

81), os enunciados matemáticos, em uma perspectiva wittgenstiana, “têm a função de paradigmas, modelos que seguimos para dar sentido à nossa experiência empírica”.

Assim, podemos notar que a adoção de determinado sistema normativo é anterior a experiência, ou seja, é a partir dele que nossa experiência toma determinada forma. Por exemplo, foi o sistema matemático escolar que *orientou* a experiência de contar e de relatar a quantidade de canetas. Essa é a ideia que fundamenta o entendimento de que os enunciados matemáticos são *normativos e* tomados como *sistemas* para a organização de nossas experiências empíricas. Afirma Glock (1998) que para Wittgenstein,

As proposições matemáticas não descrevem nem entendidas abstratas, nem a realidade empírica; tão pouco refletem o funcionamento transcendental da mente. Seu estatuto apriorístico se deve ao fato de que, a despeito de sua aparência descritiva seu papel é normativo, nada que as contrarie pode ser considerado uma descrição inteligível da realidade (GLOCK, 1998, p. 243).

Com base nesse entendimento, as cinco canetas dispostas em nossa mesa não vistas como *descrições* dos numerais de um a cinco. As cinco canetas correspondem a como eu *vejo* as canetas em cima da mesa, quando eu adoto o modelo de contagem proporcionado pelo sistema de número naturais.

Por isso, afirma Glock (1998) que para Wittgenstein, os enunciados matemáticos são distintos em relação aos enunciados das ciências empíricas. Isso porque, como os enunciados matemáticos são normativos, as próprias experiências não refutam esses enunciados, pois os mesmos foram usados exatamente como maneira de organizar, de lidar com elas, enquanto que, nas ciências empíricas, os enunciados se modificam em função das experiências.

Não podemos afirmar que o sistema de números naturais deva ser refeito, em função de nós encontrarmos três³⁵, ao invés de cinco canetas em cima de nossa mesa. Caso isso ocorra, podemos afirmar, simplesmente, que alguém pegou nossas canetas, sem nos avisar, ou que o sistema de números naturais não foi um sistema apropriado para lidar com tal experiência e adotarmos outro. Ou seja, o sistema de números naturais em si não é modificado em termos de suas proposições, em função da experiência empírica.

Exemplificamos, com esse caso, o fato de os enunciados matemáticos com base nas ideias de Wittgenstein, não serem, portanto, alvo de refutação pela experiência, ou ainda, pela observação e experimentação³⁶ (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008;

³⁵ Nossa nova contagem de três canetas é feita com base em algum sistema, suponhamos o sistema de números naturais.

³⁶ Ressaltamos que embora os enunciados matemáticos sejam normativos, isso não significa que as experiências empíricas não os importam. Muitos enunciados matemáticos possuem origem empírica. Mas, a partir do

VILELA, 2007, 2010), como ocorreria com as ciências empíricas. A refutação dos enunciados matemáticos ocorre em função somente do método adotado. O método adotado pode não estar correto em termos de coerência interna. Por isso, enfatiza Wittgenstein (1969 apud GLOCK, 1998, p. 241), “o cálculo não é um experimento”.

Diante de tais questões, delineamos a compreensão de que os enunciados matemáticos são aqueles normativos, ou seja, são enunciados adotados como sistemas/normas para a organização de nossas experiências no mundo. Organização no sentido que os enunciados moldam, dão a essas experiências determinado formato. Com base nas ideias de Wittgenstein (1999) podemos dizer que esses sistemas/normas estão relacionados às *formas de vida*.

O estudo de Vilela (2007) no qual, a autora identificou, nas diferentes adjetivações relativas à matemática (p. ex. matemática dos agricultores, matemática da rua, do dia a dia, etc.), a constatação da existência de diferentes matemáticas, pode ser compreendido como a indicação de diferentes sistemas matemáticos normativos pelos quais podemos e/ou organizamos nossas experiências.

No contexto escolar, predominantemente, um único *sistema* é adotado como sistema normativo, o sistema matemático escolar. Como os demais, ele é um sistema *regrado*. Intitulamos de sistema matemático escolar *um conjunto de enunciados normativos regrados*. Esse sistema se caracteriza por enunciados em forma oral, escrita e/ou gestual, embora mais enfaticamente na forma escrita³⁷. Optamos por denominar a elaboração desses enunciados pelos indivíduos de discursos matemáticos³⁸.

Inspirados em Sfard (2008) classificaremos as regras relativas ao sistema matemático escolar de regras do tipo “como” e regras do tipo “quando” (SFARD, 2008, p. 208, tradução nossa). As regras do tipo *como* dizem respeito ao que denominamos de regras procedimentais. Em outras palavras, as regras do tipo *como* são regras que orientam a respeito da elaboração dos discursos que será considerada legítima, ou seja, sobre que tipo de elaboração discursiva é uma elaboração matemática.

Nesse sistema matemático escolar, a proposta para organização de experiências deve

momento, em que são usados como normas para lidar com as experiências, essas mesmas experiências que as deram origem já não as contradizem. Essa mudança de enunciado empírico para enunciado normativo corresponde a uma “mudança funcional”, nas palavras de Moreno (2003, p. 119)

³⁷ Os livros-texto são exemplos de apresentação de regras na forma escrita. No sistema matemático escolar, a escrita é tomada como configuração legítima das regras relativas a esse sistema. Em outros sistemas, como por exemplo, do dia a dia, as regras encontram-se, frequentemente, configuradas na forma oral.

³⁸ Nesse artigo, a expressão discursos matemáticos deve ser entendida como aqueles enunciados de caráter normativos. Esse é um entendimento distinto do assumido por Sfard (2008) que utiliza essa expressão, porém, com base, em compreensão referencial de matemática.

ser desenvolvida segundo certas *regras*. Diante da necessidade de identificar a quantidade de pessoas entrevistadas, a partir das informações de suas respostas a uma entrevista, por exemplo, a adoção do sistema matemático escolar como sistema normativo pode corresponder à estruturação da situação- problema, com base na temática de *conjuntos*.

No livro didático de Dante (2004), por exemplo, o autor descreve uma série de passos adotados para organização dessa experiência. O uso da simbologia de *conjuntos* e a necessidade de somar e subtrair certos valores, a maneira de apresentar os resultados, são exemplos de regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar.

Enfim, as regras do tipo *como* equivalem ao uso do *sistema* matemático na organização de experiências, essas regras correspondem exatamente a como determinadas experiências serão organizadas. Com isso, podemos dizer que a aprendizagem das regras do tipo *como* equivalem à aprendizagem do próprio sistema matemático escolar.

Sfard (2008) reconhece que o aprendizado dessas regras não implica seu uso de maneira indiscriminada e independente do contexto em que a mesma é considerada legítima. Por conta disso, a autora aponta para a existência de outras regras, as quais ela denominou de regras do tipo *quando*³⁹.

As regras do tipo *quando* indicam em que *contexto* ou *em que circunstâncias* a adoção de determinadas regras do tipo *como* será considerada legítima. Para a autora, são essas regras que justificam o fato de alguns indivíduos não utilizarem o sistema matemático escolar em situações criadas em contextos não escolares e vice-versa.

Para nós, as regras do tipo *quando* e do tipo *quando* podem ser compreendidas como indicativas da *forma de vida* em que a adoção de certos *sistemas* é considerada uma produção discursiva legítima, ou seja, peculiar àquela *forma de vida*.

Na seção seguinte, apresentaremos questões que envolvem a dinâmica da aprendizagem matemática de regras do sistema matemático escolar, com base em algumas definições teóricas de Sfard (2008).

³⁹ *Quando* é uma tradução do advérbio “when” em inglês. Esse termo não somente se refere a questões relacionadas ao tempo, por exemplo, podemos constatar esse uso na seguinte pergunta: *quando você chegará em casa?* Mas também pode ser usado, para nos referirmos às *circunstâncias* em que um evento aconteceu ou deve acontecer, por exemplo, *quando estou em casa, estou digitando*. Nessa direção, adotamos esse termo no sentido de circunstâncias, ou seja, sob que critérios determinada opção do sistema é realizada. Assim, essas circunstâncias podem ser diversas, espaciais, temporais, atemporais, etc.

2.2.4 A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA EM ÂMBITO ESCOLAR

Esse artigo tem como objetivo identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem. Compreendemos matemática escolar como um *sistema normativo regrado*. As regras que caracterizam esse sistema correspondem às regras denominadas regras do tipo *como*. Conforme descrevemos na seção anterior, essas regras possuem configurações linguísticas na forma oral, escrita e gestual, por isso, as denominaremos de discursos, ou produções discursivas matemáticas.

A aprender matemática corresponde, então, a aprender a utilizar tal sistema. Esse sistema corresponde às regras do tipo *como*. Essas, porém, para serem produzidas dependem da identificação das regras do tipo *quando*, as quais a elaboração das regras do tipo *como* são válidas e consideradas legítimas.

O contexto escolar, muitas vezes, é adotado como indício de qual produção discursiva será considerada legítima. Essa legitimidade advém do que uma comunidade julga, elabora e utiliza como produção discursiva peculiar.

Com isso, estamos ressaltando que essa produção não é arbitrária e sua legitimidade é avaliada e realizada não apenas por quem elabora os discursos, mas, também, por agentes externos, ou seja, por uma comunidade, ou por um grupo de pessoas que instituam e/ou adotam determinada produção discursiva como peculiar à sua *forma de vida*. No contexto escolar, instituimos que o professor é representante dessa comunidade (HARRÉ; TISSAW, 2005).

Identificamos, anteriormente, que existem diferentes sistemas e esses atrelados a diferentes *formas de vida*. Todos, com isso, igualmente legítimos, a depender da *forma de vida*, a qual os sistemas estão vinculados. A incoerência e a ilegitimidade de um determinado sistema, portanto, estão relacionadas às *formas de vida* tomadas como critério.

Por exemplo, fazer cálculos mentais específicos para comunicar aos clientes, o preço total de uma compra de frutas em uma feira pode ser entendido como o uso de um sistema matemático para a experiência de contabilizar os valores referentes à compra de frutas de um indivíduo. Podemos dizer que o uso desse sistema é legítimo nesse contexto espacial e em toda a *forma de vida* que os caracteriza.

O mesmo pode não ocorrer, por exemplo, quando um aluno utiliza esse mesmo sistema no contexto escolar. Tal sistema pode não ser legítimo em relação à *forma de vida* tomada como modelo no âmbito escolar. Assim, legitimidade depende o que é julgado como peculiar a determinada *forma de vida*.

Assim, a aprendizagem matemática em âmbito escolar pode ser considerada em termos de aprendizado das regras do tipo *como* e do tipo *quando* peculiar à forma de vida pela qual essas regras estão ancoradas/vinculadas. Ou seja, é aprendizagem do *sistema* matemático escolar e de *quando* o uso desse sistema é legítimo⁴⁰.

Os estudos de Sfard (2007, 2008) sugerem que os alunos no contexto da aprendizagem matemática escolar buscam organizar as suas experiências adotando outros sistemas matemáticos normativos, em particular, o sistema matemático do dia a dia. Diante disso, ela aponta que os alunos devem *mudar* a sua produção discursiva, o que é representado pela adoção de regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar e abandono de outros sistemas.

Enquanto Sfard (2007, 2008) argumenta que os alunos devem adotar o sistema matemático escolar como modelo pelo qual devem passar a organizar as suas experiências, pois afirma que a aprendizagem matemática se efetiva quando os alunos *mudam* a sua produção discursiva para aquela considerada legítima no contexto escolar, apresentamos uma sugestão distinta.

Apontamos que a aprendizagem matemática no contexto escolar pode se caracterizar por uma *delimitação discursiva*, ou seja, pela identificação por parte dos alunos em que circunstâncias (*quando*) as regras do tipo *como* são consideradas legítimas e assim poderão optar pelo uso do sistema que se adéque a determinadas finalidades e sejam legítimos em uma determinada *forma de vida*.

Isso porque, de uma perspectiva wittgensteiniana, não julgamos que devemos indicar que o sistema matemático escolar seja adotado pelos alunos invariavelmente, em todos os contextos que se encontrem, pois há outras *formas de vida*, nas quais, o uso desse sistema pode não ser um uso legítimo para atender às finalidade e utilidades criadas no interior das formas de vida.

Assim, as regras do tipo *como* que correspondem ao sistema matemático escolar, podem não ser adotadas como sistema normativo na organização de quaisquer experiências dos indivíduos. Elas parecem estar relacionadas às formas de vida específicas e distintas daquelas aos quais os indivíduos vinculam-se em contextos não escolares. Por isso, a escola é constituída como *lócus* privilegiado para aprendizagem desse sistema.

Diante dessa especificidade, Sfard (2008) aponta que a aprendizagem matemática

⁴⁰ Ressaltamos que a legitimidade, por vezes, é delimitada em função dos contextos espaciais. Por conta disso, quando apontarmos para legitimidade de um determinado sistema, explicitaremos que contexto estamos tomando por referência.

requer uma inicial imitação, pelos alunos, das produções discursivas consideradas legítimas. A *imitação* dos alunos corresponde à elaboração de discursos tendo a produção discursiva do professor como modelo, em virtude de essa produção ser considerada *legítima*. A autora aponta que os alunos, no momento inicial de aprendizagem, não identificam as razões de usar determinadas regras relativas ao sistema matemático escolar, por isso, imitam a produção discursiva do professor.

Contudo, a adoção, pelos alunos, da produção discursiva do professor como *modelo*, ocorre, segundo Sfard (2008, p. 256, tradução nossa), a partir de um conflito denominado de “conflito commognitivo”⁴¹. O conflito commognitivo é uma situação na qual se identifica que os sujeitos estão adotando diferentes regras em suas produções discursivas, ou em nossos termos, estão adotando diferentes sistemas matemáticos normativos.

Em âmbito escolar e nas aulas de matemática, Sfard (2008) destaca que esse conflito ocorre em virtude de os alunos adotarem como regras em suas produções discursivas, aquelas válidas e legítimas em contextos não escolares. Diante disso, Sfard (2008) aponta que o conflito é dissolvido quando os alunos abandonam essas regras e adotam as regras do tipo *como* legítimas no contexto escolar.

Apresentamos algumas questões em relação a esse entendimento. Inicialmente, apontamos que os professores, também, podem ser geradores de conflitos commognitivos e não somente os alunos, como aponta Sfard (2008). Os professores podem apresentar uma produção discursiva não legítima, por exemplo, embora reconheçamos que o seu discurso é o discurso modelo e o professor é o representante da comunidade que elabora, julga e utiliza os discursos considerados legítimos.

Além disso, talvez, não possamos prever que as produções discursivas dos alunos quando na aprendizagem do sistema matemático escolar sejam sempre ilegítimas e advindas de sistema matemáticos não escolares. Isso porque entendemos que os alunos podem adotar o contexto escolar como indício de que regras do tipo *como* devem ser produzidas e julgar que as regras do tipo *como* que adotam em outros contextos não são legítimas no contexto escolar e, por isso, não as acionarem.

Diante dessas questões, entendemos que a aprendizagem do sistema matemático corresponde à produção de regras do tipo *como* pelos alunos e de sua identificação de *quando*

⁴¹ A palavra commognitivo pode ser entendida como a tradução do neologismo criado por Sfard (2008) pelo uso da palavra “commognitive”. Paralelamente à versão em língua inglesa, o termo commognitivo corresponde à junção das palavras comunicação e cognição que são traduções dos termos correspondentes originais em língua inglesa (communication e cognition). A criação desse neologismo pela autora visou enfatizar que ela entende os processos cognitivos como de natureza comunicativa. O pensamento, por exemplo, é definido pela autora como “comunicação consigo mesmo” (SFARD, 2008, p. 82, tradução nossa).

essas regras são consideradas legítimas. Quando essas regras forem distintas daquelas que os alunos usariam em contexto extraescolares, apontamos que essa incompatibilidade seja abordada em termos de *delimitação discursiva*, ou seja, da análise de qual sistema é adotado como legítimo, por que e em qual *forma de vida*.

Nesta seção, tecemos considerações sobre a aprendizagem matemática em âmbito escolar. Essa aprendizagem, tal qual está instituída, refere-se à aprendizagem de *um sistema*, o sistema matemático escolar.

Afirmam alguns comentadores de Wittgenstein (1999) que para o filósofo, aprender é aprender a *ver* as coisas de determinado modo (GOTTSCHALK, 2008; MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010; VILELA, 2007), ou seja, é aprender *um*⁴² *sistema*, um *modo de organizar* nossas experiências, o que significa que passamos a compreendê-la de determinada maneira. Paralelamente, podemos afirmar que a aprendizagem do sistema matemático escolar proporciona *um* modo de *ver* determinadas situações.

A seguir, apresentaremos como concebemos modelagem matemática e aprendizagem matemática na modelagem, à luz dos entendimentos sobre matemática e aprendizagem matemática sustentados anteriormente.

2.2.5 MODELAGEM: UMA MANEIRA DE ORGANIZAR SITUAÇÕES EMPÍRICAS

Designamos de modelagem matemática em âmbito escolar, de maneira geral, a elaboração, pesquisa e/ou resolução⁴³ *matemática* de situações-problema, adjetivadas de situações reais ou, ainda, de não matemáticas. A modelagem na Educação Matemática adota, predominantemente, o sistema matemático escolar para abordagem dessas situações.

Silveira e Caldeira (2010) identificaram uma variedade de maneiras de implementação da modelagem em âmbito escolar, mas ressaltam que elas têm, em comum, a abordagem *matemática* de situações nomeadas de *reais*.

Diante de uma situação-problema, por exemplo, a apresentada por Sonogo e Bisognim (2010), que consistia na determinação da quantidade de metal necessária à construção de silo. Um silo é um recipiente de armazenamento e beneficiamento de arroz. Fazer modelagem consistiu em apresentar uma resposta para esse problema em termos

⁴² Na compreensão de Miguel, Vilela, Moura (2010), Wittgenstein (1999) não indicaria que se deve aprender *um* único modo de ver e sim, argumentaria na direção de uma ampliação nos modos de *ver*. Com base, nesse entendimento, os autores apontam para a problematização de diferentes formas de *ver*, ou em nossos termos, para a problematização de diferentes sistemas matemáticos normativos, tendo como cenário o contexto escolar.

⁴³ Concentramos esses encaminhamentos (elaboração, pesquisa e resolução) pela nomenclatura única do termo *abordagem* de situações-problema reais.

matemáticos, ou seja, utilizar o sistema matemático escolar, mobilizar regras do tipo *como* relativas a esse sistema na abordagem dessa situação-problema.

No exemplo anteriormente citado, as autoras afirmaram que “durante as visitas de campo os alunos perceberam que a forma do silo é um cilindro, e a parte de cima é um cone” (SONEGO; BISOGNIN, 2010, p. 6) e realizaram cálculos relativos a essas duas figuras. Assim, podemos dizer que foram mobilizadas regras do tipo *como* referentes às figuras geométricas denominadas no sistema matemático escolar de cone e de cilindro.

Como resultado, os alunos e a professora relataram que seriam necessários $92,99 \text{ m}^2$ de metal para construir um silo de algumas específicas dimensões. Diante do uso de regras do sistema matemático escolar na abordagem dessa situação-problema, afirmamos, então, que essa situação está matematizada, ou, ainda, que nós a modelamos *matematicamente*.

Araújo (2007) destaca, porém, que o entendimento de matemática presente nas definições de modelagem, ou seja, do uso do sistema matemático escolar na abordagem de situações-problema denominadas reais, é um entendimento de matemática como sistema descrito da realidade, portanto, capaz de matematizar qualquer situação da realidade.

Além disso, a matemática é considerada como um sistema que não faz parte da realidade, por isso seus problemas são denominados de problemas reais e não de problemas matemáticos (BIEMBENGUT; HEIN, 2003; BLUM; FERRI, 2009; BURAK; KLUBER, 2011; MAAB, 2006). Por sua vez, Bean (2007) destaca que a matemática faz parte da realidade, mas é uma realidade diferente daquela abordada nos problemas.

Barbosa (2007) e Ferruzi e Almeida (2009) apresentam compreensões que destoam das apresentadas anteriormente, afirmando que os problemas não são problemas reais, conforme destacam alguns autores, mas são problemas que possuem referência na realidade. Embora ter referência não signifique ser da realidade, os problemas permanecem sendo designados como referentes à realidade, e não à própria matemática.

À luz da compreensão de matemática de Wittgenstein, o fato de o sistema matemático ser usado para organizar situações nomeadas de reais, pode ser analisado de uma perspectiva diferente. O sistema matemático escolar pode ser concebido como um sistema normativo e não descrito da realidade, conforme a separação entre *matemática* e *realidade* pode conduzir a delimitar.

A compreensão do sistema matemático como sistema normativo assumido por Wittgenstein (1999) nos possibilita entender que, em relação às situações-problema, esse sistema possui o papel de organizá-las, é um sistema que pode ser usado para analisarmos a situação-problema de determinado modo. O uso de outros sistemas geraria outras maneiras

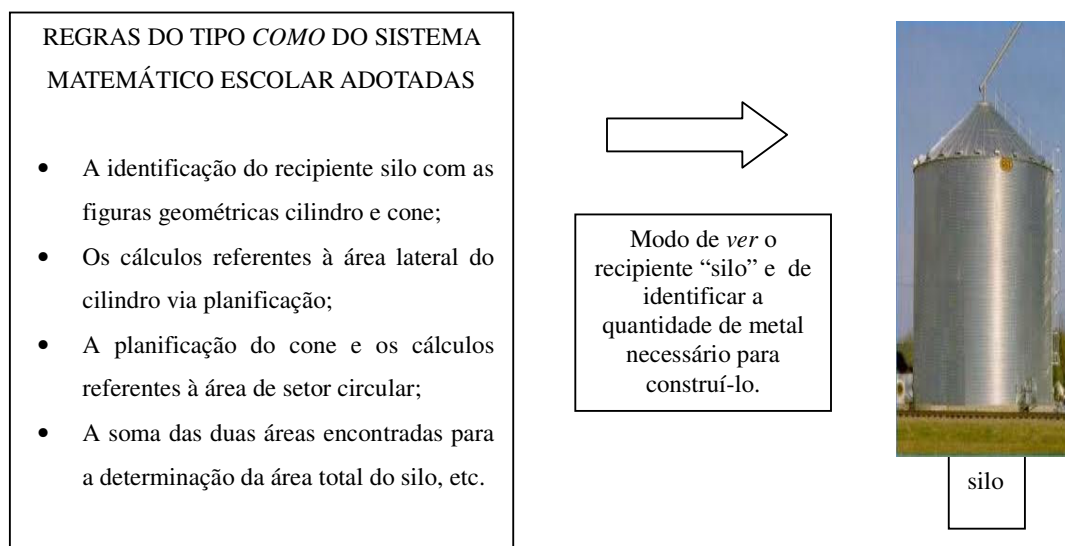
como essas situações seriam *vistas*, adotando uma designação de Wittgenstein (1999).

A matematização encontrada para as situações-problema significa um *modo de apresentar* essas situações e *de lidar* com elas. Centralizamos essas duas características pelo uso único da palavra *organização* de situações empíricas. Assim, podemos dizer que a modelagem é *uma* maneira de organizar situações empíricas, *uma* maneira proporcionada pelo sistema matemático escolar.

As situações-problema em modelagem são caracterizadas como situações empíricas, porque são passíveis de verificação e refutação pela experiência. Por exemplo, podemos verificar pela observação e pela experimentação, se a quantidade de metal adquirida foi suficiente para construir de um *silo*, na situação-problema proposta em Sonogo e Bisognin (2010). Ou ainda, se a compra de fraldas descartáveis foi a opção mais econômica em relação a fraldas não descartáveis, no exemplo citado por Leiss et al. (2010).

Diante disso, a modelagem pode ser entendida como o uso do sistema matemático escolar na abordagem de situações empíricas. Esse sistema, como vimos, refere-se ao conjunto de regras do tipo *como*, ou seja, de regras procedimentais que são adotadas como modelo para essa abordagem. Essas regras estão ancoradas em *formas de vida, nas quais* o sistema escolar se fundamenta.

A seguir, uma demonstração de como compreendemos a matematização das situações-problema, em modelagem matemática, citando, como exemplo, a modelagem realizada para a obtenção da quantidade de metal necessária à construção de um silo, apresentada por Sonogo e Bisognin (2010).



As figuras geométricas cilindro e cone, bem como, as fórmulas correlatas a essas figuras, compõem o *sistema* que denominamos de matemático escolar. É esse sistema que *usamos* para identificar e encontrar a quantidade de metal necessária a construção do silo. De maneira simplificada, podemos comparar esse sistema a um *óculos* que usamos para enxergar as coisas, ou seja, é com base nesse sistema que as situações empíricas passam a se apresentar de determinado modo.

Essa compreensão não descritiva de matemática nos possibilita afirmar que o silo não *é* um cilindro, nem a parte do superior do silo *é* um cone. Silo pode ser visto como um cilindro, caso eu utilize a figura geométrica cilindro para analisá-lo, ou ainda é comparável a um cilindro, caso eu esteja adotando, como sistema normativo, o sistema matemático escolar para compreendê-lo. Essa ideia fundamenta a noção de matemática como normativa de Wittgenstein.

Podemos, portanto, apontar que a aprendizagem matemática constituída no uso da modelagem corresponde à aprendizagem das regras do tipo *como*, as quais estão atreladas à *forma de vida* que fundamenta o sistema matemático escolar, que serão usadas para a organização de situações empíricas.

Também, essa aprendizagem deve ser orientada pela identificação das regras do tipo *quando*, ou seja, em quais circunstâncias a utilização dessas regras do tipo *como* são legítimas e úteis no interior de determinada *forma de vida*.

Com base em tais questões, podemos nos questionar em que circunstâncias, em que *forma de vida*, o uso das regras do tipo *como* escolar são tidas como legítimas para abordagem de situações empíricas? Ou seja, quais são as regras do tipo *quando* relativas ao sistema matemático escolar?

Poderíamos responder na *forma de vida* adotada como referência no contexto escolar. Ou seja, quando essas situações são abordadas no contexto escolar, é legítimo utilizar as regras do tipo *como* relativas ao *sistema matemático escolar*, isto é, regras já oriundas da *forma de vida* em que esse sistema se fundamenta.

No entanto, ressaltamos que argumentamos, juntamente com outros pesquisadores (BURAK, 2004; KAISER; SCHWARK, 2010; SWAN et al., 2007), que a inclusão da modelagem no currículo tem, como um dos argumentos, possibilitar que os alunos resolvam problemas reais em contextos não escolares, ou seja, que adotem as regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar na organização de situações empíricas, formuladas e suscitadas em ambientes extraescolares.

O sistema matemático escolar é adotado como legítimo e como modelo, para

abordagem de situações suscitadas e criadas em outros contextos. É o caso, por exemplo, de cálculos previdenciários, bancários, relativos a créditos financeiros, entre outros vários exemplos.

Ressaltamos que nem todas as situações empíricas possuem o sistema matemático escolar como sistema modelo, pois elas podem, por sua vez, estar relacionadas a outras *formas de vida*. Caso essas situações não adotem o sistema matemático escolar como modelo, argumentamos que elas podem ser abordadas à luz de suas próprias *formas de vida* ou, ainda, utilizando o sistema matemático escolar como outra maneira possível de abordá-las.

Em modelagem, no entanto, adotamos o sistema matemático escolar, como modelo pelo qual iremos lidar com as situações-problema propostas. Talvez, em virtude de esse modelo não ser aquele, frequentemente, adotado em contextos não escolares pelos alunos e ter a sua especificidade própria, os alunos prescindam da interferência do professor para modelarem situações empíricas.

Niss (2010) aponta que os professores precisam auxiliar os alunos na matematização da situação-problema, pois os alunos não a desenvolvem por eles mesmos. Ou seja, o autor sugere que os alunos não identificam que regras do tipo *como* devem ser mobilizadas para a abordagem da situação-problema.

Na mesma direção, podemos dizer que Leiss et al. (2010) destacam que as sugestões do professor para a identificação do sistema matemático pelo qual os alunos devem mobilizar são essenciais para a compreensão dos alunos sobre como devem matematizar as situações empíricas.

Os autores denominaram essas sugestões de “estratégias da situação” (LEISS et al., 2010, p. 135). Sugestões da seguinte ordem “eu sugiro que você leia o problema mais uma vez; “quais são as variáveis dadas no problema? (LEISS et al., 2010, p. 136), são apontadas pelos autores como exemplos de tais estratégias.

Blum e Ferri (2009) também indicam a necessidade de intervenção por parte do professor para que os alunos resolvam matematicamente as situações-problema. Os autores acrescentam que essas intervenções devem ter o caráter de sugestões, e não de configuração fixa para as respostas dos alunos.

A partir dessas considerações sobre modelagem e a aprendizagem matemática na modelagem, relataremos, a seguir, o *locus* de obtenção do material adotado para análise das delimitações teóricas apresentadas neste artigo, juntamente com uma breve descrição dos alunos e do professor, cujos discursos foram tomados como material empírico.

2.2.6 OS SUJEITOS E O *LÓCUS* DE REGISTRO DE SEUS DISCURSOS⁴⁴

A professora, cujos discursos analisamos, encontrava-se no último semestre de um curso de licenciatura em Matemática em uma universidade estadual da Bahia. Entre outras disciplinas, frequentava a de Modelagem Matemática e a de Estágio Supervisionado. Os discursos analisados neste artigo são de um grupo de alunos da escola em que ela cumpria seu estágio supervisionado. Identificaremos a referida professora pelo nome de Nanda⁴⁵.

Tratava-se de uma escola pública⁴⁶, porém, com gerência compartilhada, entre funcionários da Secretaria de Educação Estadual e funcionários da Polícia Militar Estadual. Os alunos matriculados na escola, majoritariamente, possuíam vínculos familiares com os funcionários da polícia militar, em geral, eram seus filhos (as) ou sobrinhos (as).

Diante dessa peculiaridade, a escola realizava algumas ações tipicamente militares, por exemplo: os alunos marchavam e hasteavam bandeiras oficiais, diariamente. Além disso, os alunos seguiam regras em relação às suas vestimentas e às suas aparências estéticas.

O grupo de alunos observado foi escolhido pela professora, em virtude de serem falantes e questionadores durante suas aulas de matemática. Fábio, Ane, Laís e Denise eram denominados de tenentes, pois apresentavam excelentes resultados nas avaliações das disciplinas, em geral. Exceto Denise, que apresentava desempenho não satisfatório, porém, somente na disciplina de Matemática.

Ainda segundo a professora, os alunos eram muito competitivos entre si e buscavam obter excelentes notas em todas as disciplinas. Além disso, tanto a professora Nanda, como os alunos não haviam realizado, anteriormente, tarefas de modelagem matemática⁴⁷ no contexto escolar.

A professora Nanda tinha experiências anteriores no desenvolvimento de tarefas de modelagem, somente como aluna, essas experiências ocorreram na disciplina Modelagem Matemática que a mesma estava cursando na universidade.

⁴⁴ A seguir, delimitaremos por que tomamos o discurso como unidade de análise.

⁴⁵ Atribuímos nomes fictícios à professora e aos alunos cujos discursos foram adotados para análise, em virtude do pedido da direção da escola, quanto ao sigilo relativo à identidade dos alunos, da escola e da professora.

⁴⁶ Ressaltamos que a escolha do contexto de coleta de dados não ocorreu em virtude de uma necessidade específica da temática de estudo. Em relação à temática, precisávamos somente coletar os dados relativos ao desenvolvimento de uma tarefa de modelagem, portanto, para a escola, o contexto e os alunos, não tínhamos critérios intencionais de escolha, em função dos objetivos da pesquisa.

⁴⁷ Tarefas de modelagem são tarefas escolares, as quais são propostas aos alunos que organizem situações empíricas, usando o sistema matemático escolar.

2.2.7 A TAREFA DE MODELAGEM: O LIXO ELETRÔNICO

Na disciplina Modelagem matemática, a qual a professora cursava na universidade, o professor solicitou aos graduandos que elaborassem, em grupos, uma tarefa de modelagem para ser implementada na escola, em que um dos integrantes do grupo de alunos era professor.

O grupo da professora Nanda escolheu o tema lixo eletrônico. Sobre esse tema, Nanda e seus colegas elaboraram um pequeno texto descrevendo a problemática e um conjunto de cinco situações-problema⁴⁸, configurando-se, assim, a tarefa de modelagem a ser entregue aos alunos. A seguir, apresentamos a referida tarefa.

Figura 1: Tarefa de modelagem criada pelo grupo de Nanda

LIXO ELETRÔNICO

Estamos acostumados a utilizar, todos os dias, TVs, computadores, celulares, câmeras, pen-drives, MP3 e seus derivados que nem percebemos as consequências desse modelo de civilização. Devido a rápida evolução tecnológica, os aparelhos eletrônicos tornam-se descartáveis muito rapidamente, aumentando a poluição ambiental.

Você já se perguntou qual o destino terá o seu computador ou seu celular quando eles deixarem de funcionar? Pois é, essa é uma situação muito grave, porque o descarte incorreto desses objetos pode contaminar seriamente a humanidade e o meio ambiente. Entre os avanços decorrentes da industrialização, temos diversos equipamentos eletrônicos que fatalmente acarretam na produção de mais lixo, chamado especificamente de lixo eletrônico. Nesse contexto, o mercúrio ocupa lugar de destaque entre as substâncias mais perigosas. Esse elemento está presente em computadores, monitores, TVs de plasma, lâmpadas fluorescentes, entre outros. No Brasil, são consumidos cerca de 100 milhões de lâmpadas fluorescentes por ano. Desse total, apenas 6%(aproximadamente) é reciclado, dando origem a materiais que, em sua maioria, são comercializados em mercados secundários. O restante das lâmpadas é descartado em aterros sanitários sem nenhum tipo de tratamento, podendo contaminar o solo e a água.

Além disso, cada lâmpada reciclada possui concentração média de 10 mg de mercúrio, variando de acordo com o tamanho e o modelo e a cada 1.000 lâmpadas fluorescente tubulares se obtêm aproximadamente 6kg de pó de fósforo, 18 kg de terminais de alumínio, pinos de cobre, eletrodos e etc. 8000 mg de mercúrio e 260 kg de vidro. O conceito de sustentabilidade exige portando profunda transformação da sociedade, alterando atitudes, comportamentos e valores. Por conseguinte, estudar e compreender os problemas decorrentes da utilização dos recursos naturais torna-se uma demanda urgente e de grande importância.

Questões

A partir das informações presentes no texto, responda:

- a) **Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?**
- b) No processo de reciclagem, quanto de mercúrio inicial contido numa lâmpada é recuperado?
- c) Quanto de mercúrio é possível obter assumindo o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil, atualmente?
- d) Se as lâmpadas provenientes dessa primeira reciclagem sofrerem novamente o mesmo processo de aproveitamento do mercúrio, quanto de mercúrio será possível obter nessa segunda reciclagem? E na terceira? E na vigésima?
- e) Qual a quantidade máxima de lâmpadas fluorescentes que poderiam ser obtidas, ao iniciar um ciclo de reaproveitamento do mercúrio proveniente de lâmpadas fluorescentes recicladas.

⁴⁸ Optamos por nos referir a situações-problema, e não simplesmente de problemas, por julgarmos que essa nomenclatura apresenta indícios de que os problemas abordados estão relacionados a uma situação, a uma temática mais ampla. No caso da tarefa de modelagem, os problemas são relativos ao tema lixo eletrônico.

2.2.8 O MÉTODO E OS PROCEDIMENTOS DE REGISTRO DOS DISCURSOS DOS PARTICIPANTES

O objetivo deste estudo é identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem. Entendemos matemática como sistema normativo regrado. Suas regras são, frequentemente, configuradas em termos escritos, orais e/ou gestuais.

No contexto escolar, podemos notar o entrelaçamento dessas três configurações em aulas de matemática. Em livros-texto, por exemplo, as regras desse sistema estão impressas, ou, em nossos termos, estão em uma configuração escrita.

Por conta disso, adotamos como fonte de dados desse estudo, a fala, a escrita e os gestos dos indivíduos produzidos durante o desenvolvimento de uma tarefa de modelagem. Denominaremos a fala, a escrita e os gestos produzidos de discursos orais, discursos escritos e discursos gestuais, respectivamente e as suas produções de *produção discursiva*.

O método de pesquisa utilizado para compreensão da temática apresentada nesse estudo foi o método qualitativo. Ele é adotado, frequentemente, em função do objetivo do estudo e da natureza dos dados que o pesquisador visa ter como fonte de análise. Em particular, o método qualitativo vem sendo adotado em pesquisas que têm como fonte de dados, as crenças, significados, práticas, formas de vida e os discursos dos sujeitos (BOGDAN; BICKLEN, 1994; DENZIN; LINCOL, 2005; MILES; HUBERMAN, 1994)

O estudo que realizamos se inclui em pesquisas de cunho qualitativo, haja vista, termos como unidade de análise os discursos dos indivíduos, em particular, os discursos de um grupo de alunos e de uma professora no desenvolvimento de uma tarefa de modelagem.

Entre os possíveis procedimentos de obtenção de dados, adotamos a *observação*, pois esse procedimento nos permitiria entender o fenômeno estudado no momento de materialidade do mesmo (ALVES- MAZZOTTI, 1998; ANGROSINO, 2005). Em outras palavras, *no* momento do desenvolvimento de tarefas de modelagem. Fato importante para identificarmos a aprendizagem que se constitui na modelagem, pois analisaríamos a sua dinâmica no momento de constituição da mesma.

As observações realizadas foram registradas em vídeo. A professora Nanda desenvolveu a tarefa de modelagem com os seus alunos durante dois dias consecutivos. A filmagem do que aconteceu nesses dias durou uma hora e trinta minutos, no primeiro dia, e uma hora e cinquenta minutos, no segundo.

2.2.9 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DISCURSOS

Após as filmagens, os discursos produzidos pelo grupo de alunos e pela professora foram transcritos em sua totalidade. Contudo, selecionamos, para análise, apenas os produzidos durante o desenvolvimento da primeira, entre as cinco situações-problema propostas por Nanda na tarefa de modelagem.

Essa escolha ocorreu, após as transcrições, por completo, dos discursos produzidos e foi realizada, em virtude de termos identificado que, na realização da primeira situação-problema, os discursos apresentavam elementos importantes acerca da temática do estudo. Além disso, esse momento inicial correspondeu a uma intensa produção discursiva entre a professora e os alunos, o que não ocorreu nos demais momentos de realização da tarefa.

Após selecionarmos esse trecho relativo à produção discursiva, adotamos algumas sugestões de Chamaz (2006) relativas à maneira de analisar dados, quando estes são os discursos dos sujeitos e quando o estudo não possui categorias *a priori* a serem adotadas para a análise de dados. Podemos dizer que, essas sugestões foram assumidas como orientadoras para a escolha de realização de uma análise preliminar em nosso estudo.

As orientações de Chamaz (2006) são no sentido de que seja realizada uma análise fiel aos dados, sem orientação teórica *a priori*, a fim de que as categorias teóricas sejam criações do pesquisador e extraídas, exclusivamente, dos dados.

Todavia, nossa análise descritiva da tarefa não foi realizada sem viés teórico, porque assumidos que esse viés percorre todas as nossas escolhas e análises relativas aos dados. Por isso, optamos por denominá-la de análise descritiva, pois, além de não ser realizada sem teoria, como aponta Chamaz (2006), julgamos que não se trata somente de uma descrição, uma vez que na própria descrição já há indicativos de análises dos discursos.

Apesar de apresentarmos uma ideia diferente do que sustenta Chamaz (2006), entendemos que a busca por uma descrição dos dados, ainda que viesados teoricamente, pode nos propiciar uma análise com maiores elementos para a contraposição, confirmação, ou reelaboração das questões teóricas tratadas.

Assim, posteriormente à análise descritiva preliminar, elaboramos uma análise na qual usamos diretamente os conceitos teóricos assumidos, com base no que nos informava a produção discursiva dos indivíduos.

A seguir, apresentaremos os discursos produzidos pelos alunos e pela professora durante resolução da primeira situação-problema proposta na tarefa de modelagem, juntamente com uma análise descritiva preliminar.

As transcrições dos discursos serão apresentadas em uma sequência numerada de registros dos mesmos e da indicação de quem os produziu. Inspiramo-nos em Silva (2002) e utilizamos como marcadores de conversação, o símbolo barra (/), para indicar pausas entre orações e pausas no interior das orações. As pausas representativas de hesitação, por parte dos discursantes, serão identificadas pelo uso de reticências, da seguinte maneira: (...).

Os sinais de pontuação usados são o ponto de interrogação, o ponto de exclamação e o ponto final. Esses já são representativos de pausas, portanto não são seguidos pelo símbolo de pausa aqui adotado. Nossos comentários serão realizados entre duas chaves.

Com intuito de auxiliar a identificação dos discursos citados no corpo da análise preliminar e da análise à luz da teoria, esses discursos são apresentados nas transcrições em negrito, para diferenciá-los dos demais.

2.2.10 A ANÁLISE DESCRITIVA PRELIMINAR

A professora Nanda iniciou a aula de matemática solicitando que os alunos se organizassem em grupos. Após a formação dos mesmos, a professora distribuiu a tarefa de modelagem, por grupos e comunicou aos alunos que as respostas deveriam ser escritas em uma folha de papel que havia sido distribuída, juntamente com a tarefa.

Em seguida, Nanda leu o pequeno texto presente na tarefa de modelagem, pausando a leitura, para questionar e ouvir as respostas dos alunos referentes ao descarte que fazem de lâmpadas, pilhas e baterias de celular que não são mais úteis, o que a professora denominou de lixo eletrônico. Após um pequeno debate sobre o tema, a professora sinalizou aos alunos que já poderiam iniciar a resolução das situações-problema relatadas na tarefa.

Conforme, já sinalizamos, analisamos as produções discursivas referentes somente à resolução da primeira das situações-problema propostas, a qual possuía o seguinte enunciado: *Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?*

OS DISCURSOS DOS PARTICIPANTES	
1	Fábio: Para usar isso aqui de mil? Ô Professora como é que vai somar esse oito mil ? ((Fábio aponta para o valor 8.000 mg presente na tarefa de modelagem))
2	Nanda: Esse oito mil aqui, tem a ver com (...) Depois que ela passa pelo processo de reciclagem.
3	Fábio: com mil lâmpadas?
4	Fábio: Reciclagem de ?
5	Nanda: É(/)porque já tinham mil lâmpadas(/) quando eu obtenho delas, essas mil lâmpadas, eu tiro algumas coisas(/) Agora tente ver(/) Vamos buscar por partes(/)Qual foi a primeira pergunta? Quais são os itens dessa primeira pergunta?
6	Fábio: Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?

	(/) Então (/) Eu não sei.	
7	Ane: Mas professora vem cá (/) Quanto de mercúrio é necessário pra produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil? São recicladas seis por cento das lâmpadas.	
8	Nanda: ((Nanda fez gestos confirmando o argumento))	
9	Ane: Não professora (/)Vem cá (/) No caso aqui(/) desses seis por cento(/)nós vamos ver quanto vai ter de mercúrio ?	
10	Ane: É?	
11	Nanda: Não (/) Na primeira eu só pergunto (...) É exatamente!	
12	Fábio: Vai dizer isso aqui da reciclagem? ((Fábio apontou para o valor de 6% presente na tarefa))	
13	Ane: Agora(/) Nós temos que ver quanto ((A fala de Ane é interrompida por Nanda))	
14	Nanda: Depois que essas mil lâmpadas(/) milhões de lâmpadas vão passando pela reciclagem(/) vão ficando como subproduto essas quantidades aqui (/) entendeu? ((Nanda indicou no texto o valor de 6%))	
15	Fábio: Tem que transformar oito mil? ((Fábio respondeu a pergunta de Nanda))	
16	Ane: Não(/) Vão ser mil lâmpadas que serão produzidas(/)Não são mil? (/) Aí (/) nós vamos tirar os seis por cento?	((Concomitantemente ao discurso oral de Ane “nós vamos tirar seis por cento”, Ane produziu o discurso escrito “ 1.000- 0,06”))
17	Fábio: Vão ser milhões.	
18	Nanda: São cem milhões.	
19	Ane: Então(/)São seis por cento de cem milhões?	
20	Nanda: É	
21	Nanda: Então (/) já tem os dados da primeira questão não é?	
22	Ane: Já	
23	Nanda: Então(/) já sabe.	

De posse da tarefa de modelagem em mãos, os alunos a leram e afirmaram não saber como deveriam resolver a situação-problema. Decidem, então, pedir à professora que indique como deveriam proceder para matematizar a situação.

Os discursos anteriormente apresentados correspondem ao momento em que a professora encontrando-se no grupo, passa a ser questionada por eles. Ane apresentou inicialmente, como avaliava que a situação- problema deveria ser matematizada, perguntando: desses seis por cento, nós vamos ver quanto vai ter de mercúrio?

Podemos notar que Ane buscou produzir a resposta para a situação-problema, em função do que a professora lhe sugeriu como produção discursiva coerente à resolução. Na transcrição de número 16, Ane, além de verbalizar para a professora como a situação-problema deveria ser matematizada, relatando “nós vamos tirar os seis por cento?”, escreveu, na folha de papel, “1.000 - 0,06”.

Nanda e Fábio corrigiram Ane, somente quanto ao valor do número de lâmpadas, por ela adotado, afirmando não se tratar de mil, mas, de cem milhões. Ane, então, perguntou “são seis por cento de cem milhões”, e a professora respondeu positivamente.

Quando a professora se distanciou do grupo, Fábio reescreveu a produção escrita de Ane da seguinte maneira “100.000.000 - 0,06”. Todavia, na ausência da professora, os alunos assumiram não saber que procedimentos matemáticos realizar para desenvolverem essa

estruturação matemática. Assim, com apenas esse discurso escrito na tarefa de modelagem, os alunos pediram à professora que os auxiliasse, novamente.

Quando presente no grupo, a professora solicitou que os alunos lhe explicassem o discurso escrito que haviam formulado. Os alunos não responderam a Nanda, tão pouco a professora produziu qualquer julgamento sobre a coerência do discurso matemático dos alunos como resolução matemática legítima da situação-problema. A professora optou por indicar novamente, como a situação-problema deveria ser matematizada, em termos de notação científica.

Os alunos modificaram a maneira pela qual estruturam matematicamente problema, somente, em termos de transformação em notação científica. Embora, o grupo de alunos não tenha atingido um consenso a respeito de como estruturariam “100.000.000 -0,06” em notação científica, prevaleceu a sugestão de Fábio, que estava com a tarefa de modelagem, em mãos.

O aluno registrou na folha de anotações, a seguinte produção discursiva matemática: “ $10^8 - 0,06$ ”. Contudo, novamente, os alunos não desenvolveram matematicamente esse discurso, embora cientes de que uma operação matemática precisava ser realizada, pois várias tentativas foram empreendidas.

Devido à não identificação pelos alunos, de que procedimentos matemáticos corresponderiam a uma resolução legítima da situação-problema, os mesmos recorreram às novas sugestões da professora. As transcrições a seguir se referem ao momento em que Nanda retornou ao grupo.

OS DISCURSOS DOS PARTICIPANTES	
73	Ane: Ô professora! Professora.
74	Ane: Nós ainda não começamos!
75	Nanda: É(/) já percebi ! Estão demorando demais(/) a maioria já conseguiu.
76	Laís: É pra usar notação científica, não é? ((Enquanto pronuncia esse discurso, a aluna aponta para a expressão “ $10^8 - 0,06$ ” presente na tarefa de modelagem))
77	Nanda: É(/) Mas não importa. (/) Se vocês não sabem lidar com notação científica (/) usem o que vocês sabem.
78	Fábio: Mas assim (/) fica difícil (/) É muito complicado!
79	Nanda: Olha (/) se eu tenho cem milhões de lâmpadas (/) e eu quero tirar seis por cento de cem milhões (/) Quanto é que dá isso?
80	Fábio: Não sei.
81	Nanda: O que isso aqui ? ((Nanda apontou para a expressão “ $10^8 - 0,06$ ”)) Explica para mim.
82	Ane: Está certa essa conta?
83	Ane: É a notação científica (/) professora (/) de cem mil(/) Não é assim não?
84	Fábio: Ah (/)professora (/) está difícil!
85	Fábio: inaudível
86	Nanda: Sim ((Nanda responde ao questionamento de Ane)) (/)Mas eu estou perguntando o que é que isso aqui ((Nanda referindo-se novamente à expressão “ $10^8 - 0,06$ ”)) (/) o que isso adianta para nossa questão?
87	Fábio: Explica para nós!
88	Nanda: Mas eu já expliquei.
89	Fábio: Vou tirar zero!

Os alunos, quando questionados pela professora a respeito do porquê optaram estruturar matematicamente a situação-problema, na forma “ $10^8 - 0,06$ ”, responderam somente se tratar da notação científica sugerida pela professora. Ou seja, os alunos não apresentaram justificativas pautadas em como compreenderam a situação-problema, e sim, afirmando que assim procederam por seguirem as sugestões da professora, conforme ilustra o discurso de Ane, “É a notação científica, não é assim?”

Fábio, que estruturou a situação-problema daquela maneira, não viu sua proposta ser aprovada por Nanda. Esse fato pode ter sido visto por Fábio como a constatação de que a sua proposta não correspondia à estruturação correta da situação-problema. Diante disso, ao ser instigado pela professora para dar explicações, Fábio relatou que a situação-problema era de difícil resolução.

A professora Nanda resolveu explicar novamente como a situação-problema deveria ser matematizada pelos alunos. Ela sugeriu “se eu tenho cem milhões de lâmpadas e eu quero tirar seis por cento de cem milhões, quanto é que dá isso?”.

Mas Fábio, que não obteve avaliação positiva, quanto à sua forma de estruturar a situação-problema, alegou não saber estruturá-la, conforme sugestão de Nanda, explicitando necessitar de novas explicações. A seguir, os discursos que se sucederam, após o pedido de Fábio, de outras explicações.

OS DISCURSOS DOS PARTICIPANTES	
90	Nanda: Vocês já sabem que o número de lâmpadas.
91	Fábio: Isso está ok!
92	Nanda: Ok(/)Aí (/) eu vou tirar os seis por cento (/) Como é que eu faço? Isso é uma porcentagem (/) Como é que eu tiro seis por cento de cem milhões?
93	Fábio: Mas é muito grande(/) é muito chato.
94	Nanda: Não (/) Faça (/) Todo mundo fez e conseguiu (/) Mesmo ficando muito grande(/) Faça isso para eu ver (/) Aí (/) nós veremos o que é que faz(/) Vocês estão com medo de errar(/) Deixa aqui(/) faz de novo(/) Como é que vocês aprenderam a tirar ? A fazer com esses números mesmos?
95	Fábio: Assim ô, cem mil ((Fábio começou a escrever o discurso $100.000.000 - 0,06$))
96	Nanda: Cem milhões!
97	Fábio: Cem milhões (/) desculpa!(/) Menos zero vírgula zero seis. ((Fábio finalizou a escrita: “ $100.000.000 - 0,06$ ”))
98	Nanda: É assim que tira zero vírgula seis de cem milhões?O que é esse zero vírgula zero seis? Seis por cento, né ? Como é que eu tiro de cem milhões, seis por cento, desse total? Como é que eu tiro?
99	Fábio: ((Fábio movimentou os ombros fazendo gestos que representam não saber responder))
100	Nanda: Se tenho cem reais (/) eu tiro seis por cento(/) Quanto é que é?
101	Fábio: Se fosse eu ia fazer (/) ((O aluno produziu o discurso escrito “ $100 - 0,06$ ” em resposta a pergunta de Nanda))
102	Laís: Cem mil(/) menos zero vírgula(/) zero seis(/) Não é assim não?
103	Nanda: Dá quanto isso aí? ((Nanda questiona Fábio a respeito do discurso “ $100-0,06$ ” elaborado por ele))
104	Fábio: Eu não sei.
105	Nanda: Não sabe(/) quanto é cem menos 0,06 ?
106	Fábio: É difícil!

Na transcrição de número 92, podemos notar que, tendo em vista, os alunos ainda não terem produzido os discursos matemáticos referentes à matematização que a professora julgava ser a resposta matemática legítima para a situação-problema, Nanda reiterou a sua indicação de que discursos matemáticos devem ser mobilizados para resolvê-la.

Novamente, a professora Nanda sugeriu aos alunos “eu vou tirar os seis por cento, como é que eu faço? Isso é uma porcentagem? como é que *eu tiro seis* por cento de cem milhões?” Nessa transcrição, podemos observar que Nanda indicou que conteúdos matemáticos (a porcentagem) os alunos deveriam usar e que deveriam estruturar matematicamente a situação-problema, a partir da seguinte sugestão: tirar seis por cento de cem milhões.

Em seguida, Fábio buscou mobilizar os discursos matemáticos que correspondiam à verbalização de Nanda sobre como a situação-problema deveria ser estruturada. O discurso matemático elaborado por Fábio foi “100.000.000 - 0,06”.

Tendo como referência o sistema matemático escolar, para análise de que estrutura matemática corresponderia ao discurso oral “tirar seis por cento de cem milhões”, podemos dizer que Fábio realizou uma transcrição literal do discurso de Nanda. “Tirar” dizia respeito a realizar a operação de subtração, por isso o uso do símbolo (-) no discurso de Fábio. Enquanto que, “seis por cento” no sistema matemático escolar, deveria compreendido como a elaboração do discurso escrito “0,06”.

Após Fábio haver estruturado a situação-problema, segundo sugestão da professora, não obteve novamente aprovação da mesma. Ao invés disso, a professora questionou a estruturação de Fábio, perguntando, “é assim que tira seis por cento de cem milhões?” “Como é que eu tiro? Isso é seis por cento?”

As sucessivas perguntas da professora foram indícios para que Fábio julgasse não ter produzido o discurso correto. Então, o aluno respondeu à Nanda por meio de gestos que não sabia como “tirar seis por cento de cem milhões”. A professora Nanda, ao verificar que Fábio não havia produzido o discurso almejado, reformulou a sua pergunta para, “se eu tenho *cem reais* eu tiro seis por cento?”, quanto é que é?

Todavia, embora esteja modificada, em relação às sugestões anteriores, pois agora, a professora não falou mais de lâmpadas e sim, de dinheiro, essa nova pergunta mantém o verbo “tirar” e a expressão “seis por cento”.

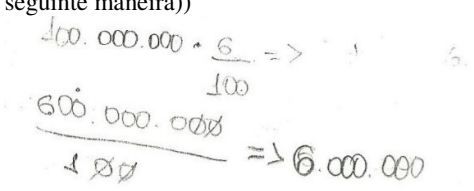
Sugerimos que para Fábio o verbo “tirar” e a expressão “seis por cento” no sistema matemático escolar, estão relacionados à operação matemática de subtração e do uso do

sistema decimal, respectivamente. Fábio diante da pergunta reformulada de Nanda, escreveu “100 - 0,06”, ou seja, estruturou, matematicamente, o novo discurso oral de Nanda, semelhantemente a sua estruturação anterior que envolvia lâmpadas.

Novamente, a professora não avaliou positivamente a estruturação de Fábio e o questionou sobre como “100-0,06” deveria ser resolvido, ou seja, que procedimentos matemáticos deveriam ser mobilizados, relativos à essa estruturação.

Talvez, perguntas não sejam comuns, quando os alunos produzem respostas corretas ao questionamento da professora, o que fez Fábio novamente identificar que sua resposta ainda não contemplava o que professora tinha como estruturação matemática correta para a situação-problema.

Julgamos que isso pode ter conduzido Fábio a responder “não sei”, quando questionado pela professora sobre o que a sua matematização significava. A seguir, apresentaremos os demais discursos produzidos, após essa resposta de Fábio.

OS DISCURSOS DOS PARTICIPANTES	
107	Nanda: Se eu pedir seis por cento de dez reais?
108	Fábio: Já sei!(/) Calma (/) Se fosse eu(/) eu ia fazer assim.
109	Nanda: Se fosse você?(/) Mas é você!
110	Fábio: Não (/) Mas se fosse eu(/) eu fazia assim (/) ((O aluno registrou na folha de anotações o seguinte discurso matemático em resposta a pergunta de Nanda: $100 \times \frac{6}{100}$ e o desenvolveu da seguinte forma: $\frac{600}{100} = 6))$
111	Ane: Dá seis!
112	Denise: É(/) dá seis!
113	Nanda: Então(/) como é que faz? ((Após essa fala Nanda se distanciou do grupo))
114	Fábio: Ah! Então é fácil!(/) Vai ser assim (/) ((Fábio apagou a operação de subtração presente no discurso (100.000.00 -0,06) e inseriu em seu lugar, a operação de multiplicação, procedendo da seguinte maneira)) 
115	Fábio: Dá seis mil ((Fábio leu o resultado como seis mil, mas manteve a escrita de seis milhões em sua folha de anotações))
116	Fábio: Está certo? ((Fábio perguntou a pesquisadora))
117	Fábio: É só isso é? ((Fábio perguntou a Ane))

Nas transcrições dos discursos apresentados anteriormente, podemos constatar que Nanda apresentou uma nova sugestão, questionando o aluno nos seguintes termos: “se eu *pedir* seis por cento *de* dez reais?”.

Essa sugestão não era referente diretamente à situação-problema, mas deveria, assim como a sugestão anterior sobre dinheiro, ser vista por Fábio como a maneira que, semelhantemente, a situação-problema relativa às lâmpadas deveria ser estruturada.

Podemos notar que o novo discurso de Nanda é diferente dos discursos anteriores. Nesse caso, o verbo “tirar” não foi mais utilizado e foi substituído por “pedir seis por cento de dez reais”. Essa nova sugestão da professora fez com que Fábio buscasse identificar que procedimentos matemáticos escolares corresponderiam a “fazer seis por cento de algo”.

Fábio associou “fazer seis por cento de dez reais” como relativo à estruturação matemática “ $100 \times 0,06$ ”, ou seja, tendo como operação matemática principal a operação de multiplicação. O uso do valor *cem*, ao invés do valor dez presente no discurso de Fábio pode ter ocorrido, em virtude da analogia com a sugestão anterior da professora.

Essa estruturação de Fábio, a partir da nova sugestão de Nanda, foi usada como modelo para a estruturação matemática da situação-problema proposta pela professora. Porém, isso ocorreu somente depois de Nanda confirmar para Fábio que essa associação poderia ser realizada, conforme podemos notar na transcrição de número 113.

Com base na anuência da professora, Fábio apagou o sinal de subtração presente no discurso escrito “ $100.000.000 - 0,06$ ” e o substituiu pelo sinal de multiplicação. Assim, a estrutura matemática para a situação-problema proposta na tarefa de modelagem foi a seguinte: $100.000.000 \times 0,06$.

Então, Fábio desenvolveu os procedimentos matemáticos relativos a essa estruturação. Após obter o resultado de seus cálculos, ele questionou à pesquisadora que realizava a filmagem e a sua colega de grupo a respeito de sua resposta ser ou não, a legítima para a situação-problema. Na ausência de confirmação de ambas, Fábio aguardou a presença da professora no grupo, a qual, além de informar que os procedimentos matemáticos adotados por Fábio estavam corretos, indicou ao grupo que outros procedimentos deveriam ser elaborados para a conclusão definitiva da situação-problema.

2.2.11 A ANÁLISE DOS DISCURSOS

Na tarefa de modelagem proposta pela professora Nanda foi solicitado aos alunos que abordassem *matematicamente* a seguinte situação-problema empírica: *Quanto de*

mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são produzidas no Brasil?

Tal abordagem matemática consistiu na utilização do sistema matemático escolar para a resolução e organização dessa situação-problema. Nanda não precisou explicitar ser esse o sistema a ser considerado modelo. No contexto escolar, talvez, ele possa ser identificado como o válido e o legítimo, pelos alunos e pelo professor, de tal forma, que nem sempre outros sistemas são adotados, pelos alunos, como modelo de análise para abordagens de situações-problema nesse contexto, conforme sugere Sfard (2008).

Embora, seja o sistema matemático escolar o sistema modelo, os alunos não identificaram, por eles mesmos, que regras do tipo *como* referentes a esse sistema seriam as regras que matematizariam a situação-problema de maneira legítima. Predominantemente, em toda a realização da situação-problema, os alunos solicitaram sugestões da professora e orientaram a sua produção discursiva estritamente vinculada a essas sugestões.

Com isso, podemos dizer que a professora era vista pelos alunos como conhecedora e avaliadora legítima das regras desse sistema. Em alguns momentos, percebemos que os alunos solicitaram as sugestões e as seguiram, somente pelo fato de partirem da professora. Silenciaram e não justificaram as suas produções discursivas, por exemplo, quando a professora não avaliou essas produções de maneira positiva.

Para Sfard (2008), os alunos imitam a produção discursiva da professora, em virtude de que as regras do tipo *como* ainda não lhes serem familiares. Na produção discursiva dos alunos que se adaptaram as mudanças discursivas da professora, identificamos que houve *uma imitação discursiva*, pois eles produziam discursos tendo sempre como modelo, a produção discursiva da professora.

Inicialmente, a professora Nanda identificou que situação-problema correspondia, em termos matemáticos, ao encontro de “seis por cento de cem milhões”. Assim, a resolução da situação-problema original, *Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil*, à luz do sistema matemático escolar, configurava-se como correspondendo à resolução de “seis por cento de cem milhões”. Denominaremos essa análise da situação à luz do sistema matemático escolar como *modo de ver* matematicamente a situação-problema, ou de *estruturação matemática da situação-problema*.

A partir de seu *modo de ver*, Nanda sugeriu, aos alunos, que a resolução da situação-problema deveria ser elaborada “tirando seis por cento de cem milhões”. Ou seja, os alunos deveriam mobilizar regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar, em particular, aquelas relacionadas a “tirar seis por cento de cem milhões”.

Constatamos que os alunos, a partir da sugestão da professora na forma de discurso

oral, buscaram transcrevê-lo, em termos escritos da seguinte maneira: “100.000.000 – 0,06”. Assim, a matematização da situação-problema envolvia mobilizar regras do tipo *como* referentes ao que designamos de *estruturação matemática*.

Os alunos estruturam matematicamente a situação-problema na forma de “100.000.000 - 0,06”, pois analisaram os usos que as palavras presentes no discurso oral da professora possuem no sistema matemático escolar. “Tirar” é um verbo que, nesse sistema, possui como regras de *uso* a realização do procedimento matemático de subtração de uma determinada quantidade de outra.

Esse uso foi simbolizado pelo sinal (-) . Também, a presença da expressão “seis por cento”, foi analisada à luz do sistema matemático escolar correspondendo à sua organização em termos decimais, da seguinte maneira: 0,06. Assim, a professora sugeriu “tirar seis por cento de cem milhões” e os alunos transcreveram essa sugestão à luz do sistema matemático escolar, produzindo a estruturação matemática “100.000.000 - 0,06”.

Contudo, para a professora, a sua sugestão, em termos orais não deveria ter sido transcrita da maneira como os alunos a realizaram. Por outro lado, os alunos poderiam, mas não desenvolvem as regras do tipo *como* relativas à estruturação matemática por eles elaborada.

A professora Nanda sugeriu, reiteradamente, que os alunos “tirassem seis por cento de cem milhões”, mas a estruturação matemática elaborada por eles, a partir dessa sugestão, não era a almejada. Julgamos que a professora estava atribuindo um *uso* às palavras presentes em sua sugestão, diferente do uso que estava sendo atribuído pelos alunos.

Podemos denominar essa incompatibilidade entre as regras que regem a produção discursiva dos alunos e as que regem a produção discursiva da professora, de conflito *conflito commognitivo*. Um conflito que, diferentemente do que sugere Sfard (2008), foi ocasionado pelo uso que a professora estava atribuindo às palavras, e não os alunos.

Sfard (2008) destaca que a incompatibilidade entre as produções discursivas do professor e as dos alunos ocorre em virtude de que os alunos atribuem, às palavras, usos peculiares a outros sistemas. Todavia, poderíamos sugerir que os alunos podem atribuir, às palavras, usos relativos ao sistema matemático escolar, conforme o exemplo do uso da palavra *tirar* realizado pelo aluno Fábio.

Nesse sentido, essa situação de incompatibilidade se constituiu porque os usos atribuídos pelos alunos não eram legítimos, em relação à resolução da situação-problema. Com isso, apontamos que as razões para a ocorrência de incompatibilidades entre as produções discursivas do professor e dos alunos, podem ser mais diversas, em relação às

indicações de Sfard (2008).

Julgamos que o *conflito commognitivo* se tornou explícito na constatação de Fábio a respeito de que a sua estruturação matemática não contemplava, ainda, aquela aceita e avaliada pela professora como legítima. Sugerimos que essa constatação ocorria quando a professora não avaliava positivamente a maneira pela qual o aluno estruturara a situação-problema e optava por repetir as suas sugestões.

A professora resolveu modificar o seu discurso, diante da constatação de que as suas sugestões não estavam gerando produções discursivas legítimas relativas à situação-problema, pelos alunos. Com vistas a Fábio realizar uma associação entre a sua nova sugestão e a maneira pela qual a situação-problema original deveria ser estruturada, a professora resolveu utilizar outras temáticas a serem matematizadas, talvez julgando estarem mais relacionadas ao cotidiano dos alunos, sugerindo “como é que tira seis por cento de cem *reais*?”.

A professora optou por outra temática, dinheiro e não lâmpadas, mas manteve as palavras que possuem regras do tipo *como* já estipuladas no sistema matemático escolar, por exemplo, as palavras *tirar* e a expressão *por cento*. Para nós, isso justifica o fato de Fábio atribuir a essas palavras, as mesmas regras que atribuiu anteriormente, quando a sugestão da professora abordou cem milhões de lâmpadas ao invés de dinheiro, escrevendo “100-0,06”.

Diante disso, podemos concluir que os temas usados na estruturação da situação-problema (lâmpadas ou dinheiro) não são tidas, pelos alunos, como relevantes para matematização das mesmas, e sim, as regras que orientam os usos das palavras presentes na situação-problema. Essa questão pode ser indicativa de que os alunos adotam a *forma de vida*, à qual o sistema matemático está vinculado, como sistema modelo pelo qual a situação-problema deve ser matematicamente entendida.

Haja vista a estruturação matemática de “100 - 0,06” não ser a estruturação que a professora almejava como estruturação semelhante àquela que deveria ser produzida para a situação-problema relativa às lâmpadas, ela modificou novamente o seu discurso, questionando o aluno “se eu pedir seis por cento de dez reais?”.

Fábio analisou essa nova sugestão de Nanda, também com base no sistema matemático escolar. Possivelmente, Fábio já havia identificado, que no sistema matemático escolar, “a obtenção da porcentagem *de* um valor” está relacionada ao *uso* da operação matemática de *multiplicação*.

Diante disso, Fábio escreveu, como resposta, “se eu pedir seis por cento de dez reais”

a estruturação matemática “ $100 \times 0,06$ ”⁴⁹ e elaborou um conjunto de regras do tipo *como* relacionadas a esse procedimento matemático.

Tendo em vista que a professora manteve a *estratégia* de indicar a Fábio que as regras do tipo *como* relativas a sua nova sugestão eram *semelhantes* às regras do tipo *como* que o aluno precisaria desenvolver para a resolução da situação-problema, Fábio apagou o sinal da operação de subtração presente na sua estruturação matemática “ $100.000.000 - 0,06$ ” e o substituiu pelo sinal multiplicação, desenvolvendo as regras do tipo *como* relativas a essa estruturação.

Essas questões nos permitem analisar algumas delimitações relativas ao *conflito commognitivo*. Além de o mesmo haver sido instaurado pelas regras que estavam regendo a produção discursiva da professora, entendemos que o conflito foi dirimido pelas mudanças na produção discursiva da professora.

Em particular, podemos identificar que a mudança discursiva da professora significou uma mudança na própria estrutura de seu discurso. Ela precisou usar outras palavras, as quais eram regidas por outras regras relativas ao sistema matemático escolar que não aquelas anteriores abordadas. Com isso, sugerimos que as mudanças geradas pelo *conflito commognitivo* não são apenas mudanças nas regras que regem a produção discursiva, mas na própria estrutura da produção discursiva.

Assim, o conflito foi dirimido, somente, quando Nanda apresentou outra estrutura aos seus discursos. Uma estrutura em que ambos, a professora e Fábio, atribuíam às mesmas regras do tipo *como* às palavras presente nas sugestões de Nanda.

2.2.12 IDEIAS CONCLUSIVAS

Neste artigo tivemos por objetivo identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem. Entendemos que essa aprendizagem corresponde à mobilização de regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar para organização de situações-problema de natureza empírica. A aprendizagem na modelagem diz respeito à aprendizagem de uma maneira de *ver* essas situações.

Todavia, identificamos que a aprendizagem das regras relativas a esse sistema devem ser abordadas em conjunto com a identificação de *quando*, em que circunstâncias a adoção

⁴⁹ Conforme citamos anteriormente, Fábio pode ter utilizado o valor cem, ao invés de dez, conforme constatava na nova sugestão da professora, por ter mantido vínculo com a sugestão anterior de Nanda referente a “tirar seis por cento de cem reais”.

das regras do tipo *como* é legítima e para quais finalidades.

Apesar de notarmos que os alunos podem identificar ser o sistema matemático escolar o sistema legítimo de ser abordado no contexto escolar, eles não produziram, por eles mesmos, as regras do tipo *como* relativas à matematização da situação. A grande maioria da produção discursiva dos alunos foi elaborada com base nas sugestões da professora.

Essa questão pode ser justificada pelo fato que, em modelagem, os alunos não dispõem de esquemas prévios de resolução das situações-problema (BARBOSA, 2006; BURAK, 2004). Ou seja, a situação-problema abordada em modelagem não é uma situação em que é disponibilizado, antecipadamente, um conjunto de critérios pelos quais as situações-problemas podem ser analisadas matematicamente.

Nessa direção, as *estratégias da situação* sugeridas por Leiss et al. (2010) são importantes para o desenvolvimento da tarefa de modelagem pelos alunos. Podemos observar todavia, que as sugestões do professor foram relevantes durante toda a realização da tarefa de modelagem, e não apenas na fase inicial, conforme apontaram os autores.

Assim, optamos por denominar as sugestões dos professores relativas ao desenvolvimento da tarefa de modelagem pelos alunos de *estratégias de modelagem*. Essas estratégias se referem às escolhas do professor em termos de estratégias adotadas para auxiliar os alunos na abordagem da situação-problema proposta.

Em particular, entre outras estratégias adotadas pela professora, a qual, analisamos os seus discursos, destacamos a sua opção por apresentar aos alunos uma estruturação matemática cujas regras do tipo *como* eram regras *semelhantes* aquelas específicas da situação-problema, evitando assim, apresentar, diretamente a estruturação da situação-problema aos alunos.

Tendo em vista que a produção discursiva do professor é tomada pelos alunos como modelo de quais regras relativas ao sistema matemático escolar devem ser produzidas, arguimos em torno de maiores estudos a respeito da maneira como a configuração do discurso do professor molda a produção discursiva dos alunos.

Além disso, apontamos que outras regras relativas aos usos da linguagem podem configurar a produção discursiva dos alunos e não somente aquelas relativas aos usos das palavras peculiares ao sistema matemático escolar.

Como por exemplo, o silêncio da professora, a sua não avaliação quanto à produção discursiva dos alunos, a repetição de suas sugestões podem se constituir como regras que também orientam que produção discursiva os alunos devem elaborar na matematização da situação-problema.

Assim, a aprendizagem matemática na modelagem *vista* como a aprendizagem de regras relativas ao sistema matemático escolar, sugere o quanto essa aprendizagem envolve um conjunto de regras não somente relacionada a esse sistema, mas a toda *forma de vida* em que ele está vinculado.

Agradecimentos

Agradecemos à professora e aos alunos cujos discursos foram analisados, por terem aceitado participar da pesquisa, a qual este artigo integra. Aos pais e/ou responsáveis legais dos alunos, por permitirem a realização das filmagens e a obtenção dos dados para a pesquisa, bem como à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro à pesquisa, a qual esse artigo integra.

Também somos gratos aos comentários emitidos pelos professores Aurino Ribeiro Filho, Adilson Oliveira do Espírito Santo, Antônio Miguel, José Luís de Paula Barros Silva e a professora Denise Silva Vilela.

Pela mesma razão, agradecemos aos participantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Bahia, Ana Virginia de Almeida, Flávia Cristina Santana, Jamille Vilas Boas, Maria Raquel Queiroz, Maiana da Silva e Thaine Sousa.

Referências

ALVES - MAZZOTTI, A.J. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, p.107-188, 1998.

ANGROSINO, M. V. Recontextualizing observation: ethnography, pedagogy, and the prospects for a progressive political agenda. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.) *Handbook of qualitative research*. 3. ed. Thousand Oaks: Sage, 2005, p. 729-745.

ARAÚJO, J.L. A relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 17-32.

ARAÚJO, J. L. Pesquisas sobre modelagem em eventos científicos recentes de educação matemática no Brasil. In.: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., Brasília. *Anais....* Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009. 1. CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. In: SEMINÁRIO

INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. *Anais...* São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 161-174.

BARBOSA, J. C; CALDEIRA, A.D; ARAÚJO, J.L (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007.

BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. Modelagem matemática: uma mudança de base conceitual. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto, *Anais...*, 2007. 1. CD- ROM.

BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BISOGNIN, E; BISOGNIN, V. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Edue, 2011, p. 123-140.

BLUM, W. et al. *Modelling and Applications in Mathematics Education: the 14th ICMI study*. New York: Springer, 2007.

BLUM, W; FERRI, R. Mathematical modeling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, p. 45-58, 2009.

BOGDAN, R.C; BIKLEN, S.K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto LDA, 1994.

BURAK, D. Modelagem matemática na sala de aula. In.: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2004, Londrina. *Anais...* Paraná: UEL, 2004.1. CD-ROM.

BURAK, D; KLUBER, T. E. Encaminhamentos didáticos-pedagógicos no contexto de uma atividade de modelagem matemática para a educação básica. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Edue, 2011, p.65-81.

CHARMAZ, K. *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis*. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2006.

CHAVES, M. I A. *Modelando questões ambientais relacionadas com a água a propósito do*

ensino- aprendizagem de funções no 1º ano do ensino médio. 2005. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

DANTE. L. R. *Matemática*. São Paulo: Ática. 1 ed, 2004.

DENZIN, N.K; LINCOLN. Y.S. *The sage handbook of qualitative research*. 3ª Ed.. Thousand Oaks: Sage, 2005.

FERREIRA, D.H.L; WODEWOTZKI, M.L.L. Questões ambientais e modelagem matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental. In.: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 115-132.

FERRUZI, E.C; ALMEIDA, L. M. W de. Modelagem matemática: contexto para a construção do conhecimento matemático. In.: SEMINÁRIO NACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 4.,2009, Brasília, *Anais...*, Brasília: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2009, 1. CD-ROM.

GOTTSCHALK, C. M. C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. *Cadernos de História e Filosofia das Ciências*, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul- dez, 2004a.

GOTTSCHALK, C. M. C. Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004b, São Paulo, *Anais...*, 2004b.1.CD ROM.

GOTTSCHALK, C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Cadernos Cedes*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GLOCK, H.J. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

HARRÉ. R; TISSAW. M.A. *Wittgenstein and Psychology*. A practical guide. ASGATE: ENGLAND, 2005.

JESUS, W.P. de J. *Educação Matemática e filosofias sociais da Matemática: um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest*. 2002. 212 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

KAISER, G; SCHWARZ, B.. Authentic modeling problems in mathematics education- examples and experiences. *Journal Mathematics Didatik*, v. 31, p. 51- 76, 2010.

LEISS, D. et al. The role of the situation model in mathematical modelling- task analyses, student competencies, and teacher interventions. *Journal Mathematics Didatik*, v. 31, p. 119- 141, 2010.

MAAß, K. What are modelling competencies. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

MIGUEL, A; VILELA, D. S; MOURA, A. R. L. Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké*, v. 18, p.129- 203, 2010.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. N. *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. 2. ed. Thousand Oaks: Sage, 1994.

MORENO, A. Descrição fenomenológica e descrição gramatical - ideias para uma pragmática filosófica. *Revista Olhar*, v. 7, n. 7, p. 94-139, 2003.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. In: LESS et al. (Orgs.). *Modeling student mathematical modeling competences: 13 ICTMA*. New York: Springer, 2010. p. 43-59.

SANT'ANA, M. F. Modelagem de experimento e ensino de cálculo. In.: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 149 - 160.

SANTOS, L. M.M; BISOGNIN. Experiências de ensino por meio da modelagem matemática na educação fundamental. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 99- 114.

SFARD, A. When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint . *The Journal of the learning Sciences*, v. 16, n.4, p. 567- 615, 2007.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: university press, 2008.

SILVA. M. C. F. Pausas em textos orais e espontâneos e em textos falados. *Linguagem em discurso*. v.3., n. 1, p. 111- 133. jul-dez, 2002.

SILVEIRA, E; CALDEIRA, A.D. Modelagem matemática: é possível fazer sem saber?. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, *Anais...*, Salvador, 2010. 1. CD-ROM.

SMITH, S. D. C. *Modelagem matemática gerando um ambiente de ensino e aprendizagem para a educação de jovens e adultos*. 2008. 106f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

SONEGO, V.G. BISOGNIM, E. As contribuições da etnomodelagem matemática no estudo da geometria espacial. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.

SOUSA, D.B; REGO, M.R. A modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem de conteúdos geométricos no 7º ano de ensino fundamental. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: Sociedade Brasileira de Educação matemática, 2010, 1. CD-ROM.

SOUZA,E.G; BARBOSA. Modelar matematicamente uma situação-problema: um enfoque participacionista.In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 6.,2009, Londrina.*Anais...* Paraná, 2009, 1 CD-ROM.

SWAN, M. et al. The roles of modeling in learning mathematics. . In: BLUM, et. al., *ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education – discussion document*, 2007. p. 275-284.

VERTUAN, R.E; ALMEIDA, M. L W de. O uso de diferentes registros em atividades de modelagem matemática. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 5.,2007, Ouro Preto. *Anais...*Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto e Universidade Federal de Belo Horizonte, 2007. 1 CD-ROM

VILELA, D. S. *Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática*. 247f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2007.

VILELA, D. S. Elementos para uma compreensão das matemáticas como práticas sociais. In.: MIORIM, M.A; VILELA, D. S. (Org.). *História, filosofia e educação matemática: práticas de pesquisa*.Campinas: Editora Alinea, 2010, p. 89-125.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

ARTIGO 3

AS IMPLICAÇÕES DA IDEIA DE *USO* DE WITTGENSTEIN PARA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo

Este artigo tem como objetivo identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática em âmbito escolar. Nesse âmbito, a modelagem matemática pode ser compreendida como a abordagem de situações-problema reais, por meio de conteúdos matemáticos escolares. Essa temática se fundamenta, filosoficamente, na ideia de significação do filósofo Ludwig Wittgenstein como sendo o *uso* que atribuímos às palavras. A partir desse entendimento, analisamos as definições teóricas que Anna Sfard apresenta sobre a aprendizagem matemática no âmbito escolar. Realizamos um estudo de natureza qualitativa, no qual, analisamos os discursos de um grupo de alunos e de um professor produzidos durante a implementação da modelagem. A análise desses discursos, a partir das ideias de ambos os autores, permitiram-nos apontar que a aprendizagem matemática na modelagem é caracterizada pela identificação das semelhanças entre os usos pelos quais as palavras são mobilizadas em âmbito escolar e os usos das palavras sugeridos pela situação-problema abordada em modelagem. Também identificamos a dinâmica relativa a como o professor apresenta esses usos aos alunos e como os mesmos seguem as orientações do professor. Por fim, discutimos as implicações das considerações sobre aprendizagem matemática na modelagem suscitadas no estudo para as argumentações a respeito da implementação da modelagem matemática em âmbito escolar.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática. Aprendizagem Matemática. Uso. Gramática.

THE IMPLICATIONS OF THE IDEA OF THE USE OF WITTGENSTEIN FOR THE MATHEMATICS LEARNING IN THE MATHEMATICAL MODELLING

Abstract

This paper aims to identify that mathematics learning is constituted in mathematical modelling in the school context. Thus, mathematical modelling could be understood as the real problem-solving approach, through school mathematical contents. This issue is based on a philosophical idea of signification by Ludwig Wittgenstein as being the *use* that we can attribute to the words. From this point of view, we have analyzed the theoretical definitions about mathematical learning in the school context presented by Anna Sfard. We have carried out a qualitative study in which we have analyzed the discourses of a group of students and of a teacher produced during the implementation of the modelling. The analysis of those discourses, based on the theoretical and philosophical framework of Ludwig Wittgenstein and Anna Sfard, allowed us to realize that mathematics learning in the modelling is characterized by the identification of the similarities of the use by which the words are mobilized in school context and the use of the words suggested by the solving-problem situation approached in modelling. We have also identified the way the teacher addresses that use to the students as well as how the students follow the teacher's instructions. Finally, we have discussed the implications of the considerations of mathematics learning in mathematical modelling suggested in this study for the argumentation on the implementation of mathematical modelling in the school context.

Keywords: Mathematical Modelling. Mathematics learning. Use. Grammar

2.3.1 INTRODUÇÃO

Um dos argumentos para o ensino da matemática em âmbito escolar é possibilitar que os alunos *usem* a matemática que aprendem na escola ou parte dela, em sua vida cotidiana, em seu ambiente de trabalho, no uso das tecnologias, nas demais ciências etc (ARAÚJO, 2010; BLUM; FERRI, 2006; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; MAAB, 2006). Alguns autores destacam que além desses argumentos, o ensino da matemática deve proporcionar que os alunos critiquem a maneira que a matemática é usada em diversos argumentos produzidos na sociedade (ALRØ; SKOVSMOSE, 2002; BARBOSA, 2006; JACONIBIN, 2004).

Essas argumentações sobre os objetivos do ensino da matemática estão presentes, explicitamente, em alguns documentos oficiais de recomendações curriculares de alguns países. É o caso, por exemplo, do documento curricular elaborado pelo National Council of Teachers of Mathematics⁵⁰ (NCTM), uma entidade de professores dos Estados Unidos que, entre outros objetivos curriculares, aponta que os alunos vinculados ao sistema educacional norte-americano devem ser hábeis em aplicar a matemática escolar em contextos externos a escola (NCTM, 2000). Também, no Brasil, podemos identificar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a recomendação de que os alunos devem utilizar a matemática aprendida na escola em situações extraescolares (BRASIL, 2002).

O programa internacional de avaliação de estudantes (PISA) que avalia as competências dos alunos de diferentes países, incluindo o Brasil, nas áreas de matemática, língua portuguesa e ciências, destaca que uma das competências avaliadas na área da matemática é a capacidade dos alunos em “identificar e entender o papel da matemática *no mundo*, para fazer julgamentos bem-fundamentados, para usar e engajar a matemática *nas necessidades de sua vida* [...]” (PISA, 2009, p. 14, tradução nossa, grifos nossos).

Nesse contexto, a modelagem matemática⁵¹ tem sido vista como propícia para contemplar tais objetivos de ensino da matemática no contexto escolar, pois, de maneira geral, a modelagem em âmbito escolar, diz respeito à abordagem de situações-problema reais, utilizando conteúdos matemáticos escolares.

Pautados nessa peculiaridade, algumas pesquisas documentam que quando esses conteúdos são atrelados às situações da realidade, por exemplo, possibilita que os alunos

⁵⁰ Conselho Nacional de Professores de Matemática.

⁵¹ Em alguns momentos, usaremos somente o termo modelagem em substituição à expressão modelagem matemática.

percebam a utilidade da matemática escolar e a usem para além do contexto da escola (ARAÚJO, 2010; BARBOSA, 2006; BLUM; FERRI, 2009; KAISER; SCHWARZ, 2010).

Porém, se por um lado, encontramos na literatura argumentações em torno da aprendizagem matemática proporcionada pela modelagem em aulas de matemática, por outro lado, constatamos poucas pesquisas que possuem como foco tematizar que aprendizagem matemática se configura na modelagem em âmbito escolar.

Adotamos como orientação filosófica a ideia de *uso* delineada por Wittgenstein (1999)⁵² e de aprendizagem matemática de Sfard (2008), os quais discutiremos ao longo do artigo. Essas ideias orientam o objetivo desse artigo que é: *Identificar que aprendizagem matemática se constitui quando na implementação da modelagem matemática em âmbito escolar.*

A palavra constituir está sendo usada nesse artigo em seu sentido etimológico, significando, formar, criar, gerar, estabelecer. Temos o objetivo de identificar que aprendizagem matemática é gerada na realização da modelagem, ou seja, que aprendizagem a modelagem promove, forma, ou constitui.

Iniciamos por descrever, a delimitação de *uso* apresentada por Wittgenstein (1999) e em seguida, apresentaremos o entendimento que o filósofo sustenta quanto ao papel da matemática na maneira de configurar nossas experiências no mundo.

2.3.2 A IDEIA DE USO EM WITTGENSTEIN

Uma das propostas de Wittgenstein, em seu livro *Investigações Filosóficas*, é nos apontar a existência de “mal-entendidos” relativos à maneira pela qual usamos as palavras (WITTGENSTEIN, 1999, §90). Esses mal-entendidos que também podemos denominar de confusões conceituais (VILELA, 2007) podem ser afastados e diluídos pela nossa análise de como as palavras são usadas nas mais diversas situações, as quais vivenciamos.

Para o filósofo, a filosofia tem o papel de indicar esses múltiplos usos e possibilitar o afastamento de mal-entendidos referentes aos usos das palavras. Por conta disso, as ideias de Wittgenstein (1999) são também designadas de “terapia gramatical” (MORENO, 2003, p. 95), ou de terapia filosófica (MIGUEL; VILELA; MOURA, 2010; VILELA, 2007).

⁵² Além do próprio livro do filósofo, *Investigações Filosóficas*, adotamos os entendimentos de alguns comentadores de sua obra, principalmente, aqueles cujos estudos são referentes ao campo da Educação Matemática. Os artigos dos comentadores adotados nesse artigo são: Gottschalk (2004a, 2004b, 2008), Glock (1998) Vilela (2007, 2010), Jesus (2002), Moreno (2003, 2005), Miguel, Vilela e Moura (2010) e Harré e Tissaw (2005).

Uma das confusões conceituais apontadas por Wittgenstein (1999) se refere ao entendimento referencial de linguagem. Essa compreensão referencial de linguagem foi exemplificada em Wittgenstein (1999, §1), por meio da seguinte assertiva “[...] cada palavra tem uma significação. Esta significação é agregada à palavra. É objeto que a palavra substitui”.

Esse entendimento referencial de linguagem embute à ideia de que a linguagem possui fundamentos estáveis e autônomos e esses se referem às entidades extralinguísticas, sejam elas ideais, mentais ou materiais. Também, podemos atribuir a tal entendimento, a noção de linguagem como mero sistema simbólico cuja função se restringe a expressar essas entidades.

Wittgenstein (1999) se opôs reiteradamente as ideias decorrentes da compreensão referencial de linguagem. A sua oposição não se deve somente a constatação das inúmeras palavras, as quais, tal entendimento não pode ser adotado, por serem palavras que não possuem os supostos objetos que as substituem. Como por exemplo, os dêiticos, ali, aqui, lá, isto, etc., ou ainda palavras como: oi, boa noite, mal, vida, entre outras.

O filósofo não adere ao entendimento referencial de significação, sobretudo porque, em seu processo de *terapia gramatical*, identifica que é *na e pela* linguagem que as palavras adquirem significação. A significação não deve ser analisada, fora do domínio da linguagem, quer seja nos objetos materiais, ideais ou mentais, em que a linguagem é concebida com a função somente de representá-los. Wittgenstein (1999) sustenta que a significação das palavras deve ter a *linguagem* como fonte de análise e de constituição.

Por exemplo, destaca Wittgenstein (1999, §57, 58) que a significação da palavra *vermelho*, não advém do objeto ou de algo da cor vermelha, pois esses objetos podem não existir, ou ainda, podemos não ter a experiência visual necessária a identificação desses objetos, mas ainda assim, a palavra *vermelho* pode ser *usada com sentido*, ou seja, para a extensão de um objeto de cor vermelha⁵³.

Assim, as ideias de Wittgenstein (1999, §43) nos sugerem que a significação de uma palavra corresponde ao *uso* que dela faz sentido empregar em uma determinada linguagem, ou seja, a significação das palavras deve ter como análise e identificação o *uso* das mesmas.

⁵³ Um indivíduo que não possui a experiência visual, pode, por exemplo, identificar a cor de um objeto, por meio da sua forma e não pela pigmentação. Além disso, embora as palavras relativas às cores serem *usadas*, em virtude de uma determinada pigmentação de um objeto, não é a existência desse objeto que assegura o *uso* dessas palavras. O objeto pode não mais existir, mas a palavra *vermelho* pode ser usada *com sentido*, exemplifica Wittgenstein (1999). Por outro lado, se eu esqueço o uso da palavra, ou seja, que ela é usada para objetos que possuem determinada cor, o objeto pode até existir, mas a palavra não será usada, a palavra perde a sua significação. É identificando essas questões que Wittgenstein (1999) aponta que a significação das palavras deve ter a maneira como elas são *usadas* como fonte de análise e constituição e não, o próprio objeto.

Algumas palavras são usadas para denominar *objetos*⁵⁴, mas essa questão deve ser compreendida em termos de *uso* das palavras. Denominar objetos é apenas um dos usos possíveis que se pode atribuir às palavras. Existem palavras que são usadas para dar ordens, outras para saudar a um amigo, para identificar um local no corpo onde se sente determinadas sensações, como a expressão dor de cabeça, etc.

Wittgenstein (1999) denominou de *gramática* aos usos, *com sentido*, de uma determinada palavra. Assim, *gramática das cores*, por exemplo, refere-se aos usos que empregamos *com sentido* às palavras relativas às *cores*, como a própria palavra *cor* ou ainda, palavras relativas à *tonalidade*. Tem sentido dizermos cor dos olhos, por exemplo, mas não tem sentido dizermos cor do vento, cor da dor, etc.

As ideias de Wittgenstein (1999) nos sugerem que devemos compreender uma *gramática* a partir da *forma de vida*, a qual determinado uso das palavras está vinculado (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; JESUS, 2002; VILELA, 2007, 2010). Estar vinculada, diz respeito ao fato de que os usos que atribuídos às palavras não advêm de um consenso comunitário arbitrário, mas são decorrentes e relacionados às crenças, aos valores, às concepções de mundo, etc., os quais os indivíduos que usam as palavras de determinado modo estão vinculados. *Forma de vida* na definição de Moreno (2003, p. 129) pode ser entendida como “sistemas que se entrecruzam hábitos, atitudes, éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões de vontade”.

Essas questões nos permitem compreender que os usos que fazem ou não, sentido atribuímos às palavras, dependem da *forma de vida* em que esses usos se instituem. *Gramáticas* distintas podem ser indicativos de *formas de vida*, também distintas em que tais *gramáticas* estejam ancoradas.

O uso das palavras no interior de qualquer *forma de vida*, não é arbitrário, ou seja, não é qualquer um, nem é um uso fixo e definidamente delineado por critérios. Essa não aleatoriedade do uso das palavras é caracterizada pelo entendimento de que os usos das palavras vinculadas às *formas de vida* são usos regidos por *regras* (GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; HARRÉ; TISSAW, 2005; JESUS, 2002; MORENO, 2003, 2005; VILELA, 2007).

Regras em Wittgenstein (1999) possuem uma conotação distinta da ideia clássica de

⁵⁴ Ressaltamos que a compreensão de que algumas palavras serem usadas para denominar objetos, não reintroduz uma visão referencial de linguagem, haja vista, essa última significar o entendimento de que a significação das palavras advém dos objetos (de sua característica física, espacial) e esses são entidades independentes da linguagem, que é vista apenas como um conjunto simbólico que expressa essas entidades. A ideia de *uso* concebe o denominar os objetos, como um dos usos possíveis da linguagem, como uma das finalidades as quais instituímos que as palavras podem ser usadas.

regras, como estipulações fixas e imutáveis. Inicialmente, a indicação da existência de regras nos usos das palavras visa justamente ressaltar que quando nos referirmos aos usos das palavras esses usos não são quaisquer e estão sob as delimitações de *forma de vida*.

As regras gramaticais, ou seja, as regras relativas a como as palavras devem ser usadas, para que seu uso seja, um uso *com sentido* no interior de uma *forma de vida*, devem ser concebidas como regras indicadoras de direção. As regras não devem ser adotadas como critério fixo e absoluto pelo qual determinado uso da palavra faz sentido. Isso porque regras que regem o uso das palavras se modificam, contingencialmente e muitas modificações culminam no próprio desuso das palavras ou na ampliação dos usos⁵⁵.

Nesse artigo, temos como objetivo identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem em âmbito escolar. Em particular, identificaremos a aprendizagem dos usos das palavras que se constitui na modelagem. Denominaremos esses usos somente de *usos das palavras* ou ainda de *gramática das palavras*, mas ambas as expressões devem ser entendidas como *usos* regrados das palavras.

A seguir, apresentaremos compreensões sobre os usos das palavras que se caracterizam como usos peculiares à matemática, designada no contexto escolar de matemática escolar à luz da compreensão de matemática, apresentada por Wittgenstein⁵⁶.

2.3.3 UM USO DA LINGUAGEM : O USO MATEMÁTICO

Em consonância com a busca de descrever os usos efetivos da linguagem, Wittgenstein⁵⁷ discorre sobre matemática, evidenciando o papel que os enunciados matemáticos possuem na organização de nossas experiências no mundo.

Para o filósofo, apesar de uma aparência descritiva, os enunciados matemáticos não descrevem a realidade empírica ou nossas experiências no mundo, pois tais enunciados não são universais e invariavelmente, aplicáveis e descritíveis de qualquer experiência humana.

No entendimento de Wittgenstein, os enunciados matemáticos possuem função de

⁵⁵ Quando nos referirmos aos usos das palavras, dispomos e podemos explicitar um conjunto finito de usos possíveis. Contudo, tais usos não englobam em absoluto e em definitivo, todos os usos.

⁵⁶ Ressaltamos que as considerações de Wittgenstein sobre matemática não foram disciplinares ou tipificantes de quaisquer ordem. Elas se referem às considerações sobre matemática, unicamente. O que nos conduz ao entendimento de que o filósofo visou identificar certa função, no uso da linguagem caracterizado como um uso matemático. Portanto, o que denominaremos de matemática *escolar*, corresponde à nossa delimitação realizada com inspiração nas ideias de Wittgenstein.

⁵⁷ Optamos por não referenciar uma obra específica de Wittgenstein, haja vista que as ideias que nós atribuímos ao filósofo, nessa seção, não serem somente advindas de compilações de seu livro *Investigações Filosóficas*, mas também são decorrentes de entendimentos relatados pelos comentadores de Wittgenstein, adotados no artigo.

normatizar, de serem *normas, sistemas* para a organização de nossas experiências no mundo (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; JESUS, 2002; VILELA, 2007, 2010), o que proporciona que nossas experiências adquiriam determinado modo de apresentação.

Nessa direção, os enunciados geométricos, por exemplo, o enunciado que define a figura geométrica retângulo, como um quadrilátero que possui quatro lados e lados paralelos iguais é um enunciado normativo, em outras palavras, é adotado como sistema, que usamos na descrição e identificação da forma geométrica dos objetos e espaços ao nosso redor. Com base em tal enunciado, podemos afirmar que nossa parede possui o formato de retângulo, pintar e organizar os móveis em nossa sala, a partir de tal entendimento, etc.

É com base nessa análise que os enunciados matemáticos são concebidos como *sistemas*, os quais podemos usar para organizarmos e orientarmos nossa experiência no mundo, a partir de um determinado aspecto, aquele proporcionado pelo enunciado. Por conta disso, os enunciados matemáticos não ditam como uma coisa é; ser normativo implica que os enunciados matemáticos indicam como uma coisa “deve ser”, caso eu adote tais enunciados (VILELA, 2007, p. 153).

Os enunciados matemáticos são as *normas/sistemas* adotadas para organizarmos essas *experiências*, por isso, as próprias experiências não refutam, ou seja, não invalidam os enunciados matemáticos (GLOCK, 1998; GOTTSCHALK, 2004a, 2004b, 2008; JESUS, 2002; VILELA, 2007, 2010). Caso identifiquemos, por exemplo, que a parede analisada, não possua os lados exatamente iguais e paralelos, conforme preconiza o enunciado matemático que identifica uma figura geométrica como retângulo, isso não invalida o enunciado matemático⁵⁸. Diante dessa constatação, podemos optar por outro enunciado ou ainda, mantermos a sua utilização, em virtude da mesma não nos gerar transtornos ou implicações de ordem prática.

Existem outros enunciados matemáticos que podem ser adotados como modelo de organização de nossas experiências no mundo. A pesquisa de Vilela (2007) sobre as diferentes matemáticas (da rua, dos camponeses, dos agricultores, etc.) são indicativas de diferentes sistemas, que podem ser usados para organizar nossas experiências no mundo. A partir do estudo da autora, podemos indicar que a constatação da existência de diferentes sistemas matemáticos normativos é indicativa da existência de diferentes *formas de vida*, as quais esses

⁵⁸ Os enunciados matemáticos são os próprios *padrões de correção*, não sendo, portanto, passíveis de correção, com base nas situações em que os enunciados foram tomados como *padrão de correção*. A refutação dos enunciados matemáticos é realizada com base na coerência interna dos enunciados. Não estamos apontando, que os enunciados matemáticos são totalmente independentes da experiência. Glock (1998) ressalta, por exemplo, que mudanças em certos fatos podem tornar a escolha de determinados enunciados pouco práticas ou ainda inaplicáveis.

sistemas estão individualmente vinculados.

Essa pesquisa tem como objetivo identificar que aprendizagem de usos de palavras é constituída na modelagem implementada no contexto escolar. Nesse contexto escolar, predominantemente, apenas *uma matemática* é adotada como sistema modelo pelo qual, as situações-problema elaboradas podem ser organizadas. Essa matemática será denominada, por nós, de matemática escolar.

Na seção seguinte, tematizaremos, a aprendizagem de usos de palavras, usos que são relativos ao sistema matemático escolar, com base em algumas definições de Anna Sfard a respeito da aprendizagem matemática em âmbito escolar.

2.3.4 A APRENDIZAGEM DO USO DAS PALAVRAS

Este artigo tem como objetivo compreender uma específica aprendizagem matemática, a aprendizagem dos usos que orientam as palavras mobilizadas em uma aula de matemática que possui como *sistema normativo, o sistema matemático escolar*. Denominamos de sistema matemático escolar, um conjunto regrado de usos da linguagem relacionado a uma particular *forma de vida*, abordado no contexto escolar com *status* de disciplina.

Contudo, a aprendizagem matemática não se restringe ao aprendizado do uso das palavras. Muitos outros *usos regrados da linguagem* envolvem esse aprendizado como: a aprendizagem da maneira de formular perguntas, de como os alunos devem organizar as respostas dos problemas na folha de anotações, a aprendizagem da estrutura de abordagem dos assuntos em matemática (geralmente a estrutura é de conteúdos e exercícios), aprendizagem de que momentos formular perguntas ao professor ao longo das aulas, etc.

Nessa direção, os estudos de Sfard (2007, 2008) apresentam alguns entendimentos sobre a dinâmica que envolve a aprendizagem matemática no contexto escolar. Em particular, suas considerações se referem à aprendizagem de uma específica produção discursiva, a qual, a autora denomina de matemática⁵⁹.

Sfard (2007, 2008) argumenta que os alunos no contexto da aprendizagem, atribuem usos às palavras que são distintos dos usos relativos ao sistema matemático escolar, o qual a autora denominou de usos do dia a dia. Esses usos não são compatíveis com o uso do sistema matemático escolar, pois são orientados por regras distintas deste, segundo Sfard (2007,

⁵⁹ Sfard (2008) possui um entendimento discursivo de matemática escolar, pois a concebe como sendo as falas e as escritas dos sujeitos sobre objetos matemáticos. Por conta disso, a autora denomina a matemática escolar de discurso matemático escolar. Não adotamos tal entendimento, mas utilizamos algumas de suas definições relativas à aprendizagem matemática, pois elas correspondem ao aprendizado de *uso* de palavras.

2008).

Por conta disso, a autora destaca que o aprendizado das regras referentes aos usos das palavras peculiares à matemática escolar ocorre por meio de um conflito, denominado de “conflito commognitivo⁶⁰” (SFARD, 2008, p. 256, tradução nossa). Esse conflito é dirimido quando os alunos modificam as regras que orientam o uso de suas palavras para as regras relativas ao *sistema matemático escolar*, usando nossa nomenclatura.

Essa delimitação de Sfard (2008), inicialmente, indica-nos que uma mesma palavra pode ser usada em diferentes sistemas, ancorados em diferentes *formas de vida*, portanto a peculiaridade do uso de certas palavras a determinados sistemas é atribuída ao uso, é o uso que pode ser identificado como uso peculiar ao sistema matemático escolar ou não.

Todavia, entendemos que quando em âmbito escolar, essas diferenças se façam explícitas, ou seja, o professor identifique que os alunos estão atribuindo às palavras usos vinculados a outros sistemas, ou simplesmente, observe que determinada palavra possui outros usos possíveis em ambientes não escolares, que essas diferenças sejam diagnosticadas e relatadas aos alunos.

Diante disso, não julgamos que um determinado *uso* às palavras deve ser substituído por outro, conforme aponta Sfard (2008). Compreendemos que esse momento pode se constituir como uma *delimitação dos usos*, no sentido de esclarecimento a respeito de quais usos são peculiares a determinados sistemas e úteis às finalidades interiores às *formas de vida* as quais esses sistemas se ancoram.

Contudo, predominantemente, o aprendizado matemático na escola corresponde ao aprendizado de um único sistema, o sistema matemático escolar. Esse sistema não é, por vezes, aquele adotado como modelo em ambientes não escolares e possui o contexto escolar como *locus* primário de sua aprendizagem.

Por conta dessa peculiaridade, Sfard (2008) destaca que os alunos iniciam a sua aprendizagem da matemática escolar, *imitando* os usos das palavras que são atribuídos pelas pessoas que já atribuem às palavras usos que são tidos como *legítimos* naquele contexto escolar. Imitar tais usos é atribuir às palavras os mesmos ou semelhantes usos que essas pessoas atribuem. Denominamos de usos legítimos de palavras, os usos relativos ao *sistema*

⁶⁰ A designação *commognitivo* corresponde à versão em língua portuguesa do neologismo *commognitive* criado por Sfard (2008). Tal neologismo representa a junção dos termos comunicação e cognição, escritos em língua inglesa. Para a autora, a junção desses termos, busca evidenciar o seu entendimento de que os fenômenos cognitivos, como a atividade de pensar, por exemplo, são fenômenos comunicativos. O pensamento é uma comunicação consigo mesmo, considera a autora.

adotado como modelo, em determinado espaço físico⁶¹.

A justificativa para que os alunos *imitem* os usos atribuídos pelo professor ou autor do livro didático, por exemplo, deve-se ao fato de esses usos já serem adotados historicamente. Nas palavras de Sfard (2008, p. 287, tradução nossa), os alunos devem identificar que “se as pessoas estão falando o que elas fazem, elas devem ter boas razões. Além disso, elas já têm feito isso por longo período até hoje”, ou seja, os alunos devem adotar o sistema matemático escolar tal qual está elaborado, em função de haver razões, embora não explícitas, pelas quais a adoção desse sistema é relevante.

Essa é a razão sustentada por Sfard (2008) para o fato de os usos atribuídos às palavras pelo professor devem ser tidos como *discurso líder*, ou seja, discursos pelos quais os alunos devem seguir. Diante disso, podemos dizer que autora aponta que o seguir as regras que regem os usos das palavras do professor ou de alguém cujos usos são legítimos, deve ser um seguir somente porque as pessoas têm atribuídos esses usos dessa maneira, ou seja, é um seguir sem análises e reflexões sobre tais porquês e sem avaliações acerca das finalidades dos usos das palavras.

Esse seguir sem análises é o que justifica os alunos recorrerem ao professor frequentemente, para julgarem se os seus usos estão sendo usos legítimos. Sfard (2008, p.233, tradução nossa) denomina essa situação de “substanciação”. Entretanto, para a autora, a substanciação ocorre somente quando os alunos ainda não identificam quais usos das palavras são usos legítimos. A ausência desse questionamento ao professor é um parâmetro indicador da aprendizagem matemática dos alunos.

No entanto, Sfard (2008) admite que a opção dos alunos pela atribuição dos usos que os professores fornecem às palavras é um assunto que envolve “relações de poder” (SFARD, 2008, p. 283, tradução nossa). A autora relata que essa relação de poder é constatada em virtude da posição historicamente estabelecida e não questionada atribuída ao professor, como indivíduo cujos discursos, ou especificamente, os usos das palavras são usos legítimos e são os usos que os alunos devem adotar como *modelo*.

Para nós, essa *relação de poder* não se estabelece somente, em virtude da posição historicamente estabelecida e atribuída ao professor de matemática na dinâmica da aprendizagem matemática, mas, sobretudo, em função da legitimidade que alguns usos atribuídos às palavras possuem em um determinado contexto espacial. No contexto matemático escolar, é o sistema matemático escolar adotado como único legítimo, enquanto

⁶¹ A legitimidade de um sistema está frequentemente relacionada ao contexto espacial em que tal sistema é tido como modelo.

que outros sistemas são destituídos de legitimidade nesse contexto.

A observância da *relação de poder* fundamentando as escolhas adotadas a respeito dos usos das palavras, explica a necessidade de escolha de um único discurso líder e esse ser o discurso do professor, sustentado por Sfard (2008). Identificamos essa questão não como uma necessidade, e sim, como uma constatação de que no contexto escolar se estabelece relações de poder entre os diversos sistemas matemáticos normativos.

Diante das questões aqui delineadas, apontamos que um dos aspectos que envolvem a aprendizagem matemática escolar corresponde à aprendizagem do que denominamos de usos de palavras relativas ao *sistema matemático escolar*. Esta aprendizagem se efetiva quando os alunos atribuem usos às palavras que são peculiares a esse sistema, haja vista ser esse sistema adotado como legítimos no contexto escolar.

A seguir, abordaremos uma compreensão de modelagem matemática, com base nos entendimentos de matemática e de usos das palavras apresentados anteriormente.

2.3.5 MODELAGEM: UMA MANEIRA DE LIDAR COM NOSSAS EXPERIÊNCIAS

Modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática é uma expressão designada ao uso, à elaboração, à investigação e/ou a resolução de situações-problema⁶² denominadas de reais, utilizando fórmulas, modelos, procedimentos e conceitos relativos ao *sistema matemático escolar*. Nesse momento, resumiremos essas designações (usos, elaboração, investigação e resolução) pela expressão abordagem de situações-problema reais, usando o sistema matemático escolar.

Silveira e Caldeira (2010) destacam a existência de uma grande variabilidade a respeito de como a abordagem dessas situações-problema reais são desenvolvidas em âmbito escolar, nas aulas de matemática. De fato, constatamos em Burak e Klüber (2011), por exemplo, ser proposto que tal abordagem seja denominada de modelagem quando exista uma pesquisa sobre o tema, a elaboração de situações-problema, suas resoluções e análises das resoluções encontradas. Enquanto que, em Soares e Borba (2011), identificamos a análise pelos alunos da resolução já pronta de uma situação-problema, também sendo intitulada de modelagem.

Silveira e Caldeira (2010) relatam que a natureza das situações- problema citadas em

⁶² Optamos pela designação de situações-problema e não simplesmente de problemas, por julgarmos que essa expressão enfatiza que os problemas adotados para análise matemática, em modelagem são relativos a uma situação a ser compreendida.

pesquisas sobre modelagem são que essas situações são denominadas de situações da realidade, bem como que elas são *matematicamente* abordadas⁶³. Com base nessa designação, algumas pesquisas explicitam que abordar essas situações-problema reais corresponderia à realização de uma união entre a realidade e a matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2003; MAAB, 2006), ou uma união entre a realidade e uma parte da realidade que seria a matemática (BEAN, 2007; BLUM; FERRI, 2009). Ou ainda, as situações abordadas possuem como referência a realidade (BARBOSA, 2007) e, por conseguinte, não a própria matemática.

Essas delimitações são indicativas da busca de estipulação de matemática escolar como pertencente a uma esfera particular e separadamente distinta das situações denominadas de situações da realidade, o que pode estar relacionada a um entendimento de matemática em termos de, originariamente, tratar-se de entidades abstratas e formais, ou de serem generalizações, também abstratas de situações reais.

Araújo (2007) aponta que essa distinção entre matemática e realidade tem inspiração em concepções filosóficas realistas e formalistas de matemática. Para a autora, embora essas concepções sejam distintas, elas se fundamentam na ideia de que a matemática *descreve* as situações reais e possui uma relação de um para um com a realidade.

Quando essa identidade de um para um com a realidade não é constatada, alguns pesquisadores relatam que a realidade é complexa, portanto difícil de ser *traduzida* em termos matemáticos (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; CIFUENTES; NEGRELLI, 2011). Esse fato justifica a necessidade de simplificação dessa realidade, a fim de ser *matematizada*, apontam esses autores. Essas simplificações dizem respeito a considerações de situações hipotéticas que não correspondem ao que ocorreria fielmente na realidade. Como por exemplo, desconsideração da curvatura da terra na identificação de qual distância máxima, um navio pode avistar um farol, situação-problema presente em Blum e Ferri (2009)⁶⁴.

Nesse entendimento de matemática, a matematização de uma situação-problema em modelagem é concebida, frequentemente, como uma *aproximação* da realidade, de tal forma que a consideração de uma ou outra hipótese, culmina em uma matematização, mais ou menos fiel, do que ocorre na realidade (BARBOSA, 2006; BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT; HEIN, 2003; MAAB, 2006).

⁶³ Os autores sugerem também, que a delimitação da abordagem de uma situação-problema ser ou não, designada de modelagem está sujeita à critérios avaliativos de pessoas cujos discursos são tidos como legítimos. Tais pessoas são representadas pelos pareceristas de artigos científicos submetidos a revistas, congressos e eventos da área, sobre a temática da modelagem na perspectiva da Educação Matemática.

⁶⁴ Em algumas situações, as simplificações realizadas são adotadas, em virtude de gerarem resultados semelhantes aos resultados encontrados, caso não se realizassem as simplificações.

Outro entendimento possível a respeito da não identidade entre a matemática e a realidade, pode ser delineado a partir de uma compreensão de matemática como normativa. Nessa direção, abordar matematicamente uma situação-problema real poderia ser concebida como uma maneira *de lidar e de organizar* essas situações.

Denominaremos as situações abordadas em modelagem de situações empíricas, ao invés de denominá-las de reais. Essa mudança visa apontar para a identificação da matemática, com base no uso da linguagem que pode ser denominado de matemático e não em relação ao *lugar* da matemática na realidade.

Nessa direção, a matemática seria caracterizada pelos usos normativos da linguagem, ou seja, usos adotados para organização de experiências. Em modelagem, tais usos são adotados para organização de situações que são passíveis de verificação e refutação pela observação e pela experimentação, denominadas de situações empíricas. Já a matemática é um sistema adotado para organizar a situação de determinada forma, portanto, ele próprio não pode ser refutado pela situação⁶⁵.

Em modelagem, as palavras presentes nas situações-problema de natureza empírica são usadas com base nas regras referentes ao sistema matemático escolar. Podemos dizer que a aprendizagem matemática dos alunos na modelagem compreende a atribuição de usos peculiares ao sistema matemático escolar às palavras presentes nas diversas situações-problema de natureza empírica. Por exemplo, na situação-problema que consistia na determinação da localização ideal de aparelhos de irrigação, em função da *área* de um jardim e das *áreas* que não precisam ser irrigadas, apresentada em Kaiser e Schwarz (2010), foi atribuído à palavra *área* um uso relativo ao sistema matemático escolar.

Podemos dizer que essa característica da aprendizagem matemática na modelagem fundamenta um dos objetivos de sua implementação em âmbito escolar nas aulas de matemática, que é possibilitar aos alunos que em contextos não escolares, abordem situações empíricas, com base em regras referentes aos usos das palavras peculiares ao sistema matemático escolar.

Kaiser e Schwarz (2010, p. 53) argumentam, portanto que as situações adotadas em modelagem sejam situações que possuam grande possibilidade de os alunos se deparem em

⁶⁵ Podemos comparar o sistema matemático à uma régua e a situação-problema ao objeto a ser medido. A régua em si não é medida, por ela ser o próprio padrão de medição. De maneira correlata, o sistema matemático é adotado como padrão para a organização de nossas experiências no mundo. Na busca de matematização da situação-problema, pode-se adotar outras variáveis ou outro enunciado matemático, com vistas a oferecer outra maneira de organizar essas situações. Quando dizemos que a matemática não é refutada pela experiência, estamos apontando que os enunciados matemáticos não são mudados em termos de sua peculiaridade interna, em função da experiência.

ambientes extraescolares, as autoras denominaram essas situações de “problemas autênticos”. Ferruzi e Almeida (2009, p. 4) também apontam para essa questão, destacando que as situações-problema em modelagem devem se configurar como um “contexto simulado”, ou seja, situações suscetíveis de ocorrer em diversos contextos, os quais os alunos podem estar inseridos, como ambientes de trabalho ou em seus lares, por exemplo.

No entanto, Schwarkoph (2007) relata que os alunos identificam que no contexto escolar, as situações analisadas em modelagem são situações que em ambientes não escolares serão resolvidas à luz de outro sistema, que não o matemático escolar, ou mesmo nem terão sentido nesses ambientes⁶⁶. Semelhantemente, Jurdak (2006) descreve que ao questionar os alunos a respeito da utilidade da resolução de problemas reais nas aulas de matemática, obteve como resposta que em contextos não escolares, os problemas abordados pelo professor seriam resolvidos com base em outros parâmetros.

O que, inicialmente, essas pesquisas nos permitem compreender é que as situações-problema abordadas em modelagem podem intencionar, simular as situações, tais quais, seriam criadas e mobilizadas em ambientes não escolares, mas podem não o fazer em todas as suas nuances.

Situações-problema elaboradas e criadas em ambientes não escolares, como bancos e hospitais, por exemplo, podem ter o seu próprio sistema como *modelo* de organização. Nesse caso, as palavras podem possuir uma gramática própria e distinta daquela do sistema matemático escolar. Diante disso, analisá-las ou criá-las com base no sistema matemático escolar pode lhes atribuir um caráter não *autêntico*.

Entretanto, reconhecemos que também há situações-problema abordadas em contextos não escolares que possuem o sistema matemático escolar como sistema modelo, pelo fato de a sua legitimidade no contexto escolar ser considerada como parâmetro de legitimidade, também em contextos não escolares.

Por conta disso, apontamos que as situações escolhidas para serem matematizadas em modelagem, sejam situações que possuam o sistema matemático escolar como sistema modelo. Caso contrário, sua abordagem pode se constituir somente como meio para o ensino de conteúdos matemáticos escolares, com pouca ou nenhuma utilidade na resolução de problemas em contextos externos ao contexto matemático escolar.

⁶⁶ O estudo de Schwarzkoph (2007) nos aponta que há situações cuja maneira de abordagem é peculiar ao sistema matemático escolar. O autor destaca, por exemplo, que em uma situação-problema de modelagem que consistia na busca de identificação da distância entre duas cidades, a partir de informações de uma placa de sinalização que informava a distância em quilômetros de um determinado ponto às cidades respectivas, os alunos afirmaram que se necessitassem identificar a distância entre duas cidades não o fariam com base em informações da placa de sinalização, conforme se baseou a resolução adotada no contexto escolar.

Com base nessas questões, sugerimos que a aprendizagem matemática que pode se constituir no uso de situações empíricas em aulas de matemática, intituladas de modelagem, seja a aprendizagem não somente do sistema matemático escolar, propriamente, mas também da análise de que contextos a adoção desse sistema é ou não, legítima e com possibilidades de se questionar o porquê essa legitimidade assim se estabeleceu.

Nas seções seguintes, iremos apresentar os procedimentos metodológicos considerados para a obtenção dos discursos que adotamos como fonte de análise das ideias teóricas e filosóficas sustentadas nesse artigo.

2.3.6 MÉTODO DE PESQUISA, PROCEDIMENTOS DE OBTENÇÃO E REGISTRO DOS DISCURSOS

Pesquisas qualitativas são assim definidas quando possuem como material de análise, os modos de vida, as crenças, a produção discursiva, a prática dos indivíduos, etc. (BOGDAN; BICKLEN, 1994; DENZIN; LINCOL, 2005; MILES; HUBERMAN, 1994).

A investigação que realizamos se coaduna com as propostas características de pesquisas qualitativas, em virtude de que objetivamos compreender a aprendizagem dos usos que são atribuídos às palavras, quando no desenvolvimento de modelagem em âmbito escolar.

Tendo em vista que objetivamos identificar que aprendizagem do uso de palavras se constitui na modelagem matemática, adotamos a fala, a escrita e os gestos dos alunos e do professor como dados para análise, denominando-os de discursos orais, escritos e gestuais. Obtivemos essa produção discursiva, adotando como metodologia de coleta de dados, a *observação*. A *observação* é um procedimento de obtenção de dados cuja característica principal é permitir a compreensão da temática de estudo, no momento temporal de constituição dos dados (ANGROSINO, 2005; MILES; HUBERMAN, 1994).

As observações foram registradas em vídeos e em notas de campo. As gravações em vídeo consistiram do registro da produção discursiva de um grupo de alunas e do professor durante o desenvolvimento de uma tarefa de modelagem. A tarefa de modelagem⁶⁷ proposta pelo professor foi composta por um texto com informações sobre um programa habitacional

⁶⁷ Denominamos de tarefa de modelagem, uma tarefa escolar elaborada pelos alunos ou pelo professor que contém um pequeno texto explicativo acerca da temática e as situações-problema correspondentes a essa temática.

do Governo Federal Brasileiro denominado *Minha casa, minha vida*⁶⁸ e duas situações-problema.

Optamos por registrar em vídeo a produção discursiva dos alunos, pois poderíamos capturar as múltiplas produções discursivas dos indivíduos e sua sincronia, ou seja, a produção discursiva escrita, seguida pela produção discursiva oral e/ou gestuais. Enquanto que as notas de campo nos foram úteis para registrarmos descrições gerais sobre a realização da tarefa pelos alunos.

As produções discursivas analisadas são referentes àquelas obtidas em dois dias consecutivos de desenvolvimento da tarefa. As gravações em vídeo totalizam duas horas e dez minutos no primeiro dia e uma hora e trinta minutos no segundo dia.

2.3.7 O CONTEXTO ESPACIAL DE REGISTRO DOS DISCURSOS

O contexto espacial de registro da produção discursiva dos alunos foi uma escola pública estadual localizada no município de Feira de Santana, Bahia. Essa escola tinha como característica a oferta de ensino, exclusivamente, para modalidade de jovens e adultos⁶⁹.

Esta escola foi o *lócus* de registro de dados dessa pesquisa, em virtude de ser a escola em que Marcus⁷⁰ era professor. Marcus, no período de registro dos dados da pesquisa, ano de 2009, participava juntamente com os autores desse artigo, de reuniões semanais de um grupo denominado de Grupo Colaborativo de Professores em Modelagem Matemática (GCMM). No momento de obtenção de dados para a pesquisa, o grupo colaborativo elaborava tarefas de modelagem a serem implementadas pelos professores participantes do GCMM que eram vinculados à escola básica.

Marcus aceitou que a obtenção de dados para este estudo ocorresse em sua escola. Embora Marcus já tivesse realizado tarefas de modelagem na escola, a turma de alunos escolhida por ele teria a sua primeira experiência no desenvolvimento dessas tarefas.

A turma de alunos escolhida por Marcus para resolver as situações-problema propostas na tarefa de modelagem era uma turma que cursava o ensino médio, em seu

⁶⁸ O programa Minha Casa, Minha Vida foi um programa do Governo Federal instituído em maio de 2009, que consistia no financiamento de casas habitacionais, por meio de uma agência financiadora estatal denominada de Caixa Econômica Federal, para indivíduos de rendas salariais entre zero a dez salários mínimos.

⁶⁹ Objetivo do artigo foi identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem, portanto, a modalidade de educação de jovens e adultos compreende o contexto em que obtivemos os dados para análise, portanto, não se configurando como um contexto propositalmente escolhido, em função dos objetivos da pesquisa.

⁷⁰ O nome do professor e os nomes das alunas citados nesse artigo são fictícios, com intuito de lhes preservar a identidade.

primeiro semestre. No início da realização da filmagem da implementação da tarefa, Marcus foi solicitado a escolher um grupo de alunos formados na turma, para que registrássemos a sua produção discursiva. Não precisávamos estipular nenhum critério de perfil dos alunos para registros dos dados, em função dos objetivos da pesquisa. Marcus escolheu o grupo de alunas formado por Nanda, Josi, Ana, Lana e Tália, em virtude de que as mesmas cumpriam quando solicitadas todas as tarefas escolares.

2.3.8 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DISCURSOS

Analizamos a produção discursiva obtida pelas gravações em vídeo, tendo como inspiração algumas sugestões apresentadas por Chamaz (2006). A autora apresenta um conjunto de passos para organização e análise de dados, quando esses são os discursos dos sujeitos e a pesquisa é realizada sem categorias, *a priori*. Ambas as questões se enquadram nas características delineadas nesta pesquisa.

Os registros dos discursos do professor e do grupo de alunas foram transcritos em sua totalidade. Iniciamos por selecionar para análise, apenas trechos em que certos usos das palavras foram tomados como relevantes para a matematização da situação-problema. Intitulamos esses trechos pelas próprias palavras que estavam sendo mobilizadas naquele momento. Essa ação pode ser comparada ao que Charmaz (2006) denomina de processo de criar códigos iniciais.

Nessa análise inicial, identificamos que os usos das palavras média, conjuntos, intervalos e porcentagem foram enfaticamente abordados pelo professor na resolução da situação-problema. Entre essas quatro palavras, analisamos nesse artigo, a aprendizagem que se constitui na modelagem relativa aos usos de somente duas palavras: a palavra *média* e a palavra *conjuntos*. Isso porque avaliamos que as questões referentes ao uso da palavra porcentagem e da palavra intervalos já estavam contempladas na análise do uso da palavra média e conjuntos.

Após essa escolha, elaboramos compreensões analíticas sobre a aprendizagem matemática na modelagem relativa ao uso dessas palavras. Denominamos essa compreensão de *análise descritiva preliminar*, cujo objetivo foi realizar uma análise em paralelo à descrição propriamente dita do desenvolvimento da tarefa.

A opção pelo desenvolvimento da referida análise tem inspiração nas indicações de Charmaz (2006) que argumenta que uma análise mais descritiva do fenômeno, sem deter-se aos conceitos teóricos, possui maiores potencialidades de produzir ideias que se

contraponham a tais conceitos, ao invés de somente confirmá-los. A autora inclusive destaca que os conceitos teóricos devam surgir dessa análise.

Entretanto, temos um entendimento diferente, porque para nós, não analisamos dados sem orientação dos conceitos e enviesamentos teóricos, pois são eles que fundamentam as escolhas realizadas na pesquisa. Assim, a análise preliminar descritiva, aqui realizada, não é desprovida de conceitos teóricos, conforme sugere Chamaz (2006), todavia, mantemos o objetivo de apresentar uma análise mais vinculada aos dados.

Assim, julgamos pertinente realizar outra análise. Uma análise não descritiva do desenvolvimento em si, mas tematizando questões suscitadas nessa análise preliminar, no que elas nos permitem contrapor aos conceitos teóricos assumidos.

A seguir, apresentaremos a análise descritiva preliminar dos discursos de grupo de alunas e do professor Marcus e a tarefa de modelagem desenvolvida. Os discursos são apresentados, identificando a ordem e as pessoas que os produziram.

Na apresentação das transcrições utilizamos marcadores de conversação inspirados em Silva (2002). Os marcadores são: a barra (/) para indicativo de pausas; as reticências (...) também indicativos de pausas, mas aquelas referentes à hesitação. Os parênteses duplos (()) são usados para inserção dos comentários que realizamos para esclarecer algumas produções discursivas dos alunos e dos professores. Não julgamos necessário informar o tempo de duração das pausas, pois tais tempos não corroboram para a compreensão da temática de pesquisa. Além disso, adicionamos algumas imagens correspondentes aos discursos escritos do professor e do grupo de alunas.

Também ressaltamos que os discursos em negrito presente nas transcrições apresentadas a seguir, referem-se aos discursos que analisamos como indicativos a respeito de que aprendizagem matemática se constitui na modelagem.

2.3.9 A TAREFA DE MODELAGEM E A ANÁLISE DESCRITIVA PRELIMINAR DE SUA REALIZAÇÃO

Figura 1: A tarefa de modelagem entregue aos alunos

O SONHO DA CASA PRÓPRIA VAI VIRAR REALIDADE PARA MILHÕES DE BRASILEIROS

O que é: O Governo Federal está investindo R\$ 34 bilhões para que milhões de brasileiros tenham acesso à casa própria. O programa Minha Casa, Minha Vida viabiliza a construção de 1 milhão de moradias para famílias com renda de até 10 salários mínimos, em parceria com estados, municípios e iniciativa privada, vai impulsionar a economia, gerar empregos e trazer reflexos positivos para toda a sociedade.

Condições para participar do Programa: não ter sido beneficiado anteriormente em programas de habitação social do governo; não possuir casa própria ou financiamento em qualquer UF; estar enquadrado na faixa de renda familiar do programa; pagamento de 10% da renda durante 10 anos, para quem recebe de 0 a 3 salários mínimos, com prestação mínima de R\$ 50,00, corrigida pela TR* (Taxa Referencial) e registro do imóvel em nome da mulher; sem entrada e sem pagamento durante a obra; sem cobrança de seguro por Morte e Invalidez permanente – Mip e Danos físicos do Imóvel – DFI.

* A TR foi criada no Plano Collor II para ser o principal índice brasileiro – uma taxa básica referencial dos juros a serem praticados no mês vigente e que não refletissem a inflação do mês anterior. O Banco Central do Brasil divulgará Taxa Referencial (TR) mensalmente.

Finalidade do Programa: O Déficit Habitacional do país é de 7,2 milhões de Moradias. Sendo assim, com o Programa Minha Casa, Minha Vida será possível reduzir em 14% o déficit habitacional do país. Esse déficit concentra-se por renda:

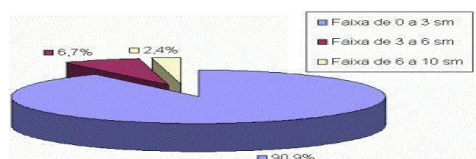


Figura 1

A distribuição das moradias com relação às regiões do Brasil: **Norte-** 10,3% **Nordeste-** 34,3% **Centro-Oeste-** 7,0% **Sudeste-** 36,4% **Sul-** 12,0%

A distribuição das moradias com relação à renda apresenta-se na tabela abaixo:

Tabela I: Quantitativo de casas a serem distribuídas por faixa salarial

Faixas de renda familiar	Número de unidades
0 a 3 sm (salários mínimos)	400 mil
3 a 6 sm	400 mil
6 a 10sm	200 mil

Com base na leitura do texto acima sugerimos algumas questões:

1. Qual será o valor mensal das prestações a serem pagas pelo beneficiário, em relação a seu salário?
2. Com base na figura 1 e dando preferência aos cidadãos com menor renda, como poderiam ser distribuídas as moradias?

O professor Marcus iniciou o desenvolvimento da tarefa de modelagem, apresentando informações adicionais sobre o Programa Minha Casa, Minha Vida e questionando aos alunos sobre que informações os mesmos possuíam sobre o programa. Após isso, o professor distribuiu a tarefa individualmente, para os alunos, pedindo que os mesmos se organizassem em grupos. Em seguida, o professor leu toda a tarefa e as duas situações-problema, solicitando à turma que comesçassem a resolvê-las.

A seguir, iniciamos por apresentar os discursos produzidos pelas alunas, quando discutem como iriam resolver a primeira das duas situações-problema propostas na tarefa, a qual possui o seguinte enunciado: **Qual será o valor mensal das prestações a serem pagas pelo beneficiário, em relação a seu salário?**

42	Ana: Não sei como é que começa isso.
43	Nanda: Nós temos que elaborar os salários.
44	Nanda: O salário mínimo está de quanto? Uns 465 (/) não é?
45	Ana: É 465 (/) mas tem uns abates.
46	Nanda: Mas também têm os aumentos (/) os horários extras.
47	Ana: Mas aí (/) não entra não.
48	Nanda: Então o fechado é 465
49	Nanda: Essa quantidade de zero ((Nanda se refere às pessoas que não tem renda))(/) A gente não sabe se não ganha nada (/) a pessoa pode fazer algum bico(/) E vai ser quanto por mês?
53	Josi: Em relação ao seu salário ((Lendo a primeira questão)). Pega o salário de alguém aqui? Em relação a seu salário ((Josi lê novamente a primeira questão))
54	Ana: Quem trabalha aqui? Vamos Nanda usa o teu ((Ana se refere ao salário de Nanda))
55	Ana: Você ganha quanto Nanda?
56	Nanda: Eu ganho 275.

Nesses discursos iniciais, podemos notar que as alunas buscaram matematizar a situação-problema, a partir do enunciado da mesma. Tendo em vista tal enunciado, estipular que os cálculos das prestações deveriam ser realizados *em relação ao salário do beneficiário*, as alunas optaram por considerar o valor de quem recebe um salário mínimo. Porém, Josi sugeriu que ao invés de adotarem o valor do salário de um beneficiário quaisquer, adotassem como parâmetro para a resolução da situação-problema, o salário de uma das integrantes do grupo que trabalhava.

Contudo, as alunas não se prolongam em demais sugestões, assumindo que não dispunham de outras ideias para resolverem a situação-problema. Diante disso, solicitaram sugestões por parte do professor. A seguir, os discursos referentes a esse momento.

78	Josi: Me dá uma luz aqui ((expressão que significa solicitação de explicações)) (/) Vai ser um cálculo de vezes (/) não é? Vezes 12.
79	Ana: Marcus vem aqui (/) Acenda uma lamparina aqui no meu juízo ((uma expressão que representa a solicitação de explicações))
80	Nanda: Pela Caixa ((Nanda se refere à agência financiadora do programa Minha Casa, Minha Vida)) é 300 meses e pela prefeitura também? ((Nanda cita informações dadas pelo professor))
81	Prof.: É (/) Mas nesse caso aí(/) eu quero o seguinte(/) não tem como você firmar ((estipular)) a prestação exata (/) não é isso? Porque(/) vai depender muito do salário de cada um.
82	Nanda: Não ((Nanda responde à pergunta do professor))
83	Nanda: Mas nós estamos fazendo uma base pelo salário mínimo.
84	Prof.: Certo.
85	Prof.: Mas eu quero saber o seguinte(/) Nesse caso(/) o programa ele é destinado para quem ganha específicos tipos de salários, não é isso ?
86	Nanda, Josi, Ana: É

87	Prof.: de 0 a 3, 3 a 6, 6 a 10 ((o professor lê informações na tabela I da tarefa de modelagem)). Isso é o quê ?(/) Intervalos.
88	Alunas: Hum!
89	Prof.: Então (/) Eu <i>quero</i> saber o quê? Eu quero saber(/) qual vai ser o valor pago pela prestação de um beneficiário(/) Vamos supor que esse beneficiário esteja entre 0 e 3 salários(/) Qual vai ser mais ou menos(/) a média da prestação dele? Porque não tem como você calcular exato(/) Mas qual vai ser a média? Exemplo (/) A nossa amiga Tália ganha um salário(/) Nanda ganha dois e ainda (/) Ana ganha 3 (/) Elas estão na mesma faixa?
90	Alunas. Não (/) não estão.
91	Prof.: Aqui no programa?
92	Nanda: Sim (/) De zero a três(/) Estão na mesma faixa.
93	Prof.: Então como é que eu faço para achar um valor, uma média mais ou menos, do valor que vai ser pago?

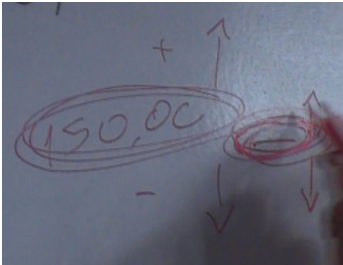
Nos discursos transcritos anteriormente, podemos observar que o professor estipulou e direcionou as alunas a respeito de como ele *queria* que a situação-problema fosse analisada. Podemos constatar a presença do verbo *querer* presente nas três sugestões do professor.

Em suas sugestões, Marcus, porém, direcionou outro encaminhamento às alunas, diferente do proposto inicialmente na tarefa de modelagem. Um encaminhamento que considerasse os valores salariais, a partir das faixas salariais considerados na tabela presente na tarefa de modelagem, ou seja, de zero a três, de três a seis e de seis a dez salários mínimos e não somente relativa à um único e específico salário, conforme a delimitação inicial da situação-problema.

Nesse encaminhamento de Marcus, ele citou às alunas que o desenvolvimento da situação-problema compreenderia o encontro do valor da média. Podemos notar que Marcus atribuiu à palavra média, o uso relativo a uma quantidade que não informa exatamente um valor, conforme podemos constatar em seu discurso, “porque não tem como você calcular *exato*, mas qual vai ser a média?”

Identificado esse uso da palavra média às alunas, o professor buscou exemplificar que valores salariais deveriam ser adotados para o encontro da média, questionando às alunas, como se calcula uma média. As alunas, porém, responderam que não identificavam que procedimentos matemáticos seriam correspondentes ao encontro do valor da referida média, solicitando novamente, a presença e demais explicações do professor.

101	Prof.: A taxa referencial (/) por isso que chega a 50 reais(/) Nesse caso aqui(/) eu não estou pedindo para colocar a TR ((Taxa Referencial)) (/) eu estou (/) pedindo para você me achar mais ou menos(/) você pode fazer o quê? Calcular uma média (/) Como é que calcula uma média entre vocês três? Como é que eu calculo uma média?
102	Prof.: eu vou somar os três salários e fazer o quê?
103	Nanda: Vai multiplicando os 10%?
104	Prof.: Não ((O professor responde a sugestão de Nanda)) Vamos supor 10% do salário de Lana que é 46,50 (/) dois salários é quanto? 93,00 e de três salários que é 135,00(/). Então (/) eu vou somar os 46(/) com os 93(/) com os 135(/) e dividir por quanto? ((indica o valor três utilizando os dedos))

105	Nanda: Por três	
106	Ana: três.	
107	Prof^o. Vou achar uma média(/) Uma média de mais ou menos quanto é que vai ser(/) Então(/) o que é essa média? Ela vai ser a prestação que pode ser mais ou menos (/) A prestação pode ser mais ou pode ser menos ((professor desenhou duas setas com direções opostas))(/) mas a média vai ser sempre isso aqui ((apontando para um ponto entre as setas desenhadas)) (/) Então você vai ter essa média(/) Vamos supor que a média seja 150,00.((professor escreve o valor de 150 entre as setas)) (/) Então a prestação pode ser mais de 150 ou menos de 150(/) Mas a média dela vai variar quanto? ((apontando para cima e para baixo em torno do valor 150))	
108	Nanda: 150 ((Nanda responde ao questionamento do professor))	
109	Prof ^o : 150	
110	Prof ^o : Então (/) A sugestão que eu dou é (/) a de que vocês tentem achar (/)com relação a cada nível(/) porque você não vai ter como estipular um beneficiário(/)Vamos supor que você trabalhe na Caixa ((uma agência financiadora dos imóveis)) (/) qualquer pessoa pode aparecer lá para poder fazer isso, não é ? Então(/) vamos(/) tentem discutir um pouco as ideias que nós discutimos.	
111	Prof^o: Você não vai poder calcular com um salário e meio (/) com dois e meio (/) Você calcula apenas o quê? O salário (/) as rendas, 1,2 e 3 e calcula a média (/) Daí, 3,4,5,6 e depois calcula a média(/) E assim por diante.	
112	Nanda: Então vamos fazer como ele falou (/) Vamos calcular com um salário (/) com dois e com três salários.	

Podemos observar nas transcrições anteriores, que o uso da palavra média foi visto como sendo “*achar mais ou menos algo*”. Marcus indicou então, que para as alunas encontrarem esse valor mais ou menos da prestação salarial, deveriam calcular a média. O verbo calcular é usado como indicativo de que as alunas precisam desenvolver alguns procedimentos relativos ao sistema matemático escolar que constituem como sendo os procedimentos legítimos para o encontro da média.

Diante da abstenção de respostas das alunas ao seu questionamento sobre como encontrar a média, o professor deu sugestões mais diretas sobre tais cálculos, perguntando “eu vou somar os valores e fazer o quê? Nanda respondeu a pergunta de Marcus sugerindo “vou multiplicar os dez por cento?”

Todavia, a resposta de Nanda não correspondeu aos procedimentos matemáticos correspondentes ao encontro da média, com base no sistema matemático escolar. Com isso, o professor respondeu negativamente à aluna, indicando que as alunas deveriam somar os valores correspondentes a dez por cento de um, de dois e de três salários mínimos e posteriormente dividir esse valor por três.

Inicialmente destacamos que podemos notar que o uso atribuído à palavra média possui correspondência com os procedimentos relativos ao seu encontro. Isso porque tendo em vista que uso da palavra média é “*achar mais ou menos algo*”, somar os valores e multiplicá-los, conforme sugestão de Nanda não era um procedimento cujo resultado

corresponderia a esse valor.

Além de Marcus indicar que valores deveriam compor a primeira média a ser calculada pelas alunas ($46,50 + 93,00 + 135,00$), o professor explicou o significado do valor média a ser encontrado, indicando, “vai ser mais ou menos o valor da prestação”. Marcus também descreveu que as alunas deveriam somar os valores dos dez por cento de três, quatro, cinco e seis salários mínimos para o encontro da média para a faixa salarial de três a seis salários mínimos e da mesma maneira deveriam proceder para a terceira faixa salarial de seis a dez salários mínimos.

Nanda relatou às demais integrantes do grupo que devem desenvolver a situação-problema “conforme o professor falou”. A seguir, apresentaremos os procedimentos elaborados pelas alunas relativos às orientações do professor, quanto ao encontro da média para as faixas salariais de zero a três e de três a seis salários mínimos.

1- Plano de 0 a 3 Salário mínimo $\rightarrow$ R\$ 465,00 1- manda $\rightarrow$ R\$ 465,00 - 10% $\rightarrow$ R\$ 46,50 2- jana $\rightarrow$ R\$ 930,00 - 10% $\rightarrow$ R\$ 93,00 3- lhalia $\rightarrow$ R\$ 1395,00 - 10% $\rightarrow$ R\$ 139,50 Média $\rightarrow$ R\$ 93,00 $\pm$	Plano 6 a 30 Salário 6 $\rightarrow$ R\$ 2.790,00 - 10% = R\$ 279,00 7 $\rightarrow$ R\$ 3.255,00 - 10% = R\$ 325,50 8 $\rightarrow$ R\$ 3.720,00 - 10% = R\$ 372,00 9 $\rightarrow$ R\$ 4.185,00 - 10% = R\$ 418,50 10 $\rightarrow$ R\$ 4.650,00 - 10% = R\$ 465,00 Média R\$ 372,00 $\pm$
--	--

Podemos identificar nos discursos escritos das alunas que o uso da palavra média apresentado pelo professor como “um valor que representa mais ou menos” o valor mensal da prestação, considerando valores pertencentes à uma faixa salarial, foi inserido nos procedimentos matemáticos pela simbologia ($\pm$) ao lado do valor da média calculado.

Após finalizado os procedimentos relativos ao encontro da média, as alunas solicitaram a presença do professor, para avaliar a legitimidade de seus cálculos. O professor avaliou positivamente, mas sugeriu *querer* que os resultados encontrados fossem estruturados de uma maneira particular. A seguir, apresentaremos os discursos relativos a essa estruturação.

135	Lana: Professor (/) nós calculamos, e deu 93(/) É a base(/) Pode ser mais ou menos 93.
136	Prof: Mas nesse caso (/) o mínimo deu quanto? Deu 46,50?
137	Lana: É.
138	Prof: Então (/) tá bom(/) vocês não estão incluindo a TR((taxa referencial)) (/) Tudo bem (/) Mas se o mínimo é 50 reais(/) você poderia colocar 50 (/) não poderia? Mas pode colocar isso ((referindo-se a valor de 46,50))/? Pode (/) Mas você poderia arredondar logo para 50 (/) Porque não é a taxa mínima?
139	Lana.: ((Faz gestos indicando estar de acordo com a idéia do professor))
140	Prof.: Então pronto (/) Mas não tem problema nenhum (/) Então a média é essa aí ((referindo-se ao valor 93,00)) (/) Tem outra forma de representar isso aí? Você achou (/) Você disse o quê? Que o valor médio da prestação paga pelo beneficiário (/) se o salário for de zero a três(/) vai ser a média 93 reais ((indica o

	valor 93,00 registrado na folha de anotações de Lana))
141	Lana.: Sim
142	Prof.: Mas eu posso trabalhar também aí, com o quê?
143	Nanda: Com a função?
144	Prof.: O que foi que nós vimos anteriormente? ((Referindo-se a um conteúdo abordado em aulas anteriores)) Aí não é um conjunto? De zero a três?
145	Nanda.: é.
146	Prof.: Não é um conjunto limitado?
147	Lana.: Sim
148	Prof.: Qual é o critério para fazer parte desse conjunto? Tem que ganhar de zero a três(/) Não é isso?
149	Lana.: É
150	Prof.: Então quando eu tenho um intervalo assim (/) quando eu tenho um conjunto assim(/) eu posso utilizar o quê? (/) intervalo (/) Então como é que eu posso calcular aí? Eu posso achar o valor mínimo (/) que eu vou ter que pagar e o valor máximo (/) E achar o intervalo(/) Então, a pessoa que ganha de zero a três salários vai estar aí (/) nesse intervalo ((O professor representa o intervalo por meio de gestos com as mãos)). Onde o mínimo é tanto ? 50 reais e o Máximo é quanto?
151	Lana: 139 ((Lana responde ao questionamento do professor))
152	Prof.: Então a prestação vai ser (/) quem ganha de zero a três vai pagar de 50 reais a 139 e? 
153	Lana: 50 ((complementa o discurso do professor))
154	Prof.: Então quem ganha um salário vai pagar onde? Vai estar aqui dentro entre 50 e 139 ((o professor aponta para um ponto interior ao intervalo escrito no quadro)) (/) Quem ganha 1 salário e meio vai está aqui ((professor aponta para ponto que pertence ao intervalo de 50 a 139,50))(/)Quem ganha quatro salários? Não! Não está nesse intervalo (/). Eu sei o quê (/) se eu ganho de zero a três (/) então eu posso pagar o quê? Entre 50 a 139,50 ((aponta para os valores 50 e 139,50 escritos no quadro)) (/) Minha prestação vai variar nesse valor aí.

Nas transcrições dos discursos apresentados anteriormente, podemos notar que o professor pediu às alunas que representassem os valores que dispõem sobre a média e os valores das prestações salariais, por faixa salarial, de maneira específica, questionando “tem outra forma de representar isso aí”, “eu posso trabalhar aí com quê?”.

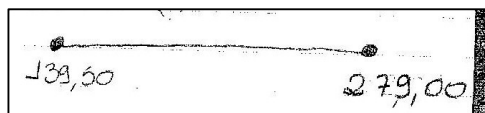
Nanda sugeriu que os valores encontrados fossem mobilizados pelo *uso* da palavra *função*. O professor, no entanto, afirmou que *função* não era um uso legítimo que os valores referentes às prestações salariais por faixa pudessem ser vinculados, e sim, a palavra *conjuntos*.

O professor Marcus solicitou a Nanda que identificasse na classificação da renda salarial por faixas salariais (de zero a três, de três a seis e de seis a dez), o próprio uso da palavra *conjunto*. Nas palavras de Marcus “aí não é um conjunto? Um conjunto de zero a três?” “Não é um conjunto limitado?” “Qual o critério para fazer parte desse conjunto?” “Tem que ganhar de zero a três”, não é isso?”

Em seguida, o professor Marcus relacionou o uso da palavra *conjunto* ao uso da palavra *intervalo* relativo ao sistema matemático escolar. Para esse conjunto ser estruturado

matematicamente em um intervalo numérico, o professor explicitou às alunas que as mesmas devem identificar o valor máximo e o valor mínimo da prestação de cada faixa salarial, conforme podemos constatar na transcrição de número 152.

As alunas utilizaram os direcionamentos do professor para a organização em intervalos numéricos das informações sobre os valores salariais por faixa salarial. A seguir, apresentaremos essa organização feita pelas alunas referentes às faixas salariais de zero a três e de três a seis salários mínimos.



2.3.10 A ANÁLISE DE DADOS

A partir da análise das transcrições apresentadas anteriormente, podemos observar que o desenvolvimento da situação-problema foi configurado com base nas indicações do professor. Desde o início, estabeleceu-se que a situação-problema deveria ser abordada pelas alunas, conforme as suas orientações.

Assim, as orientações do professor ditaram em que consistia a situação-problema a ser abordada e como desenvolvê-la. Diante disso, as palavras mobilizadas e os procedimentos adotados foram aqueles indicados pelo professor. Essa eleição da produção discursiva do professor como modelo, como *discurso líder*, foi assumida pelas alunas como diretiva. Nas palavras de Nanda “vamos fazer como ele [o professor] falou”.

Para nós, essa questão é indicativa do estabelecimento de relações de poder, de tal forma que as alunas atribuíram ao professor, durante toda a produção discursiva relativa à matematização da situação-problema, a função de julgar a legitimidade dessa produção, bem como, de lhes indicar qual seria a produção legítima, enquanto o professor investiu-se da função de ditar as alunas como a situação-problema deveria ser desenvolvida.

Essa constatação pode nos ser indicativa de que a *substanciação*, a solicitação dos alunos para que o professor julgue as suas produções discursivas, é uma situação que ocorre em decorrência da existência dessas relações, portanto pode estar presente na dinâmica da aprendizagem em que tais relações se estabelecem, não sendo sua ocorrência simplesmente extinta, em função de os alunos já dispuserem de critérios próprios para essa avaliação, conforme estipulou Sfard (2008).

Entre os direcionamentos do professor Marcus quanto à resolução da situação-problema, analisamos a sua indicação relativa aos usos da palavra *média*. Identificamos dois tipos de usos relativos à palavra *média*. Denominamos o primeiro uso de uso *gramatical*. O uso gramatical corresponde ao uso da palavra que *faz sentido* atribuir, tendo como parâmetro uma determinada *forma de vida*.

O uso *gramatical* da palavra *média* correspondeu a “encontrar mais ou menos um valor”. No caso da situação-problema, encontrar um valor entre um conjunto de valores das prestações que seja indicativo do valor *mais ou menos* da prestação a ser paga por beneficiários, cuja renda salarial esteja entre os valores desse conjunto.

Após a identificação do uso que faz sentido atribuir à palavra, alguns *usos gramaticais* estão vinculados ao que designaremos de *usos procedimentais*⁷¹. Notemos que uso gramatical da palavra *média* indicou a necessidade de realizar algo, no caso, *encontrar* esse valor que será *o valor mais ou menos* das prestações salariais.

No sistema matemático escolar, os *usos procedimentais* dizem respeito à realização de um conjunto de passos, os quais denominaremos de procedimentos matemáticos escolares. Os procedimentos correspondentes foram “somar os valores das prestações e dividir o resultado pela quantidade de valores somados”. Esses procedimentos são denominados de matemáticos escolares, porque possuem estrutura simbólica peculiar a esse sistema, como por exemplo, a própria estruturação do *encontro* da média ($\frac{49,50+73,00+139,50}{3} = 73$), a maneira de apresentar o resultado, a ordem dos procedimentos (primeiro os valores são somados e depois o resultado é dividido pela quantidade de valores somados), a própria maneira como os valores são somados e divididos, etc.

Podemos analisar que uma das características do sistema matemático escolar é dispor de um sistema normativo cujos usos procedimentais são marcados por uma simbologia própria e predominantemente configurada na elaboração de discursos escritos. Podemos identificar outros usos procedimentais relativos à palavra *média*, não pautados nos usos peculiares ao sistema matemático escolar.

Quando, por exemplo, questionados sobre a quantidade de páginas que escrevemos diariamente, respondemos que conseguimos escrever mais ou menos cinco páginas, por dia de um livro. Podemos verbalizar nossa resposta, sem *anotar* quantas páginas escrevemos a cada

⁷¹ Esse entendimento pode ser estendido a algumas outras palavras mobilizadas no sistema matemático escolar, como por exemplo, o uso da palavra *dividir*. Poderíamos dizer que um dos usos gramaticais da palavra *dividir* é tomar partes de uma quantidade e seu uso procedimental seria os cálculos procedimentais relativos à divisão, simbolizada, geralmente, pelo sinal ($\div$).

dia, nem somar o total de páginas e depois dividir pela quantidade de páginas somadas, tal qual, o uso procedimental escolar possui como uso legítimo. Nesse caso, utilizamos como uso procedimental, somente nossos registros mentais sobre essa quantidade.

Inicialmente, as alunas explicitaram que não identificaram quais os usos da palavra média, são os usos relativos ao sistema matemático escolar. Por conta disso, o professor lhes indicou o uso gramatical e procedimental da palavra média peculiar a esse sistema.

A partir desse direcionamento, as alunas *encontraram* o valor da média para as demais faixas salariais, valendo-se dos usos procedimentais e gramaticais assinalados inicialmente pelo professor. Podemos notar então, que os usos atribuídos à palavra *média* pelas alunas tiveram orientação direta na maneira como esse uso foi citado pelo professor como uso legítimo.

Isso nos permite concluir que as alunas *imitaram* os usos atribuídos pelo professor, quando comparamos a produção discursiva delas ao que Sfard (2008) denomina de *imitação*, ou seja, de seguir a produção discursiva do professor como *modelo* ou tal qual, o professor estipulou.

No caso, por exemplo, do encontro da média para a faixa salarial de seis a dez salários mínimos, julgamos que as alunas se *orientaram* nas indicações do professor referentes à faixa salarial de zero a três salários mínimos que descrevia “somar os três valores e dividir por três”, para identificarem por elas mesmas, como deveriam calcular o valor de média para a faixa da salarial de seis a dez.

Algumas sugestões do professor se constituíram como a busca de suscitar que as próprias alunas atribuísem usos às palavras relativos ao sistema matemático escolar. Antes de explicitar como é que se calcula a média, o professor Marcus questionou às alunas sobre tal uso procedimental. Porém, a resposta de Nanda não correspondeu ao uso procedimental peculiar ao sistema matemático escolar. Outro momento, também caracterizado por uma resposta de Nanda julgada pelo professor como não relativa ao sistema matemático escolar, correspondeu ao entendimento de Nanda de que os valores das prestações salariais poderiam ser vistos como usos da palavra *função*.

Ambos os momentos de discordância entre os usos das palavras resultaram na adoção da sugestão do professor e abandono da sugestão de Nanda, haja vista que os usos atribuídos pela mesma não serem usos peculiares ao sistema matemático escolar. Apesar da ocorrência de discordância quanto aos usos das palavras, não a classificamos como um *conflito commognitivo*, nos termos de Sfard (2008).

Isso porque a aluna Nanda sugeriu o uso procedimental da palavra média

correspondendo à realização do procedimento de multiplicação e não de divisão, não se pautou em outro sistema, e sim, na busca de indicar esse procedimento, com base no próprio sistema matemático escolar. Semelhante análise, concluímos em relação ao uso da palavra *função* feito por Nanda.

Essas questões nos permitem apontar que as discordâncias entre os usos das palavras, não são somente resultantes da adoção de regras peculiares a sistemas distintos do sistema matemático escolar, conforme sugeriu Sfard (2008). Elas podem ocorrer em virtude de uma sugestão de uma possível peculiaridade no interior de um próprio sistema.

Nesse caso, por exemplo, não caberia uma *delimitação discursiva* por parte do professor, no sentido de identificação de que sistema, a sugestão de Nanda seria uma sugestão legítima. A delimitação discursiva poderia apontar simplesmente que no sistema matemático escolar a referida sugestão não lhe é peculiar.

Diante disso, sugerimos que diante de *discordância entre os usos* atribuídos às palavras pelo professor e pelos alunos, somente a avaliação negativa do professor, quanto ao uso adotado pelos alunos, pode não explicitar a peculiaridade do sistema matemático escolar quanto a sua legitimidade em âmbito escolar e quanto aos propósitos relativos à *forma de vida*, a qual o sistema matemático escolar se pauta.

Julgamos que a identificação do professor, quanto ao porquê de os alunos atribuírem determinados usos às palavras, pode se constituir como indicativo de tal uso estar ou não, vinculado a um sistema diferente do sistema matemático escolar. Em caso afirmativo, a delimitação discursiva pode ser utilizada como um importante instrumento para os alunos observarem em que *contextos e formas de vida*, os usos que atribuem às suas palavras são legítimos.

Os usos atribuídos às palavras relativos ao sistema matemático escolar são adotados, para a organização de nossas experiências, contudo nos questionamos por que diante de todo o sistema matemático escolar, escolhemos no interior desse sistema, somente os usos relativos a algumas palavras para *matematizarmos* determinadas situações-problema. Como exemplo, por que o uso da palavra *conjunto* foi adotado pelo professor para a análise do grupo de valores das prestações por faixa salarial, ao invés de ser *usada* outra palavra?

Sobre essa questão, entendemos que quando matematizamos uma situação-problema empírica, adotando como modelo normativo o sistema matemático escolar, buscamos por semelhanças entre as gramáticas que envolvem os usos das palavras no sistema normativo e a gramática sugerida pela situação que buscamos identificar, a partir desse sistema.

Julgamos que o professor Marcus se pautou nessa semelhança para estabelecer a

identificação de que *os valores referentes às prestações por faixas salariais* poderiam ser vistos como um *conjunto*. Nas palavras de Marcus “Aí não é um conjunto? Qual o critério para fazer parte desse conjunto? Tem que ganhar de zero a três, não é isso?”

O que as alunas disponham eram os cálculos relativos aos valores das prestações por grupo de faixas salariais. Marcus pediu às alunas que identificassem nessa estruturação, ou seja, *na classificação dos valores das prestações por faixa salarial* um *conjunto*. Um conjunto referente aos valores das prestações a serem pagas por beneficiários que ganham de zero a três salários mínimos.

Podemos compreender a semelhança no seguinte aspecto: a classificação de valores por faixa salarial corresponde a um agrupamento de valores, ou ainda, pode ser entendida como uma quantidade de valores de mesma natureza, as prestações salariais. Vejamos que essa gramática é *semelhante* com a *gramática* referente à palavra conjunto, tendo como sistema modelo, o sistema matemático escolar. Constatamos por exemplo, em Dante (2004, p. 8)⁷², uma *gramática* da palavra conjunto, “conjunto é uma coleção quaisquer de elementos”.

Denotaremos essas semelhanças de *semelhanças de família*. Semelhanças de família é uma expressão de Wittgenstein (1999, §67) para denotar as semelhanças existentes entre as gramáticas que envolvem os usos das palavras. Contudo, ressaltamos que sem a análise a partir do sistema matemático escolar, a classificação dos valores das prestações por faixas salariais é apenas uma maneira de organizar esses valores. Foi o *olhar* normativo do sistema matemático, que permitiu Marcus indicar que tal classificação *é* um conjunto.

Por conta disso, destacamos que as semelhanças identificadas entre a gramática sugerida pela situação e a gramática das palavras à luz do sistema matemático escolar são semelhanças que se estabelecem somente quando se adota um sistema normativo como parâmetro. Ou seja, para que as semelhanças sejam estabelecidas é necessário adotar uma das gramáticas como referência.

Tendo em vista que as situações-problema abordadas em modelagem terem o sistema matemático escolar como referência, sugerimos que a aprendizagem matemática que se constitui na modelagem corresponde à aprendizagem do uso das palavras relativo ao sistema matemático escolar, de tal forma que esse uso seja adotado como parâmetro para a análise da gramática de outras palavras mobilizadas em outros contextos, além do escolar.

Com base em tal delimitação de aprendizagem matemática na modelagem elaboramos na seção conclusiva seguinte, algumas implicações desse entendimento para os

⁷² O livro de Dante (2004), aqui citado, é um livro didático de matemática.

argumentos a respeito da implementação da modelagem em âmbito escolar.

2.3.11 IMPLICAÇÕES PARA A IMPLEMENTAÇÃO DA MODELAGEM NO CONTEXTO ESCOLAR

Um dos principais argumentos para o estímulo de práticas de modelagem na educação matemática é preponderantemente, dar utilidade ao sistema matemático escolar. *Utilidade* que corresponde, podemos dizer, ao uso do sistema matemático escolar para elaborar, investigar e resolver situações as quais os alunos se deparem em sua vida (BIEMBENGUT; HEIN, 2003; BLUM; FERRI, 2009; KAISER. SCHWARZ, 2010; SOUZA, BARBOSA, 2009).

Por conta disso, algumas pesquisas, com a de Kaiser e Schwarz (2010), apontam que as situações-problema adotadas em modelagem devem ser situações que simulem no ambiente escolar, as situações-problema que podem ser mobilizadas, por sua vez, em múltiplos contextos.

Embora seja possível identificar que a legitimidade do sistema matemático escolar é adotada também, como modelo de legitimidade em outros contextos, fato pelo qual se justifica a utilidade desse sistema na vida cotidiana, talvez, devêssemos considerar que esse sistema pode não ser o sistema adotado pelos alunos nos múltiplos contextos que participem.

Isso porque, sem negligenciarmos que a legitimidade do sistema matemático escolar sob a legitimidade de outros sistemas, embute a existência de relações de poder, entendemos que em situações que possuem *finalidades* distintas daquelas do uso do sistema matemático escolar, a opção pelo sistema matemático escolar pode não ser *útil*.

Por conta disso, indicamos que para tal aprendizagem na modelagem se caracterizar como *útil* no sentido de que proporcione aos alunos “usar e engajar a matemática *nas necessidades de sua vida*”, conforme orientações do programa internacional de avaliação dos estudantes, o PISA, é importante que analisemos os sistemas matemáticos que consideraremos legítimos de serem abordados em aulas de matemáticas, pautadas em modelagem.

Isso porque, a partir de uma perspectiva wittgenstiana, podemos dizer que se objetivamos tornar a aprendizagem matemática *útil* nos termos sustentados pelo PISA, devemos ampliar a legitimidade quanto aos sistemas matemáticos adotados como legítimos no contexto escolar, ou se mantivermos o sistema matemático escolar como único legítimo, sugerimos que analisemos as situações-problema que adotaremos para matematização.

Diante disso, argumentamos que as situações-problema abordadas em modelagem sejam elaboradas com base na legitimidade do uso do sistema matemático escolar na organização dessas situações. Para nós, essa questão, pode nos auxiliar a usarmos modelagem não descaracterizando essas situações, quanto à *forma de vida*, a qual são mobilizadas e também, não somente como um meio para ensinar os conteúdos matemáticos disciplinares.

Além disso, apontamos que a dinâmica da aprendizagem matemática que se constitui na modelagem matemática se entrelaça com a dinâmica da aprendizagem historicamente instituída. Por exemplo, o professor quem orienta as alunas sobre como devem desenvolver a tarefa escolar, as alunas, por sua vez, adotam a orientação do professor como diretiva acerca desse desenvolvimento, o professor utiliza estratégias para motivar as alunas, como a sugestão para que se considerassem beneficiárias do Programa Minha Casa, Minha Vida, etc.

Por conta dessas questões, sugerimos que a aprendizagem matemática na modelagem deve ser analisada em termos da dinâmica historicamente estabelecida quanto à aprendizagem matemática no contexto escolar, pois a tarefa de modelagem pode não se tratar de uma tarefa escolar desenvolvida completamente diferente pelos atores do contexto escolar, em relação ao desenvolvimento de outras tarefas matemáticas.

Também destacamos que em modelagem, a aprendizagem matemática envolve outra questão relevante. As semelhanças que se estabelecem entre a gramática sugerida pela situação-problema e a gramática do uso das palavras adotada para abordar matematicamente essas situações não são semelhanças peculiares às essas gramáticas, mas criadas, a partir do *olhar* normativo do sistema matemático escolar.

Diante disso, nos perguntamos: como os alunos atribuirão usos às palavras já abordadas no contexto escolar, diante de uma nova situação-problema? Por exemplo, que usos gramaticais e procedimentais os alunos atribuirão à palavra *média*, em uma situação-problema distinta, mas que semelhanças entre as palavras presentes na situação-problema e a palavra *média* possam ser estabelecidas?

Por fim, julgamos que a tematização da aprendizagem matemática que se constitui na modelagem embute questionamentos sobre que *utilidade* arguimos que a matemática deve se pautar, sobre que matemática consideramos *útil* para adotar em âmbito escolar e sobre que dinâmica envolve a aprendizagem da matemática na modelagem. Nessa direção, entendemos que as ideias de Anna Sfard e Ludwig Wittgenstein nos ofereceram *um* possível modo de *ver*⁷³ essas questões.

⁷³ O uso da expressão modo de ver é inspirado em Wittgenstein (1999) e corresponde ao entendimento de que o sistema que adotamos como normativo são modos de *ver* (WITTGENSTEIN, 1999, §144), pois a partir desse

Agradecimentos

Agradecemos ao professor *Marcus* e aos alunos cujos discursos foram analisados, por terem aceitado ceder as suas produções discursivas para análise, bem como, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro à pesquisa, a qual esse artigo integra.

Agradecemos aos professores Adilson Oliveira do Espírito Santo, Aurino Ribeiro Filho, Antônio Miguel, José Luis de Paula Barros da Silva e a professora Denise Silva Vilela, pelos comentários feitos à versão prévia desse artigo. Pela mesma razão, agradecemos aos participantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Bahia, Ana Virgínia de Almeida, Jamille Vilas Boas, Maria Raquel Queiroz e Thaine Santana, pelos comentários feitos à versão ainda embrionária das ideias que compõem esse artigo.

Referências

- ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. *Dialogue and learning in mathematics education: intention, reflexion, critique*. Dordrecht: Kluwer, 2002.
- ANGROSINO, M. V. Recontextualizing observation: ethnography, pedagogy, and the prospects for a progressive political agenda. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Org.) *Handbook of qualitative research*. 3. ed. Thousand Oaks: Sage, 2005, p. 729-745.
- ARAÚJO, J.L. A relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, p. 17-32.
- ARAÚJO, J.L. Brazilian research on modelling in mathematics education. *ZDM- The international Journal on Mathematics Education*, v. 42,p. 337- 348, 2010.
- BARBOSA, J.C . Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.
- BARBOSA, J.C. A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas*

educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 161-174.

BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. Modelagem matemática: uma mudança de base conceitual. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto, *Anais...*, 2007. 1. CD- ROM.

BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BOGDAN, R.C; BIKLEN, S.K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto LDA, 1994.

BLUM, W; FERRI, R. Mathematical modeling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, p. 45-58, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. PCN: Orientações Educacionais Complementares aos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

BURAK, D; KLUBER, T. E. Encaminhamentos didáticos-pedagógicos no contexto de uma atividade de modelagem matemática para a educação básica. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO; J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p.65-81.

CHARMAZ, K. *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis*. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2006.

CIFUENTES, C. J; NEGRELLI, L. G. O processo de modelagem e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO; J. L; BISOGNIN, E.(Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p. 123-140.

DANTE. L. R. *Matemática*. São Paulo: Ática. 1 ed, 2004.

DENZIN, N. K; LINCOL. Y.S. *The sage of qualitative research*. 3ª ed. Thousand Oaks: SAGE Publication, 2005.

FERRUZI, E.C; ALMEIDA, L.M.W de. O contexto da modelagem matemática: possibilidade de construção do conhecimento. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2009, Londrina, *Anais...*, 2009. 1. CD- ROM.

GLOCK, H.J. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. *Cadernos de História e Filosofia das Ciências*, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul- dez, 2004a.

- GOTTSCHALK, C. M. C. Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004b, São Paulo, *Anais...*, 2004b.1.CD ROM.
- GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Cadernos Cedes*, Campinas, v. 28,n. 74, p. 75-96, 2008.
- HARRÉ, R; TISSAW. M.A. *Wittgenstein and Psychology*. A practical guide. ASGATE: ENGLAND, 2005.
- JACOBINI, O. R. *A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula*. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro
- JESUS, W.P. de J. *Educação Matemática e filosofias sociais da Matemática: um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest*. 212 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.
- JURDAK. M.E. Constrasting perspectives and performance of high school students on problem solving in real world situated, and school contexts. *Education Studies in Mathematics*, v.63, p. 283-301, 2006.
- KAISER, G; SCHWARZ, B.. Authentic modeling problems in mathematics education-examples and experiences. *Journal Mathematics Didatik*, v. 31, p. 51- 76, 2010.
- MAAß, K. What are modelling competencies. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.
- MIGUEL, A; VILELA, D. S; MOURA, A. R. L. Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké*, v. 18, p.129- 203, 2010.
- MILES, M. B.; HUBERMAN, A. N. *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. 2. ed. Thousand Oaks: Sage, 1994.
- MORENO, A. Descrição fenomenológica e descrição gramatical - ideias para uma pragmática filosófica. *Revista Olhar*, v. 7, n. 7, p. 94-139, 2003.
- MORENO, A. *Os labirintos da linguagem: ensaio introdutório*. São Paulo: Moderna, 2005.
- NCTM. Nacional council of teaches of mathematics. *Principles and Standarts of School Mathematics*. 2000. Disponível em : < <http://standards.nctm.org/document/index.htm>>. Acesso em: 20 jul. 2011.
- PISA. *Assessment framework: key competencies in reading, mathematics and science*. 2009. Disponível em : < <http://www.oecd.org/dataoecd/11/40/44455820.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2011.
- SCHWARKOPH, R. Elementary modeling in mathematics lessons: the interplay between “real-world” knowledge and “mathematical structures”. In: BLUM, et al., ICMI Study 14:

applications and modelling in mathematics education – discussion document, 2007. p. 209-216.

SFARD, A. When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint . *The Journal of the learning Sciences*, v. 16, n.4, p. 567- 615, 2007.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: university press, 2008.

SILVA. M. C. F. Pausas em textos orais e espontâneos e em textos falados. *Linguagem em discurso*. v.3., n. 1, p. 111- 133. jul-dez, 2002.

SILVEIRA, E; CALDEIRA, A.D. Modelagem matemática: é possível fazer sem saber?. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador, *Anais...*, Salvador, 2010. 1. CD-ROM.

SOARES, D.S; BORBA, M.C.B. Fenômeno biológico, sistema dinâmico e noções de cálculo I. Uma proposta. In.: ALMEIDA, L. M.W; ARAÚJO; J. L; BISOGNIN, E. (Org.). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: Eduel, 2011, p.227-247.

SOUZA,E.G; BARBOSA. Modelar matematicamente uma situação-problema: um enfoque participacionista. In.: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM MATEMÁTICA, 6.,2009, Londrina.*Anais...* Paraná, 2009, 1 CD-ROM

VILELA. D. S. *Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática*. 247f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2007.

VILELA, D. S. Elementos para uma compreensão das matemáticas como práticas sociais. In.: MIORIM, M.A; VILELA, D. S. (Org.). *História, filosofia e educação matemática: práticas de pesquisa*.Campinas: Editora Alinea, 2010, p. 89-125.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

CAPITULO 3

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo apresento considerações gerais sobre a temática de pesquisa, com base nas análises e nas discussões teóricas e filosóficas presentes nos três artigos que compõem a tese. O objetivo da pesquisa foi identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática⁷⁴. No primeiro artigo da tese, foram elaborados entendimentos teóricos e filosóficos sobre a temática, com base nas ideias de Anna Sfard e de Ludwig Wittgenstein.

Já o segundo e o terceiro artigo da tese são caracterizados pela identificação de que aprendizagem matemática se constitui na modelagem, a partir da análise teórica dos discursos produzidos por professores e alunos, coletados empiricamente, durante o desenvolvimento de tarefas de modelagem. Assim, esse capítulo apresenta uma sistematização do tema, a partir de um entrelaçamento das análises geradas nos três artigos acima referidos.

3.1 MODELAGEM: UMA MANEIRA DE ORGANIZAR SITUAÇÕES EMPÍRICAS

Com base nas ideias de Wittgenstein a respeito da matemática, caracterizo a modelagem, pelo uso do sistema matemático escolar normativo na organização de situações-problema de natureza empírica. O uso desse sistema permite que a situação empírica seja analisada e compreendida de uma determinada maneira.

Assim, o sistema matemático escolar, concebido como normativo, fornece uma maneira de lidar com tais situações. Nessa direção, assumo modelagem como uma maneira de organizar situações empíricas. *Organizar* deve ser entendido como dispor de uma determinada maneira ou, ainda, dar a situação determinado formato.

⁷⁴ A partir de então, será utilizado somente o termo modelagem em substituição à expressão modelagem matemática.

Por conta disso, aponto que um dos primeiros encaminhamentos relativos a *modelar* tais situações-problema, utilizando o sistema matemático escolar, é buscar estruturá-las matematicamente à luz desse sistema.

Essa questão pode ser constatada na situação-problema presente na tarefa de modelagem apresentada no segundo artigo da tese que correspondia a *quanto de mercúrio seriam necessários para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil*. Essa situação foi estruturada à luz do sistema matemático escolar em *identificar como é que tira seis por cento de cem milhões*.

Já no terceiro artigo da tese, a situação-problema, que consistia em *encontrar mais ou menos o valor da prestação a ser paga pelo beneficiário, cuja renda salarial se enquadrava em uma determina faixa salarial*,⁷⁵ foi estruturada matematicamente da seguinte maneira: *encontrar a média da prestação a ser paga por beneficiários, com base em determinadas faixas salariais*.

Da mesma maneira, pode-se dizer que a identificação da *quantidade de metal para a construção de um silo*, foi analisada, *matematicamente*, com base no sistema matemático escolar como correspondente a *encontrar a área lateral de um cilindro e de um cone*, na tarefa de modelagem, relatada por Sonogo e Bisognin (2010).

Para que algumas situações-problema passem a se configurar em termos do sistema matemático escolar, aponto que ocorre, primeiramente, a busca pela identificação de semelhanças entre a gramática sugerida pela situação-problema⁷⁶ e a gramática de palavras que são peculiares ao sistema matemático escolar.

Assim, destaco que diante da questão que consistia em *encontrar mais ou menos um valor da prestação que representasse um valor específico da prestação entre um conjunto dos valores máximos e mínimos possíveis*, foram identificadas semelhanças entre essa gramática e a gramática da palavra *média*, pois a gramática da palavra *média* no sistema matemático escolar pode ser vista como o encontro de *um* único valor que represente a tendência de um conjunto de valores.

⁷⁵ Reitero que no terceiro artigo da tese, o professor redefiniu a situação-problema original presente na tarefa de modelagem que tratava da identificação do valor *da prestação a ser paga pelo beneficiário em função do seu salário*, para a identificação do *valor mais ou menos da prestação a ser paga por beneficiários cuja renda salarial estivesse compreendida entre as faixas salariais de zero a três, de três a seis e de seis a dez salários mínimos*.

⁷⁶ As situações-problema abordadas em modelagem são, frequentemente, estruturadas em um texto escrito ou são oralmente descritas aos alunos. Assim, quando delimito que a situação-problema sugere uma gramática, refiro-me às gramáticas das palavras que compõem essas situações-problema.

Da mesma maneira, aponto que foi com base nas informações presentes na tarefa de modelagem que a professora, cujos discursos foram analisados no segundo artigo da tese, identificou que somente uma parte das lâmpadas é reciclada e essa parte correspondia a seis por cento do total de cem milhões de lâmpadas que são produzidas no Brasil e concluiu que a situação-problema deveria ser matematicamente compreendida como *tirar seis por cento de cem milhões*.

Assim, concebo que é a identificação de semelhanças entre as gramáticas sugeridas pelas situações-problema e as gramáticas das palavras à luz do sistema matemático escolar que fundamenta a maneira como o problema será *matematicamente* estruturado, ou seja, é a partir dessa identificação que se estipula como a situação-problema será *matematicamente organizada*. Denomino essa matematização da situação-problema à luz do sistema matemático escolar de *estruturação matemática*.

Existem também, situações-problema que são compostas por palavras que são mobilizadas no sistema matemático escolar. Como, por exemplo, a situação-problema apresentada por MaaB(2006) que se referia à identificação da *área* externa total de um carro. Ou ainda, a tarefa de modelagem presente, em Blum e Ferri (2009), que consistia na determinação da *distância* máxima que um navio pode avistar um farol.

Nessas situações, a palavra *área* e a palavra *distância* já possuem uma gramática no sistema matemático escolar, portanto podem ser situações em que as gramáticas peculiares ao sistema matemático escolar sejam diretamente acionadas⁷⁷.

A partir da estruturação matemática da situação-problema que é gerada pela identificação das semelhanças entre as gramáticas, indico que um conjunto de regras do tipo *como* são mobilizadas. As regras do tipo *como* citadas no segundo artigo da tese, são regras procedimentais, ou seja, são um conjunto regrado e ordenado de etapas adotadas para a organização da situação-problema.

Na análise do desenvolvimento da tarefa de modelagem citada no segundo artigo da tese, as regras procedimentais elaboradas foram aquelas referentes à *multiplicação de cem milhões por seis por cento*.

Já na realização da tarefa de modelagem relativa ao terceiro artigo da tese, as regras do tipo *como* consistiram nos procedimentos matemáticos usados para o *encontro do valor da média e a estruturação dos valores máximos e mínimos* das prestações salariais por faixa

⁷⁷ Ressalto que as palavras não são próprias de um ou de outro sistema, portando podem ter os seus usos vinculados a outros sistemas que não o matemático escolar. Todavia, julgo que, ao serem abordadas em âmbito escolar, atribuem-se às palavras os usos peculiares ao sistema matemático escolar, haja vista, nesse contexto, ser esse o sistema adotado como modelo.

salarial, na forma *de intervalos*.

O desenvolvimento das regras do tipo *como* corresponde à atribuição de usos procedimentais às palavras presentes na *estruturação matemática* da situação-problema. Especifiquei que as regras procedimentais relativas ao encontro da média, *somar os valores e dividi-los pela quantidade de valores somados*, indicam o que denomino de *uso procedimental* da palavra *média*.

Diante disso, compreendo que o desenvolvimento da estruturação matemática da situação-problema se refere à atribuição de *usos* procedimentais às palavras que compõem essa estruturação. Conforme já sinalizei, o uso procedimental relativo ao sistema matemático escolar é peculiar. É um uso caracterizado por uma simbologia própria e com etapas definidas.

O uso procedimental atribuído às palavras presentes na estruturação matemática *obter seis por cento de cem reais*, por exemplo, envolveu o uso da simbologia de multiplicação, de igualdade, de estrutura decimal para o valor de seis por cento, etc., conforme podemos identificar na seguinte reprodução dos usos procedimentais atribuídos a essa estruturação no segundo artigo da tese: $100 \times 0,06 = 100 \times 6/100 = 6$.

A partir dos estudos de Wittgenstein é possível compreender que os usos gramaticais e os usos procedimentais das palavras, tais quais, são mobilizadas pelo sistema matemático escolar não são únicos e estão relacionados à *forma de vida* específica, a qual esses usos foram elaborados.

Diante disso, a modelagem matemática, adotando o sistema matemático escolar como *normativo*, apresenta *uma* maneira de organizar situações empíricas. Em modelagem, essas situações empíricas são apresentadas oralmente aos alunos ou compõem tarefas de modelagem distribuídas a eles para as suas *organizações*.

Assim, sistematizo que a modelagem de uma situação empírica à luz dos conceitos teóricos aqui abordados, envolve, inicialmente, a identificação das semelhanças entre as palavras sugeridas pela situação-problema e as palavras peculiares ao sistema matemático escolar. Essa identificação gera a *estruturação matemática* da situação-problema que em outros termos, corresponde a como a situação-problema é compreendida com base no sistema matemático escolar.

A estruturação matemática elaborada é, por sua vez, desenvolvida, utilizando as regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar. Essas regras correspondem à atribuição de usos procedimentais às palavras presentes na estruturação matemática adotada.,

A utilização da simbologia do sistema matemático escolar, a adoção de etapas para o desenvolvimento do procedimento e a maneira de apresentar a finalização desse

desenvolvimento, são exemplos de usos procedimentais que culminam na modelagem da situação-problema.

A seguir, apresento algumas questões resultantes da análise da caracterização da aprendizagem matemática que se constitui a partir da compreensão de modelagem sustentada nas ideias acima.

3.2. APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NA MODELAGEM

Com base na compreensão de modelagem delineada anteriormente, entendo a aprendizagem matemática na modelagem como a aprendizagem de usos das palavras à luz do sistema matemático escolar. Indico ainda que, em modelagem, essa aprendizagem possui peculiaridades.

As gramáticas das palavras relativas ao sistema matemático escolar são aprendidas no que elas têm de semelhança com as gramáticas sugeridas pelas palavras presentes nas situações-problema. Ou seja, a aprendizagem matemática na modelagem envolve o aprendizado da própria gramática peculiar ao sistema matemático escolar e de sua semelhança com outras gramáticas, em particular, aquelas sugeridas pela situação-problema.

Essa aprendizagem gera a estruturação matemática da situação-problema, portanto, nesse sentido, podemos dizer que a aprendizagem das gramáticas das palavras relativas ao sistema matemático escolar na modelagem, compreende a aprendizagem da maneira de *ver* uma situação-problema, com base no sistema matemático escolar.

Além disso, aponto que, em modelagem, os alunos aprendem a atribuir usos procedimentais às palavras presentes na estruturação matemática. Tendo em vista que nessa estruturação, as palavras já estão orientadas pela gramática do sistema matemático escolar, destaco que os usos procedimentais elaborados são estritamente relacionados a esse sistema. São exemplos, os procedimentos relativos a calcular a média, a obter seis por cento de cem milhões, a calcular o volume do cone, etc.

Embora os usos procedimentais sejam usos peculiares ao sistema matemático escolar, os seus resultados são analisados, em termos da gramática sugerida pelas palavras presentes na situação-problema. Por exemplo, a *média* encontrada se refere ao valor da prestação salarial a ser paga pelo beneficiário, no caso da tarefa de modelagem presente no terceiro artigo da tese. Ou ainda, os cálculos referentes ao volume do *cone* são analisados como correspondentes ao volume da *taça de vinho*, no exemplo citado por Niss (2010) referente à matematização da quantidade de vinho que preencheria uma taça em dois terços de

seu volume total.

Assim, a aprendizagem matemática na modelagem envolve também, a aprendizagem dos procedimentais relativos ao sistema matemático escolar. Porém, esses usos procedimentais são *vistos*, a partir da semelhança já instituída entre a gramática das palavras relativas ao sistema matemático escolar e a gramática da situação-problema. Diante dessa questão, acrescento que essa aprendizagem engloba também, a leitura dos *usos procedimentais*, a partir das semelhanças entre essas gramáticas.

Nos dois artigos da tese, foi apontado que o desenvolvimento da tarefa de modelagem, ou seja, a identificação dos usos procedimentais e dos usos gramaticais relativos ao sistema matemático escolar, no que se refere às semelhanças com a gramática das palavras sugerida pela situação-problema, foi sugerida ou diretamente apontada pelos professores.

Por outro lado, foi possível notar que os alunos buscaram atribuir às palavras somente os usos que foram sugeridos pelos professores. Ou seja, eles tentaram identificar, nas sugestões do professor, quais seriam os usos avaliados como legítimos. Enquanto que os professores explicitaram aos alunos que a sua condução, quanto à maneira de desenvolver a situação-problema, deveria ser tida como modelo de resolução da mesma.

Assim, relatei que a produção discursiva dos professores foi adotada, predominantemente, no desenvolvimento da tarefa de modelagem como *discurso líder*, ou seja, discurso o qual, os alunos deveriam assumir como *modelo* para as suas produções discursivas.

Destaco que a adoção da produção discursiva do professor como *discurso líder* pode não advir somente de sua função historicamente estabelecida, como indivíduo já conhecedor das produções discursivas peculiares ao sistema matemático escolar e que possui a função de ensinar essas produções.

Sugiro que essas relações de poder evidenciadas pela adoção do discurso do professor como discurso líder podem ser analisadas como diagnósticas das relações de poder existentes entre os diferentes sistemas matemáticos normativos.

O discurso do professor pode assumir a posição de discurso líder, haja vista seu discurso ser historicamente estabelecido como o discurso que é orientado pelo sistema matemático escolar e esse sistema ser adotado como único sistema normativo válido e útil no contexto escolar.

Adotando essa liderança, os alunos procuraram, nos diferentes usos da linguagem feitos pelo professor, quais seriam os usos gramaticais e procedimentais das palavras relativos ao sistema matemático escolar que deveriam ser mobilizados para a matematização da

situação-problema de maneira legítima e não somente nas sugestões do professor quanto a essa matematização.

Isso porque os alunos buscaram identificar quais seriam as produções discursivas legítimas também em outros usos da linguagem, como nos gestos da professora, no silêncio dela frente à estruturação matemática dos alunos, em suas sugestões pronunciadas repetidas vezes, etc.

Esses são exemplos de outros usos da linguagem, cujas regras foram tomadas pelos alunos como indicativas de quais usos procedimentais e gramaticais deveriam ser atribuídos às palavras para a abordagem das situações-problema.

A aprendizagem de uma língua materna pelas crianças está entre um dos exemplos que Wittgenstein (1999) designa de *jogos de linguagem*. Entre as razões para essa compreensão pode estar o fato de que a aprendizagem de uma língua materna envolve um conjunto de usos regrados da linguagem.

Por exemplo, as crianças aprendem que devem pronunciar certas palavras, quando um adulto aponta para um objeto e questiona à criança sobre o nome dele; aprendem que palavras devem ser pronunciadas quando sentirem determinadas sensações no corpo; que não pronunciaram uma palavra corretamente, quando obtém do adulto um gesto de reprovação, etc.

Assim, sugiro que as crianças, na aprendizagem de uma língua materna, aprendem quais as regras que envolvem os diversos usos da linguagem, estabelecidas pelo grupo social que ela integra.

Nessa direção, aponto que a aprendizagem matemática na modelagem também envolve a identificação e o aprendizado de diversas regras relativas aos usos da linguagem. Isso porque, outros usos da linguagem configuram a aprendizagem do sistema matemático escolar e não apenas os usos das palavras relativas a esse sistema. Por exemplo, *o silêncio* da professora foi indicativo de que os alunos precisavam mobilizar outros usos procedimentais das palavras e *seu gesto* de aprovação foi identificado pelos alunos como um sinal de que atribuíram usos às palavras de maneira correta.

Assim, denomino que a aprendizagem matemática na modelagem, semelhantemente ao aprendizado de uma língua materna, pode ser compreendida como *jogos de linguagem*. Compreender a aprendizagem matemática na modelagem como *jogos de linguagem* significa considerar que essa aprendizagem envolve um conjunto de usos regrados da linguagem.

Com base na indicação de Harré e Tisaw (2005, p. 121, tradução nossa) de que os usos regrados da linguagem são usos “coercitivos”, porque eles são mobilizados por relações

hierárquicas estabelecidas entre os indivíduos, delimito a aprendizagem matemática na modelagem de *jogos de linguagem coercitivos*.

A *coerção* que aponto diz respeito ao reconhecimento de que as *relações de poder* instituídas em âmbito escolar, tanto aquelas referentes à adoção de um único sistema normativo como sistema modelo, como a caracterizada pela escolha da produção discursiva do professor como produção discursiva líder, são relações que configuram o *jogo de linguagem* relativo à aprendizagem matemática na modelagem.

No desenvolvimento da tarefa de modelagem analisados nos dois artigos da tese, foi identificado o quanto a produção discursiva do professor foi adotada pelos alunos como discurso líder, configurando assim, a maneira como os alunos abordaram as situações-problema.

Designo as sugestões que os professores elaboram para auxiliar os alunos no desenvolvimento das tarefas de modelagem de *estratégias de modelagem*. Essas estratégias compreendem todas as sugestões apresentadas pelo professor referentes à modelagem da situação-problema, ou seja, à estruturação matemática da situação-problema, à identificação de semelhanças entre gramáticas, ao uso procedimental e gramatical peculiar ao sistema matemático escolar, etc.

Entre as estratégias adotadas pelos professores, cujas produções discursivas foram analisadas nesta tese, destaco a estratégia de apresentar aos alunos estruturas matemáticas semelhantes às aquelas peculiares à situação-problema. Essa estratégia foi adotada pela professora citada no segundo artigo da tese.

A professora apresentou aos alunos como a situação-problema deveria ser estruturada matematicamente, mas suas sugestões iniciais não geraram a produção discursiva por ela almejada. Diante disso, a professora optou por sugerir aos alunos uma estruturação matemática que deveria ser vista como uma estruturação matemática semelhante a da situação-problema.

Assim, a sugestão da professora relativa a *obter seis por cento de dez reais* era a sugestão de uma estruturação matemática, cujos usos procedimentais atribuídos às palavras eram usos semelhantes aos usos procedimentais relativos à estruturação matemática da situação-problema original. Denoto as estratégias de modelagem dessa natureza de *estruturas matemáticas semelhantes*.

Embora a professora tenha escolhido como estratégia o uso de uma temática, sob meu ponto de vista, mais relacionada ao dia a dia dos alunos, haja vista ter optado por se referir ao dinheiro e não mais às lâmpadas, os usos procedimentais atribuídos pelos alunos às

palavras foram usos peculiares ao sistema matemático escolar.

Essa questão permite sugerir que no contexto escolar, o sistema matemático é adotado pelos alunos como sistema modelo, pelo qual os usos atribuídos às palavras devem ser mobilizados. Isso pode indicar que os temas tratados nas situações-problema, sejam eles sobre dinheiro, lâmpadas, carros e etc., são analisados sob o aspecto do sistema matemático escolar.

Com isso, aponto que as discordâncias que podem ocorrer entre os usos atribuídos às palavras pelos professores e pelos alunos podem ser discordâncias não advindas de outros sistemas matemáticos normativos, e sim, do próprio sistema matemático escolar. No segundo artigo da tese, foi evidenciado que um aluno atribuiu à palavra *tirar* um uso peculiar ao sistema matemático escolar, porém esse não era o uso que a professora almejava que os alunos atribuísem.

Assim, denomino as diferenças que podem ocorrer entre os usos gramaticais e procedimentais atribuídos pelo professor e pelos alunos, na dinâmica da aprendizagem matemática na modelagem de *divergências discursivas*, inspirada no conceito teórico *conflito commognitivo* de Sfard (2008).

Essas divergências se referem a toda e qualquer diferença que se constitua na dinâmica da aprendizagem em âmbito escolar, entre os usos das palavras atribuídos pelos professores e os usos das palavras atribuídos pelos alunos. Ou seja, compreendem as divergências entre os usos de palavras oriundos de um mesmo sistema, ou de sistemas diferentes.

A ocorrência de divergências discursivas caracterizadas pelos usos de palavras vinculados a diferentes sistemas pode ser uma oportunidade de o professor realizar o que denominei de *delimitação discursiva*. Delimitação discursiva é uma expressão elaborada, a partir do uso da expressão *mudança discursiva* de Sfard (2008).

A proposta de delimitação discursiva consiste na identificação dos professores aos alunos da legitimidade que envolve os diferentes sistemas matemáticos normativos e na ênfase dos seus usos em função das *formas de vida* que cada sistema está vinculado.

Os usos que atribuímos às palavras são decorrentes das *formas de vida*, das quais participamos. Esses usos, porém, repousam sob critérios de legitimidade. A legitimidade é um critério criado e julgado pelos participantes vinculados à determinadas *formas de vida*.

O sistema matemático escolar é peculiar e sua constituição está relacionada a uma *forma de vida* específica. Dessa maneira, a abordagem de situações-problema empíricas, adotando esse modelo, resulta em uma particular maneira de *ver* essas situações, mas não a

única.

Assim, sugiro que a realização de *delimitação discursiva*, a partir dos critérios de legitimidade dos sistemas em determinado contexto, pode tornar explícita a compreensão da existência de diferentes sistemas matemáticos normativos, em função das finalidades instituídas no interior das formas de vida, as quais pertencem.

Nessa direção, aponto que a aprendizagem matemática na modelagem pode se constituir como a aprendizagem *do* sistema matemático escolar e *de quando, em que circunstâncias* o uso desse sistema é legítimo na organização das situações empíricas adotadas. Legitimidade que pode ser compreendida em função das finalidades que se objetiva atingir.

Por fim, destaco que as ideias de Anna Sfard e Ludwig Wittgenstein me permitiram apresentar *uma* maneira de *ver* a aprendizagem matemática na modelagem e sua dinâmica no contexto escolar, evidenciando que entendimento de matemática, de modelagem e de aprendizagem matemática a sustenta.

Referências

BLUM, W; BORROMEO FERRI, R. Mathematical modeling: can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v.1, p. 45-58, 2009.

HARRÉ, R; TISSAW, M.A. *Wittgenstein and Psychology*. A practical guide. ASGATE: ENGLAND, 2005.

MAAß, K. What are modelling competencies. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. In: LESS et al. (Org.). *Modeling student mathematical modeling competences: 13 ICTMA*. New York: Springer, 2010. p. 43-59.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press, 2008.

SONEGO, V.G. BISOGNIM, E. As contribuições da etnomodelagem matemática no estudo da geometria espacial. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: SBEM, 2010. 1. CD-ROM.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999. (Coleção os pensadores).

CAPÍTULO 4

IMPLICAÇÕES DA PESQUISA

Neste capítulo, apresento algumas possíveis implicações das ideias elaboradas nesta pesquisa, para a prática pedagógica do professor em sua implementação da modelagem em âmbito escolar, para as pesquisas em modelagem e para algumas delimitações teóricas de Anna Sfard sobre aprendizagem matemática. Por fim, esboço futuros estudos que podem ser desenvolvidos.

4.1 IMPLICAÇÕES PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA DO PROFESSOR

Caracterizei que em modelagem, a resolução matemática das situações-problema se delimita pela identificação de semelhanças entre as gramáticas sugeridas pela situação-problema e gramáticas de palavras mobilizadas no sistema matemático escolar e posterior desenvolvimento de usos procedimentais relativos a esse sistema.

A partir da análise das transcrições dos discursos dos professores e dos alunos no desenvolvimento das tarefas de modelagem propostas, identifiquei que o discurso do professor conduziu a maneira pela qual os alunos resolveram a situação-problema, ou seja, conduziu os usos gramaticais e procedimentais elaborados por eles.

Essa questão nos aponta para a importância da maneira como o professor aborda esses usos, haja vista eles serem tomados pelos alunos como *modelo*, dos usos peculiares ao sistema matemático escolar que os alunos atribuirão às palavras mobilizadas na tarefa de modelagem.

Em modelagem, a *leitura* da situação-problema é realizada a partir da gramática relativa ao sistema matemático escolar, buscando-se por semelhanças entre essa gramática e a gramática sugerida pela situação-problema. Todavia, pode ser que essas semelhanças não sejam diretamente identificáveis.

Nesse aspecto, ressalto que o contexto escolar pode ser tido como indicativo de que o sistema matemático escolar deve ser utilizado para análise da gramática da situação-problema, haja vista nesse contexto, esse ser o sistema matemático adotado como legítimo.

As palavras presentes na própria situação-problema podem indicar essa gramática, pois podem ser palavras que já possuam seu uso gramatical peculiar ao sistema matemático escolar, como por exemplo, situações-problemas que explicitem: calculem a *área* de um

terreno, encontrem a *função* que indique a taxa da evasão escolar anual de alunos, entre outras.

Entretanto, pode não ser diretamente identificável que encontrar a área lateral de um *silo*, deva ser realizado, a partir dos cálculos relativos à área lateral de um *cilindro*⁷⁸, pois essa identificação depende da adoção do sistema matemático escolar.

Nesse caso, a semelhança entre as formas dessas duas figuras pode ser sugerida pelo professor, ou ainda, ela pode ser realizada pelos alunos, desde que semelhanças dessa natureza já tenham sido abordadas no âmbito escolar, pois são semelhanças criadas e não naturalmente existentes.

Na pesquisa realizada foi possível identificar que o professor possui um papel relevante sobre os usos que os alunos irão atribuir às palavras na abordagem matemática da situação-problema.

Os professores ao serem questionados pelos alunos criam diferentes estratégias, apresentando orientações diretas ou indiretas aos alunos a respeito de como os problemas podem ser abordados. Esse momento pode ser identificado como o momento de ensinar certos usos gramaticais e procedimentais das palavras que são peculiares ao sistema matemático ou, ainda, de suscitar que os alunos mobilizem usos que já foram abordados em âmbito escolar.

Indico ainda, que as sugestões do professor podem conduzir os alunos a atribuir usos às palavras que não eram os usos que o professor almejava. Esses casos podem ser indicativos de que o professor precisa mudar a sua produção discursiva. Uma mudança não apenas nas temáticas envolvidas (p.ex. mudar o seu discurso de lâmpadas para dinheiro), mas nas palavras que compõem as produções discursivas do professor.

Por fim, destaco que a aprendizagem da atribuição de usos às palavras relativas ao sistema matemático escolar, que se constitui na modelagem, envolve usos regrados da linguagem de várias ordens. O silêncio do professor, seus gestos, a repetição de suas sugestões e a ênfase na qual ele pronuncia as palavras, são exemplos de usos da linguagem, cujas regras são adotadas como diagnóstico de como os alunos devem abordar matematicamente as situações-problema.

⁷⁸ Nesse caso, sugiro que podem ser identificadas semelhanças entre a gramática da palavra *silo* e a gramática da palavra *cilindro*. As semelhanças são identificadas, nesse caso, entre os objetos os quais as palavras denotam.

4.2 IMPLICAÇÕES PARA AS PESQUISAS EM MODELAGEM

Com base no entendimento de matemática como tendo função normativa de nossas experiências no mundo, apresentada por Wittgenstein, elaborei *uma* maneira de conceber modelagem. Modelagem corresponde à *organização de situações empíricas, utilizando o sistema matemático escolar como sistema normativo*.

Conforme apontou Araújo (2007), as definições de modelagem embutem, implicitamente, sustentações filosóficas. As palavras que compõem a delimitação apresentada anteriormente, possuem basicamente dois entendimentos particulares.

O primeiro deles é o de matemática como sistema normativo cujo uso molda a maneira de lidar com as situações-problema, ou seja, as *organiza* de determinado modo. O segundo se refere à compreensão de que as situações-problema, as quais a modelagem aborda, são situações passíveis de verificação pela experimentação e observação, propostas na forma de problemas, por isso, denominadas de situações-problema de natureza empírica.

A partir da ideia de *uso* de Wittgenstein (1999) e de modelagem apresentada acima, delimitei que a aprendizagem matemática do sistema matemático na modelagem corresponde à aprendizagem dos usos gramaticais e procedimentais relativos ao sistema matemático escolar, a partir das semelhanças entre esses usos e os usos das palavras sugeridos pelas gramáticas das situações-problema de natureza empírica.

Sugiro, por exemplo, que na tarefa de modelagem desenvolvida no terceiro artigo da tese, o uso gramatical da palavra média foi aprendido pelos alunos, a partir da semelhança entre esse uso e a gramática *achar mais ou menos o valor das prestações salariais*. Também o uso procedimental da palavra média foi abordado como a soma de alguns valores das *prestações* e divisão desse resultado pela quantidade de valores das prestações somadas.

Diante disso, podemos nos questionar: Que usos gramaticais e procedimentais os alunos passam a atribuir às palavras, a partir da maneira pela qual, esses usos são abordados em modelagem? Qual seria o uso gramatical e procedimental atribuídos pelos alunos à palavra média, por exemplo, em outra situação-problema de natureza empírica que não tratasse de valores das prestações salariais? Esses usos preservariam semelhanças com os usos atribuídos anteriormente?

Além disso, aponto que pesquisas a respeito das *estratégias de modelagem* adotadas pelos professores podem ampliar a compreensão de como eles orientam os alunos sobre a realização das tarefas de modelagem. Também, o estudo sobre essas estratégias pode apresentar elementos sobre como as produções discursivas do professor configuram as

produções discursivas dos alunos e vice-versa.

Na pesquisa de Oliveira (2010), podemos constatar que as orientações dos professores aos alunos são permeadas por dúvidas e incertezas quanto à coerência de suas orientações em relação ao desenvolvimento da tarefa de modelagem pelos alunos, em particular, a como abordar os conteúdos matemáticos.

Essa identificação de Oliveira (2010) nos aponta que estudos sobre as estratégias de modelagem dos professores podem gerar compreensões sobre como eles lidam com dúvidas referentes à abordagem dos conteúdos propriamente, ou seja, de que maneira ensinam os usos gramaticais e procedimentais de palavras peculiares ao sistema matemático escolar, como eles dirimem dúvidas e discordâncias quanto a esses usos, como os professores apontam semelhanças entre as gramáticas das palavras, etc.

4.3 IMPLICAÇÕES PARA ALGUMAS DEFINIÇÕES TEÓRICAS DE ANNA SFARD

Sfard (2008) apresenta um entendimento discursivo de matemática, definindo matemática como toda produção discursiva oral e escrita que versem sobre objetos matemáticos. A partir dessa compreensão, a autora descreve um conjunto de conceitos teóricos relativos à dinâmica da aprendizagem dessa produção discursiva denominada também de discurso matemático escolar.

Para Sfard (2008), a aprendizagem do discurso matemático é gerada a partir de um conflito entre as regras que orientam a produção discursiva dos alunos e as regras relativas à produção discursiva do professor. O conflito é dirimido quando os alunos *mudam* esses usos por usos peculiares ao discurso matemático. Isso ocorre quando os alunos adotam a produção discursiva do professor como discurso modelo.

Entretanto, Sfard (2008) aponta que alguns alunos não seguem as orientações do professor e nem mudam as suas produções discursivas e, com isso, não produzem discursos matemáticos legítimos. A autora denomina tais exemplos de “casos de resistência dos alunos” (SFARD, 2008, p. 284, tradução nossa).

Com base na ideia de *forma de vida* de Wittgenstein (1999) e a sua indicação que os usos das palavras estão relacionados a *ela*, sugiro que os casos de resistência dos alunos, entre outras razões, podem estar relacionados à propositura de mudança discursiva dos alunos, ou seja, de substituição dos usos que os alunos atribuem às palavras para os usos peculiares ao sistema matemático escolar.

Quando os usos não peculiares ao sistema matemático escolar são mobilizados em

âmbito escolar, Sfard (2008) os identifica como problemáticos e causadores de conflitos, apontando a sua substituição por usos considerados legítimos no contexto escolar. A ideia de substituição pode fundamentar alguns casos de resistência dos alunos à aprendizagem do sistema matemático escolar.

O esclarecimento de que os vários usos atribuídos às palavras são legítimos, a depender da *forma de vida* a qual são mobilizados, pode contribuir para não descaracterizar os usos próprios que os alunos atribuem às palavras e nem intencionar substituir por outros.

4.4 ESTUDOS FUTUROS

Entre algumas questões já sugeridas ao longo desse capítulo, em termos de possibilidade de estudos futuros, assinalo que pode ser objeto de outros projetos de pesquisa a identificação das semelhanças entre as gramáticas sugeridas pela situação-problema e a gramática relativa ao sistema matemático escolar, responsável pela inicial estruturação da situação-problema à luz do sistema matemático escolar.

Demais pesquisas podem ser realizadas com intuito de compreender porque algumas gramáticas de usos de palavras relativas ao sistema matemático preservam semelhanças com as gramáticas de palavras sugeridas pelas situações-problema de natureza empírica. Além disso, na abordagem de situações empíricas que possuem outro sistema matemático como sistema normativo, também há a busca por semelhanças?

Nessa pesquisa sugeri que a aprendizagem matemática na modelagem se caracteriza como jogos de linguagem, em que os diversos usos regrados da linguagem configuram os usos gramaticais e procedimentais adotados pelos alunos para organizar a situação-problema presente na tarefa de modelagem.

Além disso, aponte que os jogos de linguagem constituídos na aprendizagem matemática foram mobilizados por *relações de poder* historicamente estabelecidas entre sistemas matemáticos que, por sua vez, repercutem nas relações de poder entre a produção discursiva do professor e a produção discursiva dos alunos.

Assim, também sugiro que demais pesquisas podem ser realizadas com objetivo de identificar como as regras relativas aos diversos usos da linguagem, que são permeadas *por relações de poder*, configuram o desenvolvimento da tarefa de modelagem como um todo, não apenas, a matematização da situação-problema. Em particular, é sobre essa questão específica que pretendo desenvolver futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007, 17-32.

OLIVEIRA, A. M. P.O. Modelagem matemática e as tensões nos discursos dos professores. 187 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências)- Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2010.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press, 2008.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999. (Coleção os pensadores).