Marcelo Papini de F. Cajueiro

Contribuição ao estudo histórico e crítico do pensamento matemático

Orientador: Prof. Dr. Aurino Ribeiro Filho

Tese de doutoramento apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, promovido pela Universidade Federal da Bahia e pela Universidade Estadual de Feira de Santana.

Salvador, 10 de março de 2011

Tese defendida e aprovada, em 10 de março de 2011, pela banca examinadora constituída pelos professores

---

Dr. Aurino Ribeiro Filho (UFBA, orientador)

Dr. Ademir Eugênio de Santana (UNB)

Dr. Enaldo Silva Vergasta (UFBA)

Dr. Olival Freire Júnior (UFBA)

Dr. Ricardo Carneiro de Miranda Filho (UFBA)

Dr. José Luís de Paula Barros Silva (UFBA)

Dr. Thierry Correa Petit Lobão (UFBA)

Agradecimento

- **Ao orientador, prof. dr. Aurino Ribeiro Filho, sem cuja direção segura e inspiradora, esta tese não teria sido iniciada.**

- **À minha consorte, Maria de Lourdes, sem cujo concurso, esta tese não teria sido concluída.**

- **Ao Colegiado do programa de pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, por haver acreditado na exequibilidade de meu projeto de pesquisa.**

- **Aos membros da banca do exame de qualificação, cujas sugestões concorreram ao aprimoramento da presente tese (*sem reduzir minha responsabilidade pelo resultado)*.**

- **Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia, por me haver reduzido os encargos docentes, durante oito semestres letivos, permitindo maior devotamento à redação da presente tese.**

- **À CAPES e aos outros organismos que, de algum modo, concedem o acesso a um amplo espectro de fontes, sem as quais seria inviável, aos investigadores residentes em rincões afastados dos polos culturais, efetuar trabalhos de pesquisa.**

***In memoriam* de meu genitor, João E. Cajueiro, professor catedrático de Língua Portuguesa do antigo Colégio Estadual de Sergipe.**

Dedicatória —

Aos meus filhos Daniel e Susana.

Resumo —

Este escrito propõe-se a perquirir, de uma perspectiva diacrônica, alguns aspectos relevantes do pensamento matemático contemporâneo. Nesse intuito, após se comentarem diversas ideias concebidas no curso do amadurecimento do cálculo infinitesimal, é feita uma breve discussão do quesito fundacional e são descritos tanto o tecido conceitual quanto as técnicas demonstrativas.

Abstract —

This work sets out to investigate, from a diachronic standpoint, some impressive aspects of contemporary mathematical thought. For that purpose, after taking a historical looking at several ideas brought up during the growth of infinitesimal calculus, a short discussion on the quest of foundations is given and the conceptual web and proof techniques are depicted.

Résumé —

Le but de cette étude est d'analyser, d'une perspective diachronique, quelques aspects notables de la pensée mathématique contemporaine. Pour cela, après avoir commenté plusieurs idées engendrées pendant le développement du calcul infinitésimal, on discute brièvement la recherche des fondements et on décrit le tissu conceptuel et les techniques démonstratives.

Sumário —

Prefação (p. 1)

Capítulo primeiro: Considerações sobre o objeto e o método deste estudo

- Antelóquio (p. 7)
- O objeto da investigação (p. 10)
- A historicidade dos dados experimentais e a impregnação teórica dos dados históricos (p. 11)
- Um método de estudo crítico do pensamento matemático e as suas fontes (p. 14)
- O quesito dos contextos (p. 17)
- O anacronismo (p. 19)
- O distanciamento temporal (p. 21)
- A metáfora adotada como epígrafe (p. 24)
- A exatidão factual na narrativa histórica (p. 27)
- Os precursores no uso do método de investigação adotado (p. 30)
- Resumo (p. 33)
- Fontes (p. 34)

Capítulo segundo: Breve introdução histórica ao pensamento matemático — parte A

- Antelóquio (p. 40)
- Contextuamento (p. 40)
- A geometria de Descartes (p. 42)
- A discordância entre geômetras (p. 45)
- Ideias cosmogônicas (p. 47)
- A construção de retas tangentes (p. 48)
- A emergência do conceito de função (p. 49)
- As séries de potências (p. 50)

- A invenção do cálculo infinitesimal (p. 53)
- A filosofia da natureza (p. 55)
- O entendimento humano e a experiência (p. 58)
- A reação ao cálculo das fluxões (p. 60)
- O nascimento da física matemática (p. 63)
- A curvatura e outras noções geométricas (p. 65)
- A maturescência do cálculo infinitesimal (p. 69)
- Novamente o conceito de função (p. 72)
- A imagem do cálculo e da matemática (p. 79)
- Reflexões sobre a matemática (p. 83)
- Resumo (p. 91)
- Fontes (p. 92)

Capítulo terceiro: Breve introdução histórica ao pensamento matemático — parte B

- Antelóquio (p. 99)
- Da álgebra à geometria das curvas (p. 100)
- Do cálculo infinitesimal à geometria das superfícies (p. 101)
- Apreensões distintas da mesma realidade (p. 102)
- Um novo florescimento do pensar geométrico (p. 105)
- Duas imagens conflitantes da matemática (p. 108)
- A gênese do culto do rigor (p. 113)
- A geometria intrínseca das superfícies (p. 123)
- Os triângulos retilíneos e a emergência do modelo euclidiano (p. 128)
- Um outro modelo do espaço físico (p. 132)
- A geometria das pluralidades (p. **137)**
- O declínio da hegemonia do modelo euclidiano (p. 147)
- Resumo (p. 153)
- Fontes (p. 153)

Capítulo quarto: Breve introdução histórica ao pensamento matemático — parte C

- Antelóquio (p. 161)
- A bela infiel e a concepção de uma álgebra simbólica (p. 162)
- A intuição e a aritmetização da análise (p. 170)
- O logicismo (p. 178)
- O intuicionismo (p. 183)
- O formalismo (p. 186)
- O pragmaticismo (p. 189)
- Resumo (p. 194)
- Fontes (p. 194)

Capítulo quinto: Da conceituação — As definições explícitas

- Antelóquio (p. 202)
- As definições nominais (p. 203)
- As definições por abstração (p. 206)
- Primeiro exemplo: A equivalência motivada por homomorfismos não injetivos (p. 209)
- Segundo exemplo: O anel dos números inteiros (p. 214)
- A ampliação do conceito de função (p. 221)
- Conclusão (p. 224)
- Fontes (p. 224)

Capítulo sexto: Da analogia na extensão de conceitos

- Antelóquio (p. 228)
- Episódio associado à extensão da noção de congruência (p. 230)
- Episódio associado à criação dos quaterniões (p. 231)
- Episódio associado à divisibilidade em domínios de integridade (p. 239)
- Episódio associado à construção do corpo de frações de um domínio de integridade (p. 248)

- Episódio associado à construção do anel dos inteiros (a simetrização de uma lei de composição interna) (p. 251)
- Da extensão de conceitos por oposição (p. 253)
- Conclusão (p. 256)
- Fontes (p. 257)

Capítulo sétimo: Do método axiomático e das definições implícitas

- Antelóquio (p. 262)
- Antecedentes geométricos do método axiomático (p. 263)
- Primeiro exemplo de definição axiomática: Os reticulados (p. 277)
- Segundo exemplo de definição axiomática: Os números naturais (p. 279)
- Terceiro exemplo de definição axiomática: As noções de proximidade e de espaço topológico (p. 281)
- Quarto exemplo de definição axiomática: Uma plenificação do corpo dos números racionais (p. 286)
- Quinto exemplo de definição axiomática: Dos espaços dotados de produto interno aos espaços métricos (p. 288)
- Sexto exemplo de definição axiomática: A teoria dos corpos valorados (p. 295)
- Conclusão (p. 302)
- Fontes (p. 302)

Capítulo oitavo: Dos tipos e dos estilos de argumentação

- Antelóquio (p. 307)
- A origem da ideia de demonstração (p. 309)
- Os argumentos diretos e os argumentos indiretos (p. 314)
- As provas de existência (p. 316)
- As provas por recorrência (p. 319)
- As definições por recorrência (p. 321)
- Tipos de provas (p. 326)
- Da pluralidade das provas (p. 332)

- Aspectos perceptivos (p. 333)
- A visão e o tato como sentidos complementares (p. 339)
- As fases do processo gnoseológico (p. 343)
- O problema da prova (p. 347)
- Conclusão (p. 361)
- Fontes (p. 361)

Capítulo nono: O pensamento estrutural

- Antelóquio (p. 371)
- A algebrização (p. 372)
- A algebrização de teoremas (p. 373)
- Uma mudança de perspectiva (p. 377)
- A gênese da estrutura de corpo (p. 383)
- A instituição do método estrutural (p. 392)
- A formação de uma nova imagem da matemática (p. 402)
- As categorias e os seus morfismos (p. 406)
- Fontes (p. 415)

Conclusão da tese

- Resumo histórico (p. 427)
- Contribuição ao estudo do pensamento matemático (p. 430)
- Implicações didascálicas (p. 433)
- Prolongamento da investigação (p. 441)

Fontes referidas (p. 445)

Prefação

Presentemente, é usual que os textos expositivos de matemática tenham caráter anistórico. A escolha desse estilo de redação justifica-se, sobretudo, pela simplicidade na apresentação e pela capacidade de se exibirem facilmente os aspectos essenciais de cada teoria. (Em uma época na qual a eficácia é considerada qualidade indispensável a todos os negócios humanos, a conveniência das exposições simples e diretas não será discutida.)

E como modelo dos textos de sistematização do conhecimento matemático se impuseram os *Éléments de mathématique* (no singular), redigidos pelos colaboradores de Nicolas Bourbaki, cuja edição foi iniciada em 1939.

Não obstante, em textos de vocação didática, os autores se permitem inserir comentários que, de algum modo, conduzam os leitores às definições e aos teoremas que pretendem expor.

Assim, por exemplo, na obra *Elementos de topologia geral* (que o autor pretendeu constituísse seu "depoimento pessoal sobre que topologia geral gostaria fosse sabida por todos os matemáticos"), ao introduzir a noção de espaços compactos, Elon Lages Lima discutiu, *no âmbito dos espaços métricos*, a propriedade de Bolzano-Weierstrass (*todo conjunto infinito e limitado admite um ponto de acumulação*), mostrando que essa propriedade é equivalente à propriedade de Borel-Lebesgue (*toda família de conjuntos abertos que recobre um dado conjunto admite uma subfamília finita que ainda recobre o conjunto considerado*).

Em seguida, LIMA [1976:173-174] observou que, **nos espaços topológicos** (gerais) essa equivalência não subsiste. Apenas a propriedade de Borel-Lebesgue implica a propriedade de Bolzano-Weierstrass. E asseverou: "A experiência mostrou que a propriedade de Borel-Lebesgue é a mais útil das duas, no caso geral. Por isso, foi escolhida para se definirem os espaços compactos."

Revelações dessa natureza apontam uma diferença, muitas vezes não declarada (mas admitida tacitamente), entre o conhecimento matemático (a ciência produzida de que tratara, por exemplo, Nicolas Bourbaki) e o processo de se articularem as ideias e as proposições matemáticas (o pensamento matemático que conduz à produção de ciência).

A presente tese pretende desvelar, parcialmente, as motivações, os contextos históricos e culturais e os métodos usados na produção da matemática.

Mas, opondo-se à noção *estática* da ciência como produto, a noção de produção da ciência remete à sua dimensão temporal, consubstanciada na narrativa histórica.

Por outro lado, um estudo sobre o caráter de uma ciência constitui um discurso sobre essa ciência, o qual nos remete à sua dimensão epistêmica (na acepção de estudo crítico da ciência).

Desse modo, a ambição de investigar a produção da matemática nos conduz a um estudo histórico e crítico do pensamento matemático.

Algum leitor mais arguto poderá indagar por que nos devemos ocupar com tal tipo de estudos, no albor do século XXI, quando estamos envolvidos com problemas bem mais relevantes, como os quesitos aduzidos pela biologia molecular e pela nanotecnologia.

Penso que a melhor resposta a perguntas dessa espécie já tenha sido dada por R. W. Hamming, ao evocar um diálogo mantido em Los Alamos, durante a segunda guerra mundial, quando estavam sendo projetadas as primeiras bombas atômicas e se enfrentou a questão de que não interessava efetuar nenhum experimento em pequena escala: Ou se operava com uma massa crítica ou, simplesmente, nada se fazia.

Narra HAMMING [1998:640] lhe haver um colega pedido que revisse um cálculo. Indagado de que se tratava, o colega respondeu: "É o cálculo da probabilidade de que a bomba de teste incendeie toda a atmosfera."

Refletindo sobre isso, Hamming percebeu que uma parcela da humanidade corria o risco de extinguir todos os tipos de vida existentes no universo conhecido, com base em argumentos matemáticos. E concluiu que a matemática não era apenas um tipo ocioso de arte mas uma parte essencial da sociedade humana.

Bem longe de pretender validar o emprego do conhecimento matemático como artefato bélico, o presente escrito intenta contribuir para melhor se entender a posição da matemática na cultura humana, notando que, se outrora era a física o campo natural de aplicação da matemática, hoje em dia, através da teoria dos nós, a matemática também está presente nas investigações da biologia molecular e que as teorias econômicas não cessam de exigir ferramentas cada vez mais maleáveis, adequadas ao seu objeto.

Novamente, o tal leitor arguto poderá exigir que seja delimitada a abrangência do presente estudo. Mas a matemática tem recebido conceituações distintas ao longo dos séculos. Apenas a título de exemplificação (sem remontar à antiguidade clássica), citarei meia dúzia de opiniões.

Segundo Hermann Grassmann, que distinguia entre as ciências *formais* e as ciências *reais*, as ciências formais "estudam quer as leis gerais do pensamento, quer a entidade especial colocada pelo ato de pensar. As primeiras correspondem à dialética (à lógica) e a segunda corresponde à matemática pura". [Introdução a *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844), *apud* STRUIK 1960:33-34]

Em uma alocução lida perante a Academia de Ciências de Washington (1870), Benjamin Peirce asseverou que "a matemática é a ciência que extrai conclusões necessárias. Essa definição de matemática é mais ampla que a definição comumente dada, pela qual o seu domínio se limita à pesquisa quantitativa. A definição comum, como as de outras ciências, é objetiva; enquanto a que proponho é subjetiva. Investigações recentes, das quais os quaterniões constituem o exemplo mais notável, tornam patente que a definição antiga é restrita demais. O âmbito da matemática é aqui estendido, de acordo com o étimo de seu nome, a toda a pesquisa demonstrativa, de sorte que inclua todo o conhecimento estritamente capaz de ensino dogmático. A matemática não é o descobrimento de leis, pois

não é indução; tampouco é a enquadradora de teorias, pois não é hipótese. É porém a juíza sobre ambas e é o árbitro a quem a indução e a hipótese trazem suas vindícias; e nem a lei pode reger nem a teoria explicar sem a sanção da matemática. A matemática deduz da lei todas suas consequências e as desenvolve em uma forma adequada à comparação com a observação e, portanto, mede o vigor do argumento da observação em favor de uma lei proposta ou de uma forma proposta de emprego da lei." (1) [PEIRCE 1870:97]

Segundo Leopold Kronecker, a mecânica é parte da matemática: "Como disciplinas especiais de nossa ciência considero expressamente a mecânica, que opera com a noção de tempo; a geometria, que estuda relações espaciais independentes do tempo; e a denominada matemática pura, independente do espaço e do tempo, a que gosto de chamar aritmética. (2) [KRONECKER 1891:227]

Roger Penrose classificou as teorias físicas básicas em três categorias amplas: soberba, útil e experimental. Para que uma teoria seja soberba, devem ser fenomenais o alcance e a exatidão com que se aplica. Nessa acepção, a geometria euclidiana é uma teoria física soberba. [PENROSE 1991:168-169]

Albert Einstein entendia que "toda ciência que se ocupa exclusivamente com relações lógicas entre objetos previamente dados, com respeito a leis pré-instituídas, é matemática". [EINSTEIN 1925:66]

Vladimir I. Arnold, em uma alocução sobre o ensino da matemática (proferida em 7 de março de 1997 no *Palais de Découverte*, em Paris), afirmou que "a matemática é uma parte da física. A física é uma ciência experimental, uma parte da ciência natural. Matemática é a parte da física na qual os experimentos são menos dispendiosos. A identidade de Jacobi (que força as alturas de um triângulo a se cruzarem em um mesmo ponto) é um fato experimental do mesmo modo que a Terra é redonda (isto é, homeomorfa a uma bola). Porém essa propriedade das alturas de um triângulo pode ser descoberta a um custo mais baixo." (3)

No presente escrito, não adoto nenhuma dessas formulações, por as considerar comprometidas com projetos ideológicos, compromisso esse incompatível com a neutralidade axiológica que se deseja em um trabalho histórico e crítico.

Prefiro admitir vagamente como conhecimento matemático aquilo que, em cada época, a comunidade de matemáticos considera seja matemática, aproximando-me da proposta de Pierre BOUTROUX [1920:157], que a definiu como "não apenas todas as teorias já construídas pelos matemáticos como também todas aquelas que eles estudarão no futuro". (4)

Isso posto, cingir-me-ei neste escrito apenas ao estudo da prática de perquisição adotada na comunidade matemática (objeto do estudo). Essa prática tem sido descrita tanto em textos produzidos por membros da comunidade matemática quanto por historiadores e por filósofos, cujos trabalhos têm sido publicados em diversos periódicos, notadamente no *Archive for History of Exact Sciences*, na *Historia Mathematica*, nos *Studies in History and Philosophy of*

Science, na *Philosophia mathematica* e na *Synthese: An international journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*, além de livros individuais ou coletivos.

Pode surpreender o fato de, ao longo do texto, eu referir, com frequência, matemáticos (e físicos) que continuam ativos no cenário. Tais referências não devem ser entendidas como encômio nem como censura. Como sugeriram JAFFE & QUINN [1994:210], "as pessoas cujas contribuições e reputações estão além de questionamentos podem ser discutidas em um nível que transcende os comentários desairosos". (5)

Cabe-me também esclarecer que as frequentes referências, entre colchetes, às obras citadas no registro das 'FONTES' não significam que a opinião do autor citado coincida com opinião exarada no presente texto. Tais referências devem ser interpretadas como a mera indicação de que o autor citado discorreu sobre o tema vertente, no local indicado.

Consoante a prática internacional, o termo latino '*apud*' ('junto de') indica que o excerto transcrito no presente texto foi **copiado** da fonte indicada; o termo latino '*passim*'('aqui e ali') aponta que o tema de que se trata foi referido em **diversos passos** da fonte apontada.

E o registro do sinal de reticência, '...', no curso de uma citação, não representa '*et cetera*' ('e outras coisas semelhantes') mas significa que permaneço **reticente** ou **tácito** quanto a uma parte do excerto referido, a qual foi considerada desnecessária ou estranha ao quesito que está sendo ventilado. Lembremo-nos de que 'reticente' e 'tácito' são termos cognatos ao verbo latino '*taceo*' ('eu me calo').

As indicações numéricas contíguas a um excerto (geralmente escrito entre aspas) conduzem aos textos originais que, para tornar a leitura menos fastidiosa, foram transcritos ao fim do capítulo correspondente.

Aos potenciais leitores deste fruto de dedicada cogitação peço desculpas pelo estilo de redação adotado, que não pretendeu a excelsitude literária mas tão somente a concisão e a precisão devidas em escritos de natureza crítica, louvando-me na judiciosa advertência feita por Johann Kepler: "Tanto a concisão quanto a prolixidade têm, cada uma a seu modo, uma certa dose de obscuridade: a primeira, por falta de luz; a segunda, por excesso de luminosidade." (6) [KEPLER, *Astronomia Nova*, introdução. Prag, 1609. Versão livre elaborada por DO CARMO 1987:113]

Resumo:

Este escrito consiste em três partes.

Na **primeira parte** desta tese, concentrada no primeiro capítulo, far-se-ão considerações acerca do método adotado na sua redação.

Na **segunda parte** desta tese, distribuída por três capítulos, compor-se-á uma breve introdução histórica ao pensamento matemático contemporâneo. Procurar-se-ão nela as ideias que provocaram progresso mais nítido e turbulência mais intensa na evolução do conhecimento matemático, ao longo dos quatro últimos séculos que antecederam a emergência das três principais correntes fundacionais da matemática, e cujos traços são ainda facilmente conspícuos no conhecimento matemático contemporâneo. Especificamente, descrever-se-ão os principais quesitos de caráter epistêmico que se impuseram em decorrência da evolução do conhecimento matemático, desde que François Viète implementou a notação e a técnica algébricas. [BRUNSCHVICG 1972:104-105]

Mas não se elegeu o conceito de século como categoria histórica (o que, aliás, seria completamente descabido). A locução 'quatro últimos séculos' pretende apenas indicar o interstício iniciado pela edição da principal obra de François Viète (1591), que conformou a pesquisa algébrica apoiada em polinômios e facilitou o emprego dos métodos algébricos na geometria (consumado por René Descartes e Pierre de Fermat), e terminado pela edição da obra de Gottlob Frege (1893), geratriz da concepção fundacional que se chamaria logicismo.

No segundo capítulo serão apresentados alguns quesitos que provocaram discussões acerca da imagem da matemática. (Nesse mesmo capítulo, será proposta a distinção entre as sentenças que dizem respeito ao objeto de uma ciência e as sentenças que dizem da ciência considerada.)

No terceiro capítulo, expor-se-á, brevemente, a emergência de algumas teorias que suscitaram novos questionamentos sobre a matemática.

No quarto capítulo, descrever-se-ão os contextos nos quais nasceram as principais concepções fundacionais da matemática.

Na **terceira parte** desta tese, que se estende do quinto ao nono capitulo, recorrendo aos dados históricos apresentados na segunda parte, far-se-á uma exposição crítica do pensamento matemático, descrevendo-se o tecido conceitual da matemática e o método usado na validação das proposições matemáticas.

No quinto capítulo, estudar-se-ão as **definições explícitas**.

No sexto capítulo, comentar-se-á o papel da **analogia na extensão dos conceitos**.

No sétimo capítulo, expor-se-á **o método axiomático** e discutir-se-ão **as definições implícitas**.

O oitavo capítulo será devotado aos tipos e aos estilos de **argumentação**.

O nono capítulo será dedicado ao **pensamento estrutural**.

No último capítulo, far-se-á um resumo histórico, enfeixar-se-ão as ilações obtidas, tecer-se-ão comentários didascálicos e indicar-se-ão alguns temas que também exigem um estudo acurado (por ser conduzido ulteriormente).

Fontes

(1) *Mathematics is the science which draws necessary conclusions. This definition of mathematics is wider than that which is ordinarily given, and by which its range is limited to quantitative research. The ordinary definition, like those of other sciences, is objective; whereas this is subjective. Recent investigations, of which quaternions is the most noteworthy instance, make it manifest that the old definition is too restricted. The sphere of mathematics is here extended, in accordance with the derivation of its name, to all demonstrative research, so as to include all knowledge strictly capable of dogmatic teaching. Mathematics is not the discoverer of laws, for it is not induction; neither is it the framer of theories, for it is not hypothesis; but it is the judge over both, and it is the arbiter to which each must refer its claims; and neither law can rule nor theory explain without the sanction of mathematics. It deduces from a law all its consequences, and develops them into the suitable form for comparison with observation, and thereby measures the strength of the argument from observation in favor of a proposed law or of a proposed form of application of a law.* [PEIRCE 1870:97]

(2) *Als die speziellen Disziplinen unserer Wissenschaft betrachte ich nämlich: die Mechanik, welche mit dem Begriffe der Zeit operiert, die Geometrie, welche die von der Zeit freien, räumlichen Verhältnisse untersucht und die von Raum und von Zeit freie, sogenannte reine Mathematik, welche ich als Arithmetik bezeichnen möchte.* [KRONECKER 1891:227]

(3) *Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap. The Jacobi identity (which forces the heights of a triangle to cross at one point) is an experimental fact in the same way as that the Earth is round (that is, homeomorphic to a ball). But it can be discovered with less expense.* [ARNOLD 1997:1]

(4) *Sous le nom de Mathématiques, en effet, nous comprenons non seulement toutes les théories déjà construites par les mathématiciens mais aussi toutes celles qu'ils étudieront dans l'avenir.* [BOUTROUX 1920:157]

(5) *These people, whose contributions and reputations are beyond question, might be discussed at a level which transcend personalities.* [JAFFE & QUINN 1994:210]

(6) *Et habet ipsa etiam prolixitas phrasium suam obscuritatem non minorem quam concisa brevitas. Haec mentis oculos effugit, illa distrahit: eget haec luce, illa splendoris copia laborat: hic non movetur visus, illic plane excoecatur.* [KEPLER, *Astronomia Nova*, introdução. Prag, 1609. *Apud* SEIFERT & THRELFALL [1971 (1938)]. *Variationsrechnung im Grossen — Theorie von Marston Morse.*]

Capítulo primeiro

Considerações sobre o objeto e o método deste estudo

Sumário

1.1 Antelóquio

1.2 O objeto da investigação

1.3 A historicidade dos dados experimentais e a impregnação teórica dos dados históricos

1.4 Um método de estudo crítico do pensamento matemático e as suas fontes

1.5 O quesito dos contextos

1.6 O anacronismo

1.7 O distanciamento temporal

1.8 Uma metáfora expressiva

1.9 A exatidão factual na narrativa histórica

1.10 Os precursores no uso do método de investigação adotado

1.11 Resumo

1.12 Fontes

1.1 Antelóquio

O presente capítulo colima definir o objeto da investigação conduzida e discutir o método que a fundamentou.

O método que adotei consiste essencialmente na certificação de opiniões mediante o estudo de casos históricos e constitui uma prática amplamente adotada por diversos especialistas (em Lógica e em Matemática). Os casos históricos invocados no curso deste estudo foram, primariamente, a formulação e a evolução de conceitos, a adoção de métodos, a enunciação e a demonstração de teoremas e a elaboração de teorias.

Para comprovar que essa prática seja amplamente adotada, caberia um levantamento de casos através da literatura pertinente, tarefa que extrapola meu interesse. Por isso, apresentarei apenas três exemplos significativos, dos quais o primeiro, extraído do *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), de Michel Chasles, obra considerada "um bom exemplo de uma história da matemática escrita por um cientista produtivo" (1) [STRUIK 1987:166], indica que a prática referida não é tão recente.

Para mostrar que as ferramentas geométricas obtidas nas três décadas que antecederam a redação da '*exposição sumária*' eram comparáveis, sob diversos aspectos, aos métodos analíticos (do cálculo infinitesimal), na prefação a esse escrito, Chasles narrou a trajetória da geometria e apresentou o seu estado contemporâneo, crendo assim ficasse certificada essa opinião:

> "**Ao expor a trajetória da geometria** e ao lhe apresentar o estado dos descobrimentos e das doutrinas recentes, **pretendemos, sobretudo, mostrar, através de alguns exemplos**, que o caráter dessas doutrinas consiste em trazer a todas as partes da ciência da extensão uma nova facilidade e os meios de se chegar a uma generalização, até então desconhecida, de todas as verdades geométricas; o que tem sido também o caráter próprio da análise, desde que tem sido aplicado à geometria. Concluiremos assim de nossa exposição sumária que os recursos potentes que a geometria adquiriu nas últimas três décadas são comparáveis, sob diversos aspectos, aos métodos analíticos, com os quais essa ciência pode doravante emular, sem inferioridade, em uma ampla ordem de quesitos.
>
> Essa ideia se encontrará reproduzida, **possamos dizer justificada** (!), em diversos trechos deste escrito, porque ela [a ideia] é a origem dele [o escrito] e ela não deixou de presidir às longas investigações exigidas pela parte histórica, pelas Notas e pelas duas Memórias que compõem esta obra." (2) [CHASLES 1837:2] (Os realces gráficos foram atribuídos por mim.)

Para apoiar o asserto de que "a matemática tem estado submetida à tensão entre dois polos de pensamento, simultâneos e complementares", Jean Dieudonné (considerado o primeiro redator da obra de Nicolas Bourbaki e autor de trabalhos decisivos em geometria algébrica e na teoria dos espaços vetoriais topológicos) asseverou que "**toda a história da matemática demonstra** que ela nunca se construiu em torno de apenas um desses conceitos" e apresentou, em seguida, diversos episódios comprovantes de sua opinião. [DIEUDONNÉ 1973:17] (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Em seguida, afirmou Dieudonné que, "na tentativa de tornar as novas ideias e o novos métodos mais claros e mais compreensíveis, somos quase invariavelmente levados a pensar em outros abordamentos possíveis, os quais às vezes descortinam vias de pensamento e trajetórias de pesquisa não vislumbradas pelo criador da teoria". (3) [DIEUDONNÉ 1973:17] E expõe diversos episódios que confirmam sua opinião.

Comentando a evolução da Lógica, Newton da Costa (o principal promotor da lógica paraconsistente) escreveu que "nada impediria que **nos alongássemos nas reflexões**

históricas, para justificar o seguinte: As leis lógicas vão sendo descobertas e refinadas *pari passu*, como ocorre com as leis científicas em geral, embora sua evolução seja mais lenta, por motivos patentes." [DA COSTA 1994:76]. (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Mas, embora a exibição de casos históricos para corroborar assertos constitua uma prática seguida por autores respeitados de textos matemáticos, tanto quanto eu saiba, o questionamento sobre a adoção dessa prática com finalidade epistêmica foi iniciado apenas depois de Imre Lakatos publicar uma sucessão de ensaios sob o nome de *Proofs and refutations*, pretendendo documentar que o processo de invenção em matemática se consubstancia em uma alternância entre as tentativas de demonstração e os questionamentos aduzidos contra tais tentativas.

Por isso, no presente capítulo, serão discutidos o emprego e as limitações desse princípio metodológico, cuja expressão metafórica é a afirmação de que *a história das ciências seja o laboratório da pesquisa epistemológica*.

Nessa metáfora, o qualificativo 'epistemológico' não tem acepção *normativa* ou *prescritiva* mas tão somente *descritiva*. Por isso, contrariando certos autores contemporâneos que se pretendem arautos de uma nova *ratio disserendi* (na qual, por exemplo, sejam válidas provas assistidas por ferramentas de computação ou baseadas em estudos de frequência), nega-se que seja incumbência da filosofia da ciência apontar à comunidade matemática o reto caminho da pesquisa. [HERSH 1995:590]

A pretensão de alguns filósofos de se arvorarem em luzeiros da perquisição matemática, tendência já denunciada, há mais de meio século, por Evert W. BETH [1955:5], insiste em reaparecer, dessa vez sob o indumento do progresso.

Para melhor caracterizar o objeto desta tese e o método de investigação adotado, lembro que Jean Piaget se dedicou (institucionalmente, desde 1955) ao estudo da *gênese do conhecimento*, a que chamou 'epistemologia genética' em oposição à epistemologia então dominante, de caráter normativo. Mais precisamente, Piaget considerava oito alternativas, resultantes das permutações dos qualificativos NORMATIVO e DESCRITIVO, FORMAL e NÃO FORMAL, ESTÁTICO e GENÉTICO. A epistemologia dominante seria ESTÁTICA, NORMATIVA e FORMAL; a epistemologia que Piaget investigava era GENÉTICA, DESCRITIVA e NÃO FORMAL. [PIAGET *et alii* 1974:22-23]

Essas categorias não parecem suficientes para se distinguirem a orientação impressa à presente tese e o escopo de Piaget. Com efeito, 'genético' para Piaget referia a gênese de ideias em cada sujeito, enquanto esta tese trata da gênese de ideias na cultura humana. Além disso, o termo 'descritivo', nesta tese, comporta duas dimensões, **a diacrônica** (quando se observa a evolução dos conceitos no curso do tempo) e **a sincrônica** (quando se opõem visões simultâneas mas distintas de um mesmo objeto matemático, como as noções *contrastantes* de espaço vetorial em Göttingen e em Chicago, nos idos de 1930, reconhecidas por Saunders Mac Lane. [*Apud* McLARTY 2007:402]

Resumindo, na obra de Piaget, 'genético' se refere à ontogênese enquanto, nesta tese, se refere à filogênese. Cabe lembrar que o próprio Jean Piaget e Rolando Garcia [1987] buscaram o paralelismo entre a passagem de um período histórico ao seguinte, por um lado, e, por outro lado, as leis que regem as mudanças das fases psicogenéticas (invertendo o clássico aforismo de que *a ontogênese reproduza a filogênese*). [PIAGET & GARCIA 1987]

1.2 O objeto da investigação

> "Hodiernamente, o sistema cognitivo da ciência fatual não mais se identifica com o clássico. A epistemologia se transforma tanto quanto a Lógica e a metodologia." [DA COSTA 1999:45]

> "Filosofia da ciência ou teoria da ciência, no sentido em que empregamos essas expressões, englobam três categorias de questões: epistemológicas (análise crítica da ciência), lógicas (estrutura lógico-formal da ciência) e metodológicas (metodologia científica)." [DA COSTA 1999:22]

O objeto geral da presente tese é o estudo histórico e crítico do pensamento matemático. Consoante o segundo excerto de DA COSTA (acima), esse estudo crítico não é estranho a uma *epistemologia da matemática*.

Pretendendo que tal estudo se constitua em um labor científico, adotarei dois princípios pragmáticos da razão: *o princípio da sistematização* (a razão sempre se expressa por meio de uma Lógica) e *o princípio da unicidade* (em dado contexto, a Lógica subjacente é única). [DA COSTA 1994:45-46]

Quanto ao *princípio da adequação* (a Lógica subjacente a dado contexto deve ser a que melhor se adapte a ele), parece-me prematuro formular qualquer juízo pois, como aconteceu na física quântica, pesquisas ulteriores poderão apontar um certo cálculo lógico como mais conveniente ao estudo crítico do pensamento matemático. [BIRKHOFF & von NEUMANN 1936; DA COSTA 1994:45-46; KRAUSE 2002:184]

Na ausência (talvez temporânea) de motivos que conduzam a outra escolha, obedecerei ao *princípio da sistematização*, adotando como Lógica subjacente, em caráter provisório, a lógica clássica (que, essencialmente, consiste no cálculo de predicados, clássico, de primeira ordem). [DA COSTA 1999:83]

Como ocorre a outros ramos do saber, a prática desse estudo crítico do pensamento matemático exige o emprego de um método. [JOLIVET 1941:188]

Na presente tese, será proposto um método baseado no estudo de casos históricos, dos quais se tentarão extrair lições sobre os modos segundo os quais se constroem as teorias matemáticas e se processa a evolução dessas teorias.

Para facilitar a exposição desse método, iniciarei uma digressão analógica.

1.3 A historicidade dos dados experimentais e a impregnação teórica dos dados históricos

> "Consoante uma opinião vulgar, os fatos constituem a evidência *in potentia*: enfileirados em um argumento, deduzidos de uma teoria ou dispostos simplesmente em um padrão, eles irradiam obstinação e ajudam na tarefa de provar ou de confutar. Todavia, no uso hodierno, os fatos e a evidência são categorias decisivamente distintas. Por si mesmos, os fatos são notoriamente inertes: 'rígidos', 'inflexíveis' ou mesmo 'vexatórios' no resistirem à interpretação e à inferência. São robustos, quanto à existência, mas opacos, quanto à significação. Os fatos tornam-se evidentes ou significativos, somente quando se inscrevem na corte de uma asserção ou de uma conjectura. A evidência deve ser descrita como fatos pregados em sinaleiras, que apontam, além de si mesmos e de sua quididade pura e rude, para estados de coisas aos quais não temos acesso direto: os vestígios associados a um crime perpetrado sem testemunhas, as observações que põem à prova uma teoria acerca da configuração verdadeira do sistema solar ou acerca das operações mentais, as ruínas de uma cultura que desapareceu há milênios ou os indícios que preveem o futuro." (4) [DASTON 1991:93]

Grosso modo, o método adotado nas ciências ditas experimentais (como a física, a química e a biologia) colima elaborar teorias que descrevam os dados obtidos por observação espontânea e que predigam satisfatoriamente os dados colhidos por experimentação.

Dentre os diversos fatores presentes na observação dos dados talvez o mais conspícuo seja a sua historicidade. [DA COSTA 1994:231]

Na multidão de exemplos que podem ser aduzidos para ilustrar esse asserto, podem escolher-se os experimentos efetuados, em 1661, por Robert Boyle, ao estudar a relação entre o volume de uma massa gasosa e a pressão a que ela estava submetida. Tais experimentos dependeram estreitamente dos recursos técnicos então disponíveis, tanto para

transmitir pressão sobre uma massa gasosa quanto para mensurar a pressão transmitida. [BASSALO 1992:857]

A historicidade não é patente apenas na dependência que os experimentos apresentam relativamente aos recursos indispensáveis a sua exequibilidade. A historicidade também se manifesta na interpretação dos resultados dos experimentos, a qual sofre forte influência das concepções então dominantes.

Por exemplo, em 1643, ao mergulhar em uma cuba de mercúrio um tubo de vidro, suficientemente comprido, cheio desse mesmo metal, Evangelista Torricelli verificou que descia o nível da coluna de mercúrio no tubo, estabilizando-se em torno de 76 cm e deixando aparentemente vazia a parte superior desse tubo. Tal experimento tornou-se cedo conhecido e os interessados buscaram explicar dois fenômenos: O equilíbrio da coluna de mercúrio e a aparente ausência de matéria na parte superior do tubo de vidro. A explicação logo apresentada do segundo fenômeno foi o asserto de que tal ausência de matéria era apenas aparente, pois a natureza manifestava *horror ao vácuo*, opinião sustentada desde a antiguidade e hegemônica até então. [BASSALO 1992:887-888]

Supunha-se possível serem enunciadas proposições factuais ou protocolares [*Protokollsätze*] "que expressassem com absoluta simplicidade, sem qualquer atavio ou acessório, aqueles *fatos* em cuja elaboração consiste toda a ciência e que precedem qualquer afirmação acerca do mundo". [SCHLICK 1934:66]

Depois, porém, se apontou que as próprias descrições dos resultados dos experimentos (ou *as sentenças protocolares*) estão impregnadas da cultura subjacente ao ambiente nos quais esses experimentos são conduzidos e os dados são colhidos. [CHALMERS 1997, cap. III; KUHN 1970, cap. 9; POPPER 1993, cap. V; ABRANTES 2002:59]

Assim, embora as sentenças protocolares fossem, em princípio, reformáveis, uma possibilidade seria tomar como "critério de discernimento da verdade" que "todas as afirmações da ciência" estivessem em concordância entre si". [SCHLICK 1934:69]

Resumindo, podemos dizer que estão historicamente vinculados a concepção do experimento, a sua efetivação e a interpretação dos seus resultados.

Feita essa brevíssima digressão, direi que, *analogamente*, estão impregnadas da atmosfera cultural a concepção de uma pesquisa *histórica*, a colheita e o tratamento dos dados e a interpretação dos resultados obtidos.

"A história narrada pelo historiador, *historia rerum gestarum*, não contém todas *res gestae*, mas apenas as que se consideram dignas de serem salvas do esquecimento. Assim, a história é sempre uma escolha." [KOYRÉ 1985:94]

Assim, do acervo de dados da história da matemática, procedi a diversas escolhas mas não reivindico nenhum critério historiográfico nesse procedimento, reconhecendo o alto teor de subjetividade que as reveste. "Por mais que lutemos arduamente para evitar os

preconceitos associados a cor, credo, classe ou sexo, não podemos evitar olhar o passado de um ponto de vista particular. O relativismo cultural obviamente se aplica, tanto à própria escrita da história, quanto a seus chamados objetos. Nossas mentes não refletem diretamente a realidade. Só percebemos o mundo através de uma estrutura de convenções, esquemas e estereótipos, um entrelaçamento que varia de uma cultura para outra." [BURKE 1992:15]

Portanto, a neutralidade axiológica é uma condição que deve ser desejada mas que, dificilmente, será alcançada.

Perseguindo a analogia entre as duas ordens de pesquisa, lembro que, no caso do estudo das ciências experimentais, o escopo consiste na elaboração de teorias que descrevam os dados obtidos por observação espontânea e que predigam satisfatoriamente os dados colhidos por experimentação.

No caso da perquisição que ora inicio (o estudo crítico do pensamento matemático), o escopo consiste na descrição dos diversos modos evolutivos da matemática, mediante a diagnose d**o seu tecido conceitual** e a perscrutação d**a dinâmica que preside a sua transformação**, patente na formulação de definições, na enunciação de teoremas, na formação e na sistematização de novas teorias e na reconfiguração de teorias antigas ou na sua absorção por teorias novas.

Mas, ao contrário do que ocorre com o estudo das ciências experimentais, não se presumirá a possibilidade de predizer-se a evolução futura do pensamento matemático. Tampouco o presumem matemáticos contemporâneos insignes, como Serre, Thom e Connes (detentores das medalhas Fields de 1954, 1958 e 1982, respectivamente).

Na mesa redonda, consequente ao encontro em Barcelona (em junho de 1991), no qual sete detentores da medalha Fields proferiram conferências, indagado sobre quais linhas de pesquisa na matemática teriam maior crescimento, no futuro próximo ou remoto, René Thom respondeu que "pensava não haver absolutamente nenhum modo de se fazer tipo algum de predição acerca da via pela qual se desenvolveria a pesquisa matemática. Todas as considerações desse tipo são destituídas de objeto." (5) [CASACUBERTA & CASTELLET 1991:102]

Interrogado sobre o que pensava seriam as principais tendências da matemática no século XXI, Alain Connes retrucou que "felizmente, a evolução da matemática não é alguma coisa que se possa predizer e seria estultície tentar fazê-lo. Um dos motivos por que amamos trabalhar com matemática é não sabermos o que está prestes a ser revelado pela pesquisa futura." (6) [KHOSROVSHAHI 2005:1]

E Jean-Pierre Serre (que também é detentor do prêmio Abel de 2003), quando lhe perguntaram se concordava com Charles Hermite, que dissera de Niels Abel que sua obra constituiria trabalho matemático por um século e meio, respondeu que "não gostava de pronunciamentos grandiosos, como esse dito por Hermite. Tais pronunciamentos implicam

que a pessoa que os profere saiba o que acontecerá no próximo século. Isso é *hybris*." (7) [RAUSSEN & SKAU 2004:212]

Lembremo-nos de que a *hybris* era, na cultura grega antiga, a personificação do descomedimento e da insolência. [GRIMAL 1951:215b] Consoante a racionalidade mítica dos gregos antigos, as Fúrias, que eram protetoras da ordem social, puniam todos os crimes suscetíveis de perturbá-la, como a *hybris*. Não permitiam, por isso, que os adivinhos revelassem com precisão o futuro. [BRANDÃO 1993:209]

Exporei, em seguida, a concepção metodológica que regerá a composição da presente tese.

1.4 Um método de estudo crítico do pensamento matemático e as suas fontes

Talvez seja redundante lembrar que, outrora, não se distinguiam a filosofia e as ciências. A pouco e pouco, foram as ciências emancipando-se da filosofia mas a filosofia, na lógica material, prescrevia a metodologia de cada ciência e, na teoria do conhecimento, lhe definia os (supostos) justos limites. Finalmente, emergiu a concepção de uma crítica às ciências, elaborada no âmbito de cada ciência, concebida como um saber autônomo, emancipado da "pretensão legislante da razão filosófica". [MÜLLER 1981, *apud* ABRANTES 2002:70]

Desse modo, surgiram várias correntes epistemológicas. Em oposição ao empiricismo lógico (do Círculo de Viena), defendeu Karl Popper a busca de critérios que permitissem demarcar os limites das ciências, isto é, distinguir as práticas científicas de outras práticas. [ABRANTES 2002:57]

Popper preconizou que "o critério de demarcação inerente à lógica indutiva" consistisse na susceptibilidade de todos os enunciados significativos "serem julgados com respeito a sua veracidade e falsidade". [POPPER 1993:41]

A primeira edição da *Lógica da pesquisa científica* [*Logik der Forschung*] foi datada de 1934. "Popper jamais pretendeu que sua metodologia se empregasse à matemática [...] e se manteve considerando que houvesse diferenças fundamentais entre os métodos da ciência e o da matemática". (8) [GLAS 2001A:119]

Em 1962, surgiu a primeira edição de uma famosa obra de Thomas Kuhn, *A estrutura das revoluções científicas* [*The structure of scientific revolutions*], na qual o autor tampouco referiu especificamente a matemática. Após treze anos, Michael Crowe constatava que "a maior parte dos historiadores da matemática que se inteiraram da nova historiografia da ciência tinham sido céticos acerca da aplicabilidade direta de suas perspectivas à historiografia da matemática. Os escritos desses cinco autores [Joseph Agassi, Thomas Kuhn, Norwood Russell Hanson, Karl Popper e Stephen Toulmin] não facilitam tais aplicações, pois seus trabalhos contêm poucas referências a história da matemática, escritas sem

considerações minuciosas. E, mais ainda, as principais diferenças entre as estruturas conceituais da matemática e das ciências levam a duvidar se suas histórias devam exibir modelos similares de evolução." (9) [CROWE 1975:161]

O artigo de Michael Crowe provocou um outro, cujo autor recusou, para uso sistemático na historiografia da matemática, os conceitos de 'revolução' e de 'crise' mas sugeriu fossem admitidos conceitos centrados na sociologia da comunidade científica. [MEHRTENS 1976]

Entrementes, no mesmo ano (1963) em que veio a lume o livro *Conjectures and Refutations*, de Karl Popper, começou a publicação, por Imre Lakatos, de uma série de artigos, intitulados *Proofs and refutations* e baseados na sua tese não publicada *Essays in the Logic of Mathematical Discovery* (1961). Esses escritos foram reunidos na publicação póstuma (a cargo de John Worrall e Elie Zahar), sob o nome de *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*.

Embora a semelhança entre o título dos artigos de Lakatos e o título da citada obra de Popper sugira alguma semelhança ou algum tipo de paralelismo entre as ideias de ambos os autores ou, ainda, insinue que Lakatos pretendesse estender à matemática as concepções de Popper, Thomas Kuhn aponta proximidade entre as suas e as concepções de Lakatos: "O tipo de pergunta que faço tem sido, portanto: Como influirá no comportamento de grupo determinada constelação de crenças, valores e imperativos? Minhas explicações decorrem da resposta. Não estou certo de que Lakatos pretende outra coisa mas, se não o pretende, não há nada nessa área a cujo respeito possamos divergir." [KUHN 1979:297 ou KUHN 2003:167-168]

Contudo, informam John Worrall e Gregory Currie (editores do segundo volume de *Mathematical, Science and Epistemology*) que, na tese dotoral, Lakatos revelara suas três fontes ideológicas mais importantes haverem sido **a heuremática** de George Pólya, **a dialética** de Friedrich Hegel e **a filosofia crítica** de Karl Popper. [LAKATOS 1978:70]

A despeito da pronunciada repercussão dessa obra de Lakatos sobre os estudos epistemológicos da matemática, segundo a colorida expressão de Solomon Feferman, "Lakatos apenas tocara um tema em um único instrumento, reconhecidamente com diversas variações interessantes; mas o que se deseja é muito maior variedade melódica interpretada por uma orquestra sinfônica". (10) [*Apud* LENG 2002:8]

Assim, metaforicamente, o desígnio da presente tese é descrever parcialmente também os outros naipes dessa portentosa orquestra.

Na busca de um método de perquisição que revele inteiramente o pensamento matemático, não podemos esquecer o caráter histórico do conhecimento matemático. Lembremo-nos, por exemplo, de que o objeto da geometria na época de Isaac Newton, eram as propriedades do espaço físico. Já Albert Einstein, no escrito *Geometria e Experiência* [*Geometrie und Erfahrung*], declarou que, quando se refere à realidade, a matemática não é

exata; e que, portanto, quando é exata, não se refere à realidade. (11) [*Apud* WEYL 2000:171-172]

Lembremo-nos, também, de que até 1846, quando foi divulgada a obra de Évariste Galois, o objeto da álgebra era "o estudo das equações algébricas (ou dos sistemas de tais equações) e dos métodos imaginados para resolvê-los". [GUÉRINDON & DIEUDONNÉ 1978:56]

Mas em 1910, Ernst Steinitz discorreu sobre *a teoria algébrica dos corpos* [*Algebraische Theorie der Körpern*], evidenciando ou descobrindo uma sucessão de noções e de fenômenos ainda não encontrados ou apenas conhecidos em casos particulares, como a separabilidade, o fechamento algébrico, as bases de transcendência e os corpos imperfeitos. Distinguiu claramente as noções de extensão algébrica e de extensão transcendente pura, demonstrou que toda extensão de um corpo K é extensão algébrica de uma extensão transcendente pura L de K e que o número de elementos de uma base de transcendência de L sobre K não depende da escolha do corpo L. [GUÉRINDON & DIEUDONNÉ 1978:116]

A teoria de Steiniz permitiu também apresentar-se a teoria de Galois para corpos quaisquer (ampliando a obra de Dedekind, que a estendera aos corpos de números algébricos). Assim, o grupo de Galois se tornou um grupo de automorfismos de um corpo, em vez de um grupos de permutação das raízes de um polinômio. [GUÉRINDON & DIEUDONNÉ 1978:116]

Não é necessário invocar disciplinas tão amplas, como a álgebra, para apontar mudanças significativas no seu objeto. Essas mudanças também são conspícuas em ramos menores, como a teoria dos grupos, cujo escopo inicialmente, eram as permutações entre objetos semelhantes ou as transformações de vetores em vetores. Como será observado no capítulo nono, podemos afirmar que, da perspectiva functorial, "a teoria dos grupos consiste, essencialmente, no estudo das construções de grupos que, sob a ação de homomorfismos induzidos, se comportam tanto de modo covariante quanto contravariante." (12) [EILENBERG & MAC LANE 1945:237]

Um estudo crítico do pensamento matemático que ignorasse as mudanças que ocorrem nas teorias matemáticas estaria, quando muito, discutindo apenas uma fase da evolução desse pensamento. Ignorar a dimensão histórica das diversas teorias matemáticas estudadas presentemente é uma atitude adequada à sistematização dessas teorias através do método axiomático mas incompatível com um abordamento crítico de fundamentação histórica.

Por isso, como fontes primárias de um estudo histórico e crítico da matemática, serão reputados os textos expositivos (de pesquisa ou de ensino); e, como fontes secundárias, serão considerados, por um lado, as conferências, as polêmicas, os escritos epistolares, e as notícias obituárias (de pesquisadores) ou natalícias (de criação de conceitos ou de teorias), da autoria de matemáticos; por outro lado, os excelentes trabalhos produzidos por historiadores especializados, que têm concorrido decisivamente para o entendimento da evolução do pensamento matemático. A esse respeito, deve ser consignado que, desde 2001,

é outorgado, quadrienalmente, pela *American Mathematical Society*, o prêmio Whiteman [*Whiteman memorial prize*] a autores de trabalhos históricos que "refletem excepcional erudição matemática" [*reflect exceptional mathematical scholarship*]. Até agora, foram agraciados Thomas Hawkins (2001), Harold Edwards (2005) e Jeremy (John) Gray (2009).

Por a presente tese tratar do pensamento matemático, não me eximirei de tangenciar a gnoseologia, ao longo das trajetórias que conduzem as origens das noções e das teorias matemáticas.

Por outro lado, o quesito das relações entre a matemática e as outras ciências constituem quesitos *específicos* da epistemologia *geral*, que não serão contemplados nesta tese. (Talvez um dos mais relevantes quesitos específicos da epistemologia geral seja a viabilidade no emprego da matemática em outras ciências, quesito esse que, consoante recente argumentação por Feng YE [2010], envolve enigmas de natureza lógica ainda não resolvidos definitamente.)

1.5 O quesito dos contextos

Mas, ao encetarmos o estudo histórico e crítico de um texto matemático, não podemos esquecer os vínculos (filiações conceituais ou afinidades) existentes entre esse e outros textos, quer de natureza matemática, quer produzidos por outras comunidades (como a comunidade dos físicos). Isso nos leva necessariamente ao estudo do sequenciamento e da concatenação dos textos e, portanto, ao estudo da história das ciências. Além disso, todo texto se situa em um contexto (que supostamente motivou ou informou o texto vertente). Assim, é imprescindível o recurso à história, também para permitir a reconstituição do contexto.

Essa opinião não recebe acolhimento unânime. Defendem alguns teóricos que um texto, filosófico ou matemático, é autônomo e não depende do contexto cultural. Essa corrente, às vezes denominada *atomismo semântico*, sustenta que os textos são anistóricos e que seu significado é intemporal. [GUICCIARDINI 2003:409]

O atomismo semântico não foi aceito na presente investigação, por supormos que todos os textos representam, em uma certa forma, um diálogo com os textos que o precederam ou uma tentativa de avançar o conhecimento matemático disponível dos textos anteriores. Note-se que, além disso, até um texto completamente axiomatizado, os *Éléments de Mathématique*, compostos por Nicolas BOURBAKI, foi acompanhado de apontamentos históricos [*Abrégé d'histoire des mathématiques*].

Merece ser citado, como exemplo da clarividência de um matemático que, tanto quanto eu saiba, não se interessou explicitamente por quesitos históricos ou filosóficos, o seguinte excerto de Emil Artin:

Não se pode redigir, em um artigo curto, um relato realmente exaustivo da influência de Wedderburn no desenvolvimento da álgebra abstrata. Constitui um cometimento grande demais e exigiria anos de preparação. A fim de apresentar um relato modesto dessa influência, é necessária uma restrição por demais severa. Com esse escopo, discutiremos apenas os dois artigos mais celebrados de Wedderburn e tentaremos contemplá-los à luz da evolução subsequente da álgebra. Mas mesmo isso seria uma tarefa grande demais. Se tivéssemos que referir todas as consequências e as aplicações de seus teoremas, facilmente preencheríamos todo um volume. Consequentemente, discutiremos apenas as tentativas que os matemáticos empreenderam para alcançarem um entendimento gradual do *significado* de seus teoremas e nos satisfaremos em indicar umas poucas aplicações.

Para o entendimento do significado do ensaio *Sobre os números hipercomplexos*, de Wedderburn, sobre o desenvolvimento da álgebra abstrata, **é imperativo examinar as ideias de seus antecessores sobre esse tema**." (13) [ARTIN 1950:65] (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

As sentenças "tentaremos contemplá-los à luz da evolução subsequente da álgebra" [*we shall try to see them in the light of the subsequent development of algebra*] e "é imperativo examinar as ideias de seus antecessores sobre esse tema" [*it is imperative to look at the ideas his predecessors had on the subject*] atestam a percepção pelo matemático Artin de que as teorias matemáticas se configuram no tempo histórico. (Para uma biografia de Emil Artin, consulte-se O'CONNOR & ROBERTSON.)

Recentemente, talvez por influência sobretudo de Imre Lakatos, entre os filósofos da matemática encontram-se, presentemente, diversos adeptos da opinião de que, como os demais produtos culturais, também o pensamento matemático esteja sujeito a mudanças parcialmente decorrentes da interação com o ambiente histórico ao qual está vinculado, embora os pensadores filiados à *filosofia dialética da matemática* considerem que "a direção do desenvolvimento da matemática e a resposta da matemática a estímulos externos são ambos mais bem explicados por fatores característicos da própria matemática". [LARVOR 2001:215]

Esse quesito apresenta certa complexidade, pois um contextualista deve estar atento a três problemas. [BARKE 2004:353]

(1) A caracterização de um contexto

(2) A delimitação diacrônica entre os contextos

(3) A delimitação sincrônica entre os contextos

À discussão do contextualismo foi dedicado o fascículo n. 64 da revista *Erkenntnis* [2004] mas, no meu entender, os três problemas que acabo de citar não foram tratados

satisfatoriamente. De minha parte, situo esses problemas em um nível superior de discurso (ou, como às vezes se diz, em um metadiscurso).

A título de analogia, considere-se o exemplo de um termômetro, cujo uso abrange dois níveis de informação: o nível pragmático da aferição das temperaturas (mediante a medida da variação do volume da coluna de mercúrio) e o nível epistêmico da validação do termômetro, que contém informações sobre os princípios que regem a fabricação e o uso dos termômetros (como o princípio de que a variação do volume do mercúrio depende linearmente da variação da temperatura). Note-se que a instituição desse último princípio já supõe um procedimento de aferição de temperaturas. [BASSALO 1992:856-857; SANT'ANNA 2005:1]

1.6 O anacronismo

Mas se a fonte primária do presente estudo do pensamento matemático é o texto matemático, impõem-se considerações de caráter hermenêutico. No âmbito da interpretação dos dados históricos, o quesito da impregnação teórica, inelutável no contexto do cientista que lida com dados colhidos experimentalmente, apareceu, no século XX, sob as vestes do anacronismo historiográfico.

Talvez a primeira denúncia clara do anacronismo tenha sido feita por Hélène Metzger (*La méthode philosophique en histoire des sciences*, 1930), ao censurar as narrativas históricas que julgam "o valor de práticas científicas antiquadas à luz das teorias contemporâneas, **consideradas como aquisições definitivas**". A fim de se prevenirem erros frequentes na prática da narrativa histórica, Metzger sugeriu que se evitassem as biografias, as quais facilmente se degradam em relatos hagiográficos, e o excesso de erudição dissociada de espírito crítico. Por outro lado, recomendou que os historiadores tentassem ser contemporâneos dos cientistas cuja obra estivessem estudando e que se revestissem da necessária empatia para aceitar que os resultados científicos das gerações passadas fossem tão significativos para elas quanto o são para nós os resultados da ciência contemporânea. [ABADÍA 2008:194-196]

Percebe-se o eco do pensamento de Metzger no projeto de candidatura ao *Collège de France*, composto por Alexandre Koyré, no qual "enfatizava o vínculo entre a história das ciências e a história das mentalidades" e declarava ser "essencial repor as obras estudadas em seu meio intelectual e espiritual, interpretá-las em função dos hábitos mentais, das preferências e das aversões de seus autores". [DOSSE 1993:103]

Muito mais conhecida se tornou a advertência feita por Herbert Butterfield em seu famoso livro *The whig interpretation of history* (1931). Nas palavras de Butterfield, "constitui parte e parcela da interpretação *whiggish* da história estudar o passado com referência ao presente. [...] Por esse sistema de referência imediata ao presente, atores históricos podem fácil e irresistivelmente ser classificados em pessoas que fomentaram o progresso e pessoas

que tentaram obstruí-lo. [...] O historiador anacrônico coloca-se no ápice do século XX e organiza seu esquema da história do ponto de vista de seu próprio dia." [*Apud* WILSON & ASHPLANT 1988:10]

Butterfield tornou-se referência para uma nova geração de historiadores que, como Thomas Kuhn, consideravam que, tanto quanto fosse possível, não deveria o historiador ser influenciado pela ciência que ele conhece". [ABADÍA 2008:195]

Um exemplo simples e significativo de anacronismo constituem as censuras, frequentemente feitas, no século XX, aos *Elementos* de Euclides de Alexandria, de uma perspectiva da fase *formal* do método axiomático. Mas a fase formal desse método iniciou seu florescimento com a publicação das *Vorlesungen über neuere Geometrie*, por Moritz Pasch, em 1882, e, portanto, não constitui o ponto de vista pertinente à análise da obra do alexandrino. [MUELLER 1969:292-295; HARARI 2003; LATOUR 2008]

WILSON & ASHPLANT [1988:11] consideram ambígua a formulação proposta por Butterfield e procuram maior precisão, propondo que *uma narrativa do ponto de vista do presente* é escrita, estando todo o aparelho observante coibido pelas categorias perceptuais e conceituais do presente.

JARDINE (2000:253) é mais abrangente, ao apontar que "o anacronismo interpretativo emprega categorias de um período histórico a feitos e a trabalhos pertinentes a um período no qual tais categorias estavam ausentes" e que o anacronismo "é uma espécie de um tipo de deslocamento mais geral, que consiste na imposição de categorias procedentes de uma cultura ou de uma sociedade a feitos ou a trabalhos de uma cultura à qual tais categorias são estranhas".

Nick TOSH, colega de Adrian WILSON e de Nick JARDINE na Universidade de Cambridge, discute a viabilidade em o historiador se despojar dos dados culturais do ambiente em que foi educado. Tosh defende que os temas estudados pela história das ciências não apresenta, necessariamente, coesão do ponto de vista dos atores históricos e que a escolha desses temas decorre de julgamentos feitos de uma perspectiva hodierna, portanto inacessível a esses mesmos atores históricos. A posição de Tosh pode despertar simpatia, por realçar certos anacronismos frequentes nas narrativas que pretendem descrever o estado da ciência hodierna como consequência direta *das intenções* dos atores históricos. TOSH [2003:651] exprime-se peremptoriamente: "Qualquer historiador que tentar reconstruir a genealogia de uma ideia será forçado a se fiar em seu próprio sistema de categorias [...]."

Reconhece-se ser extremamente difícil ao historiador despir-se da cultura em que está imerso. TOSH [2003:651] lembra que se tornar historicamente bilingue já é um desafio; tornar-se proficiente em todos os contextos sociais e idiomáticos associados a um mesmo tema é uma exigência a que não se pode atender.

Acerca do tema "intenções dos atores históricos", confronte-se o excerto seguinte, extraído de Armand BOREL [(14)] [2001:93]: "Os diversos trabalhos resenhados neste capítulo têm várias motivações e, de um modo geral, foram escritos independentemente uns

dos outros. Aqui são apresentados, **retrospectivamente**, como contribuições à teoria dos grupos algébricos lineares; porém **não foram necessariamente assim considerados pelos próprios autores, que tiveram outras motivações**, exceto no caso de Maurer que, efetivamente, desejava elaborar tal teoria." (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Scholz explana o que eram geodésicas ao tempo de Gauss, quais eram os desígnios dos matemáticos que se ocupavam delas e como Gauss tentou resolver esses quesitos. Gauss foi naturalmente levado a procurar uma transformação conforme do elipsoide em um plano. Pensando em problemas pertinentes a geodésicas, Gauss chegou a suas ideias mais profundas em geometria diferencial (como o referiu Dombrowski). [GRAY 195B:431]

1.7 O distanciamento temporal

Também é habitual supor-se que um certo distanciamento temporal permita uma apreensão mais adequada do fluxo dos eventos históricos, apreensão essa baseada no reconhecimento do estado presente das teorias científicas. Dentre os diversos exemplos que se podem citar em corroboração do que afirmo, escolhi o excerto seguinte: "A evolução da teoria das equações diferenciais parciais ocorreu em diversas fases (ou períodos), durante cada um dos quais somente algumas ideias sobressaíam. Além disso, olhadas da posição privilegiada da história subsequente, tais ideias eram frequentemente consideradas de uma perspectiva particular." (15) [DEMIDOV 1982:326]

Cabe advertir, contudo, que esse distanciamento temporal nos pode levar a enxergar a sucessão de fatos, de uma perspectiva hagiográfica (ou triunfante), assim deformando, apequenando ou, simplesmente, eliminando ideias que não vingaram mas que, não obstante, eram bastante ricas. É, portanto, indispensável uma certa plasticidade de percepção para a captura das ideias que permeiam outros ambientes culturais. É necessária, na expressão de LATOUR [2008:441], "uma atenção obsessiva às condições materiais, históricas e práticas necessárias ao descobrimento de novas habilidades cognitivas" que vigoravam em outros contextos históricos.

Ilustrarei essa exigência com um episódio relativamente recente.

David Hilbert era um pensador essencialmente anistórico, que aferia a qualidade da obra de um matemático pelo número de trabalhos anteriores por ela tornados obsoletos. [ROWE 1989:199]

Ora, obras capazes de obsolescer os trabalhos que as precederem, se não impuserem, tenderão a influir fortemente no delineamento da pesquisa que será conduzida ulteriormente.

No encontro, em 1893, da Associação Alemã de Matemáticos (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, DMV), David Hilbert e Hermann Minkowski foram convidados a

escrever um relatório sobre o estado corrente da pesquisa em aritmética (ou teoria dos números — *Zahltheorie*). Minkowski terminou por afastar-se do projeto mas continuou a assessorar Hilbert. Portanto, o *Zahlbericht* [relatório aritmético] foi concebido desde seu início como uma contribuição que consolidasse a pesquisa recente na teoria dos números, tanto para a comunidade alemã quanto para os estrangeiros que lessem suas publicações. Ao ser editado (em 1897), o *Zahlbericht* instituiu um novo paradigma, no qual a teoria algébrica dos números emergiu como a teoria dos corpos de números algébricos. [ROWE 2004:88, 91]

Quando Hilbert deixou esse campo, pelo menos doze dos seus alunos escreviam dissertação sobre tópicos dessa teoria. [ROWE 2004:91]

Foi intenção expressa de Hilbert que seu *Zahlbericht* tornasse obsoleta a obra de seus grandes antecessores, especialmente a de Edward Kummer e a de Leopold Kronecker, cujo estilo não se afinava com o seu. [EDWARDS 1987:34A]

Essa divergência de índoles se percebe em duas cartas a Adolf Hurwitz, escritas por Hilbert em 1894.

Na primeira carta, Hilbert afirmou que, tendo passado as férias lendo a obra de Kummer, nada obteve além da certeza de que "a calculeira desse matemático poderia ser tornada supérflua". (16) [*Apud* EDWARDS 1992:131]

Na segunda carta, Hilbert declarou que "estudava os maravilhosos e básicos teoremas de Kronecker acerca dos corpos invariantes, na esperança de lhes descascar puramente o núcleo aritmético, de modo que também essa teoria pudesse encontrar um lugar em seu relatório". (17) [*Apud* EDWARDS 1992:131]

Mas todo esse grande acervo, que Hilbert não logrou refundir em seu próprio estilo, não encontraria lugar no *Zahlbericht*. Assim, o *Zahlbericht* se constituiria em uma barreira entre Kummer e Kronecker, de um lado, e as gerações posteriores, do outro lado. Em verdade, a parte do acervo de Kronecker que Hilbert não conseguiu reformular continha uma longa série de ensaios acerca das funções elípticas (que seria incluída no último volume das *opera omnia* de Kronecker). Consoante uma conjectura de Helmut Hasse, essa série de ensaios constituía um possível esboço da prova proposta por Kronecker para o seu sonho da juventude [*der Jugentraum*]. Esse sonho consistia em provar um teorema que fornecesse uma descrição completa das extensões abelianas do corpo dos números racionais, sonho esse decorrente de sua percepção de que as funções elípticas dotadas de multiplicação complexa desempenhassem, no âmbito dos corpos numéricos quadráticos imaginários, o mesmo papel que as funções circulares desempenham no corpo dos racionais: elas geram todas as extensões abelianas. [EDWARDS 1987:30; EDWARDS 1992:131]

Para melhor situar as personagens, acrescento que Helmut Hasse foi o aluno predileto [*Lieblingsschüler*] de Kurt Hensel e que Kurt Hensel se dedicou à edição da obra de Kronecker, da qual o primeiro volume apareceu em 1895 e o último em 1931. [EDWARDS 1978:419, 425]

O teorema, na forma enunciada por Kronecker, somente seria provado por Teiji Takagi, já em 1903. Em suas *Reminiscências e Perspectivas* (1935), Takagi confidenciou, no que tange à teoria dos corpos de classes, haver sido **desencaminhado** por Hilbert, que considerara apenas corpos de classes não ramificados. [*Apud* O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Teiji Takagi.]

Em palestra proferida no Congresso Internacional de Matemáticos (1950), André Weil defendeu já ser chegada a hora de compreendermos que Kronecker estava tentando descrever e iniciar um novo ramo da matemática, o qual conteria a teoria dos números e a geometria algébrica como casos especiais. Assim, Weil anunciou que o escopo de sua palestra seria resgatar a grandiosa concepção de Kronecker e descrever os poucos resultados contemporâneos que se poderiam considerar como frutos do programa de Kronecker. [WEIL 1950:442]

Surpreendentemente, embora tenha sido proclamada em um congresso internacional, essa advertência de Weil sobre Kronecker passou despercebida e, provavelmente, é tão ignorada quanto o é, hoje em dia, a obra do próprio Kronecker. [EDWARDS 1987:34]

Esse episódio acerca do destino da obra de Kronecker mostra quão árdua é a tarefa do historiador do pensamento matemático e quanto pode ser enganosa uma narrativa triunfante, isto é, baseada na ideologia dominante. Revela, além disso, quão periclitantes são os estudos de fundamento histórico, o que justifica o apotegma: "Mesmo a miséria do historicismo é melhor que a sua ausência total — supondo-se que o historicismo seja sempre manipulado com o cuidado exigido pelo uso de explosivos." [LAKATOS 1978:61]

No caso da história da matemática, duas ferramentas que podem reduzir parcialmente a influência que nossa própria cultura exerce sobre nossa percepção do passado são os documentos epistolares permutados por matemáticos e as tentativas de predição do curso da evolução da matemática.

De fato, nessas cartas, encontram-se não somente testemunhos de sua percepção dos quesitos que interessavam aos matemáticos do passado como também indícios dos métodos e das intuições que os levaram a certos produtos intelectuais (sendo o último tema concernente também à gnoseologia).

E o estudo dos documentos pertinentes às tentativas de prever o curso do pensamento matemático (isto é, o estudo dos documentos escritos sobre *o futuro do pretérito*), ainda que possa parecer uma mera distração de historiadores desocupados, constitui, pelo contrário, poderoso instrumento de investigação d**o modo pelo qual os atores históricos enxergavam o *seu presente*** (e *nosso passado*), pois ***a sua percepção do presente*** **se projetava na *descrição do seu futuro***.

Um caso emblemático de uma descrição precisa do estado da arte constituiu o episódio no qual, talvez apenas para cativar a audiência, Hilbert (de quem já foi dito ser um

pensador anistórico) iniciou a palestra de abertura do Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, indagando retoricamente:

> "Quem dentre nós não gostaria de erguer o véu que oculta o futuro, a fim de lançar um olhar sobre os progressos iminentes de nossa ciência e os segredos de sua evolução durante o próximo século! Por quais metas especiais aspirarão os espíritos matemáticos preeminentes das linhagens vindouras? Quais novos métodos e novos fatos, no vasto e rico campo do pensamento matemático, serão desvendados pelos novos séculos?
>
> A história ensina a continuidade da evolução da ciência. Sabemos que cada época tem problemas próprios, os quais ou serão resolvidos pela geração vindoura ou, afastados como infecundos, serão substituídos por outros novos. Se quisermos obter uma ideia da evolução presuntiva do saber matemático no futuro próximo, deveremos deixar passarem, diante de nosso espírito, as questões não resolvidas e abranger com a vista os problemas colocados pela ciência hodierna, cuja solução esperamos do futuro. O dia de hoje, próximo à virada do século, parece-me assaz adequado a uma tal inspeção dos problemas; pois os cortes que separam os grandes períodos não apenas nos convidam a olhar para o passado mas também conduzem nossos pensamentos ao impendente desconhecido." (18)

Essa palestra de Hilbert não constituiu o exemplo único de descrição do conhecimento matemático em uma certa data, apresentada como tentativa de apreender a evolução futura da matemática. Vários outros matemáticos se abalançaram a esse exercício de prognose (como Henri Poincaré, em 1908; Hermann Weyl, em 1932; e André Weil e Roger Godement, em 1962), fornecendo-nos fontes copiosas dos modos de se enxergar a matemática no passado.

O estudo das prognoses constitui, portanto, valioso indício acerca da imagem da matemática concebida, em uma dada fase histórica, pelo matemático que proferiu a prognose. Assim, o estudo das imagens da matemática, ao longo da história, suscita a perscrutação do tema 'o futuro do pretérito'.

1.8 Uma metáfora expressiva

No editorial não assinado [*notre programme*] do primeiro fascículo da *Revue d'histoire de la philosophie* (1927), o autor sustentou que, a fim de se estudar a mente, é mister vê-la em operação e que a história das ciências representa o laboratório no qual se podem conduzir as observações pertinentes. Portanto, na investigação filosófica, os relatos históricos substituem os relatórios elaborados nos laboratórios, no curso de uma investigação experimental. [CHIMISSO 2003:305]

Em palestra proferida no *Centre de synthèse historique*, Hélène Metzger discutiu a relação entre a história e a teoria do conhecimento [*Tribunal de l'histoire et théorie de la*

connaissance scientifique (1935)]. Metzger contestou que a história das ciências, revelando o desenvolvimento da mente humana, pudesse fornecer respostas definitivas a quesitos epistemológicos. Opinou que somente historiadores um pouco ingênuos aceitariam que o mero acúmulo de textos científicos, sem interpretação e crítica, pudesse revelar o desenvolvimento real da inteligência humana. Metzger mostrou-se convicta de que a história fosse uma reconstrução e de que "a história nada seria fora da inteligência do historiador". [CHIMISSO 2003:305].

Ainda assim, Metzger considerava que a 'recompensa suprema' do historiador das ciências consistisse em fornecer material inestimável à epistemologia, à 'psicologia da mente' e à filosofia das ciências. [CHIMISSO 2001:216]

Essa metáfora da história das ciências como laboratório foi retomada, em 1968, por Georges CANGUILHEM [1979:12], que enxergava dois sentidos nas relações entre a história das ciências e a epistemologia.

Para se compreenderem a função e o significado de uma história das ciências, CANGUILHEM [1979:13] opunha ao modelo do laboratório o modelo do tribunal, um lugar no qual se proferem juízos sobre o passado do saber ou sobre o saber do passado, cabendo à epistemologia o papel de juíza. A epistemologia forneceria o princípio de julgamento, ensinando à história das ciências a linguagem mais recente falada por uma dada ciência, o que lhe permitiria recuar no passado até o instante no qual essa linguagem já não fosse inteligível ou se tornasse intradutível em uma outra linguagem, anteriormente falada.

Na presente tese, não se aceitam os papéis atribuídos por Canguilhem à epistemologia e à história das ciências. Acordo com Metzger em que os dados históricos exijam interpretação mas, ainda assim, sustento que os dados históricos, devidamente contextuados e interpretados, constituem a matéria prima de qualquer investigação crítica.

Nisso não vai, aliás, nenhuma novidade. Valer-se da narrativa histórica para corroborar assertos acerca da evolução do pensamento matemático tem sido uma prática frequente entre os autores de maior eminência. (Na primeira seção do presente capítulo, foram citados exemplos de Chasles, de Dieudonné e de da Costa.)

Mas nem todos os fatos históricos ocorridos em uma certa época serão evocados como dados por serem interpretados, pois "é preciso haver uma escolha em história, para evitar a dispersão de singularidades e uma indiferença em que tudo teria o mesmo valor." [VEYNE 1992:27]

E "nem sempre é fácil, em um dado contexto histórico, distinguir entre a simples rotina e o raciocínio criativo. Uma história da matemática, que valha a pena ser escrita, pressupõe essa distinção." (19) [WEIL 1978:93]

Uma dificuldade semelhante de seleção enfrentam os cientistas experimentais, ao tratarem os dados obtidos nos laboratórios. Escolhem os dados que serão estudados e

escolhem a teoria no âmbito da qual esses dados serão interpretados (não necessariamente nessa ordem).

Quanto à convicção de Metzger de que toda a história seja uma reconstrução, cabe lembrar que, mais recentemente, William R. SHEA [1979: 45-47] identificou, entre os filósofos contemporâneos das ciências, duas tendências de reconstituição da história das ciências. Uma dessas tendências privilegia o exame de casos históricos, a fim de desvelar a emergência e a evolução dos conceitos. Seu objetivo é apresentar fielmente como uma dada ciência se construiu e identificar em cada teoria os fatos que a sustentaram. A outra tendência enfatiza a reconstrução racional da história das ciências, substituindo conceitos imprecisos e ideias inadequadas por noções mais exatas e mais fecundas. Resumidamente, esclarece SHEA, enquanto os praticantes da primeira modalidade procuram obter dados corretos, os praticantes da segunda modalidade procuram corrigir os fatos.

A reconstrução racional da história foi estudada por Imre LAKATOS [1970], que sustentou três teses: (a) A filosofia da ciência fornece metodologias normativas nos termos das quais o historiador reconstrói a 'história interna' e por meio dela fornece uma explicação racional do crescimento do conhecimento objetivo. (b) Duas metodologias podem ser estimadas com o auxílio da história (interpretada normativamente). (c) Toda reconstrução racional da história necessita ser suplementada por uma 'história externa' empírica (de natureza sócio-psicológica).

Resumidamente, ao lado da metodologia dos programas de pesquisa *científica*, LAKATOS [1970:116] também propôs uma metodologia dos programas de pesquisa *histórica*, de modo que a história pudesse corroborar (em diversos graus) suas reconstruções racionais.

Ainda que se aceite a sentença atribuída a Lakatos por SOUZA [1990:68], de que "toda história da ciência seja *uma reconstrução racional* empreendida à luz de uma metodologia prévia, assumida implícita ou explicitamente pelo historiador", não me parece adequado que se devam professar tais reconstruções racionais, salvo com objetivo didascálico, como o fez magistralmente Harold EDWARDS [1977]. De fato, a reconstrução racional, como foi preconizada e praticada por Lakatos, privilegia a narrativa reconstruída em detrimento do suposto fato histórico. O método sugerido por Lakatos foi, por isso, censurado, em 1969, na conferência de Minneapolis, por Ernan McMullin e por Thomas Kuhn. [LAKATOS 1970:107, 127, n.64].

Alguns autores hodiernos dizem professar a reconstrução racional da história das ciências mas, aparentemente, atribuem esse qualificativo a uma concepção teórica distinta da proposta por Lakatos. É o caso de LANDRY [2005], o qual se limita a declarar que a reconstrução racional da história exige uma perspectiva e uma agenda. Mas o texto desse autor não parece voltado a 'corrigir os fatos históricos'.

Distintamente de Lakatos, defendo que, na prática da reconstituição histórica, os autores recorram apenas a técnicas cuja validade seja aceita pacificamente.

Não é, raro, porém que autores mais versáteis se deixem seduzir pelo uso de argumentos psicanalíticos, aceitando o asserto, expendido por Sigmund Freud, de que a psicanálise, "como psicologia abissal ou ciência do anímico inconsciente, pode tornar-se indispensável a todas aquelas ciências que se ocupam da história das origens da cultura humana e de suas grandes instituições, tais quais a arte, a religião e a ordem social". [FREUD 1973:2952]

Não se desconhece, por um lado, que uma influente corrente filosófica, a denominada escola de Frankfurt, tem a doutrina psicanalítica como um de seus pilares. [ROUANET 1983]

Tampouco se deve desconhecer, por outro lado, que a doutrina psicanalítica não atende ao critério de cientificidade proposto por Karl Popper e que, portanto, sua aceitação como ferramenta epistêmica depende de fatores de natureza não científica. [SAPORITI 1994, cap. II]

1.9 A exatidão factual na narrativa histórica

Minha proposta metodológica do estudo crítico do pensamento matemático exige que se aprimorem os métodos historiográficos e, sobretudo, o exercício da historiografia a tal ponto, que essa disciplina se possa constituir em critério de verificação ou de falsificação de assertos de caráter epistêmico. De fato, o mínimo que se poderá esperar de uma narrativa que se possa constituir em critério de julgamento de proposições de natureza epistêmica é a exatidão factual.

Essa exigência pode parecer supérflua mas, infelizmente, até em revistas de maior prestígio, como *Historia Mathematica*, já se publicaram ensaios que pecaram contra esse mandamento.

Como exemplo, cito o ensaio *Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the 20th century*, publicado no fascículo n. 31 [2004:310-319] da revista citada. Seus autores, Aldo BRIGAGLIA e Ciro CILIBERTO, referem que Solomon Lefschetz fez uma primeira viagem à Itália em 1920 e que Zariski lá passou de 1921 a 1927. Embora esses visitantes tenham sido profundamente influenciados pela intuição geométrica e pelos teoremas surpreendentes dos italianos, logo perceberam serem necessárias ferramentas mais eficazes para se enfrentarem algumas das principais questões que se ofereciam à geometria algébrica e recorreram a métodos recentes de topologia e de álgebra. Os autores concluem o parágrafo, afirmando que "seus mentores italianos **não aceitavam** e, até certo ponto, **nem mesmo entendiam** a necessidade do tipo de transformações profundas introduzidas por Lefschetz". [20] [BRIGAGLIA & CILIBERTO 2004:311] (Os realces gráficos foram atribuídos por mim.)

Embora tenham afirmado que os mentores italianos não haviam aceito o tipo de transformações na geometria algébrica que Lefschetz e Zariski promoveram, os autores do artigo dizem que, supostamente [*reputedly*], Castelnuovo havia declarado que "os métodos da escola italiana haviam atingido um beco sem saída e são inadequados para o progresso ulterior no campo da geométria algébrica", atribuindo essa nota a C. PARIKH, o biógrafo de Zariski. (21)

E acrescentam os autores: "Houvesse Castelnouvo, de fato, proferido essa sentença, seria fácil compreender por que ele havia sugerido que seu jovem aluno prosseguisse nos estudos e 'explorasse o trabalho de Solomon Lefschetz' [...]." (22) [BRIGAGLIA & CILIBERTO 2004:316]

O asserto de que os geômetras italianos não haviam entendido a necessidade do recurso a novos métodos e a dúvida acerca da opinião de Castelnuovo (consignada por PARIKH) não figurariam no citado artigo de BRIGAGLIA e CILIBERTO, se esses autores houvessem consultado os *Collected Papers* de ZARISKI, onde esse geômetra, em estilo cristalino, consigna o episódio vertente: "O próprio Castelnuovo me dissera, repetidas vezes, que os métodos da escola geométrica italiana já tinham dado tudo quanto podiam, tinham chegado a um beco sem saída e eram inadequados para o progresso ulterior na área da geometria algébrica. [...] Tanto Castelnuovo quanto Severi sempre teceram os maiores elogios possíveis ao trabalho de S. Lefschetz em geometria algébrica, baseado em topologia; ambos opinavam que os métodos topológicos desempenhariam um papel cada vez mais importante no desenvolvimento da geometria algébrica." (23)

O advérbio '*reputedly*', que figura na narrativa de BRIGAGLIA & CILIBERTO, é incompatível com a locução '*time and time again*', usada pelo próprio Zariski.

É oportuno acentuar que a precisão no compor as narrativas não consiste apenas em evitar interpretações mal fundadas mas também em ***não*** sugerir tais interpretações. Interpretações mal fundadas podem resultar de narrativas que refiram parcialmente fatos que poderiam ser narrados mais amplamente ou, pelo contrário, poderiam ser simplesmente omitidos. Como exemplo, cito os excertos seguintes do esboço biográfico de Lejeune Dirichlet, estampados em textos de caráter histórico merecidamente aceitos na comunidade.

> "Peter Lejeune Dirichlet esteve estreitamente associado a Gauss e a Jacobi, assim como aos matemáticos franceses. Viveu como tutor privado, de 1822 a 1827, e encontrou Fourier, cujo livro estudou; também se tornou íntimo das *Disquisitiones arithmeticae*, de Gauss. Depois ensinou na Universidade de Breslau e, em 1855, sucedeu a Gauss em Gotinga. Seu conhecimento pessoal tanto da matemática e dos matemáticos franceses quanto da matemática e dos matemáticos alemães tornou-o a pessoa adequada a servir de intérprete de Gauss e submeter o tema das séries de Fourier a uma análise penetrante." (24) [STRUIK 1987:157]

"Dirichlet nasceu em Düren no ano de 1805 e exerceu o magistério sucessivamente em Breslau e Berlim. Com a morte de Gauss foi indicado para sucedê-lo em Göttingen, uma homenagem justa a um matemático tão talentoso, ex-aluno de Gauss e um eterno admirador de seu mestre. Em Göttingen esperava poder terminar os trabalhos incompletos de Gauss mas a morte prematura em 1859 obstou-lhe esse projeto.

Proficiente em alemão e em francês, Dirichlet serviu admiravelmente como um elo de ligação entre a matemática e os matemáticos das duas nações. [...] Dirichlet era amigo íntimo, expositor e admirador de Jacobi." [EVES 1997:537-538]

Esse segundo autor ainda se detém em referir três anedotas sobre o temperamento de Dirichlet (uma respeitante à veneração pelo mestre Gauss, outra relativa a um sobrinho e a terceira pertinente ao sogro), as quais nada acrescentam de relevante à história do pensamento matemático.

O leitor dessas obras obteria uma visão bastante diferente do relacionamento de Dirichlet com a comunidade francesa, se houvesse sido feita uma referência mínima aos estudos por ele conduzidos em Paris. Veja-se o depoimento a esse respeito, dado pelo próprio Dirichlet, em carta a Sylvestre Lacroix, cuja leitura também suscita uma imagem do tipo de ensino que, então, era conduzido no Colégio de França. (Essa carta não foi datada mas, mediante cuidadosa argumentação, TATON [1954:174] a situa entre o fim de 1842 e o início de 1843, época na qual Dirichlet era docente na Universidade de Berlim.)

"Incumbido, há algum tempo, de um curso sobre o cálculo de derivadas parciais e sobre as aplicações que delas dependem, cedo percebi a impossibilidade de expor detalhadamente a nossos alunos, de uma só vez, todas as riquezas que compõem essa parte da ciência. Mas não me convenci de que, por isso, deveria renunciar a lhes apresentar uma ideia geral de tudo o que esse tema possui de verdadeiramente importante. Com esse desígnio, me restringi a apresentar a solução completa e amplamente desenvolvida de algumas questões escolhidas, de um quadro analítico de todas as ideias realmente fecundas e novas com as quais a matéria se enriqueceu, **procurando imitar as lições verdadeiramente filosóficas que nos destes, outrora, no Colégio de França e nas quais nos apresentastes, com tanta lucidez e profundidade, as filiações dos pensamentos que, a pouco e pouco, foram constituindo as ciências, de tal modo que, sem conhecermos as minúcias nas quais vossa imensa erudição soube separá-las, víamos, por assim dizer, a ciência nascer sob nossos olhos**. Para me por em condições de seguir vosso exemplo, tanto quanto o permitissem meus limitados recursos, tive que me submeter à leitura, com o maior cuidado e com o lápis na mão, de todas as obras que nasceram nessa matéria, desde a época memorável na qual os trabalhos de Fourier e de Poisson lhe transmudaram a face [...]". (25) [*Apud* TATON 1954:175] (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

GRABINER [2007:85] aponta os sete *mitos* da historiografia da matemática, decorrentes quer da imprecisão em fontes secundárias, quer de preconceitos. Entre eles figura a opinião, emitida por diversos historiadores, de que o *Treatise of fluxions* de Colin Maclaurin houvesse obstruído o progresso britânico na matemática, durante o século dezoito.

1.10 Os precursores no uso do método de investigação adotado

Dos autores que redigiram de uma perspectiva de investigação semelhante à que advogo neste capítulo citarei os escritos seguintes.

Hermann WEYL [1932], em conferência em um curso de verão da Sociedade Suíça de Professores Ginasiais, enfocou a distinção entre dois modos de se compreender [*modi percipiendi*] a matemática, um tema central da gnoseologia. O autor confessa não se sentir à vontade, se for coagido a aceitar uma verdade matemática em virtude de uma cadeia complicada de ilações formais e de computações, percorridas cega e tactualmente, elo por elo. Mais satisfatória é uma visão panorâmica do desígnio e da trajetória. Em outras palavras, é necessária uma compreensão da ideia da prova, do contexto profundo. Nessa oposição metafórica entre a percepção visual e a percepção tactual, Weyl situa a topologia e a álgebra, mediante o estudo de casos conceituais (domínios de integridade, a teoria das funções algébricas a uma única variável, curvas algébricas e superfícies fechadas).

Também Hermann WEYL [1940] proferiu uma palestra (na *Bicentennial Celebration Conference of the University of Pennsylvania*) sobre o *modus cogitandi* dos matemáticos, um tema central à gnoseologia. O autor concluiu (p. 445) que a matemática contemporânea é uma hábil mistura [*a dexterous blending*] de dois procedimentos, um construtivo e o outro axiomático.

Em 1948, foi publicada uma notável obra coletiva, de grande valor humano e científico, escrita por quase meia centena de intelectuais franceses, sobre o significado científico, cultural e filosófico de diversos aspectos da matemática, apresentada por F. Le LIONNAIS, sob o título *Les grands courants de la pensée mathématique*.

Em 1949 foi editada a versão em língua inglesa, revisada e ampliada, do original em língua alemã da *Filosofia da matemática e das ciências naturais*, obra de filosofia científica, na qual Hermann WEYL trata de metodologia, fundamentação e crítica sistemática e histórica das ideias essenciais para o estudo da natureza.

WEYL [1953] retomou o mesmo tema do *modus cogitandi* dos matemáticos em outra palestra (escrita em língua inglesa e, provavelmente, destinada a um público norte-americano). Com a habitual clareza, WEYL afirmou que, na vida intelectual dos seres humanos, se distinguem duas esferas de atividade. Na primeira estão o fazer, o conformar, o construir ou o criar alguma coisa; na segunda estão a reflexão e o questionamento sobre o

significado de toda essa atividade e que se pode considerar como o domínio próprio da filosofia. WEYL defendeu que a reflexão filosófica estivesse combinada com a reflexão histórica. Embora o escopo e o principal interesse dos cientistas sejam a verdade objetiva, verdade que se encontra além da fragilidade e dos obstáculos inerentes à nossa existência como seres humanos, a ciência é um ramo do esforço humano e, como tal, é essencialmente histórico como as mentes das quais a ciência dimana. O poder das ciências reside na combinação de experimentos (isto é, observação sob condições livremente escolhidas) com as construções simbólicas. Em seguida, WEYL discutiu o florescimento da axiomática *em um ambiente histórico* que ele conhecera na juventude, a Universidade de Göttingen, na qual pontificaram Felix Klein e David Hilbert, dotados de mentalidades distintas. O autor concluiu o escrito, retomando a metáfora da matemática contemporânea como uma hábil mistura [*a dexterous blending*] de dois procedimentos, um construtivo e outro axiomático. Confessou que, no escrito anterior, deixara sob luz mais forte o papel do modo construtivo (por ser essa a sua propensão) mas reconheceu que, por exigência da justiça, teria que colocar o método axiomático no primeiro plano.

Imre Lakatos escreveu também dois artigos sobre a evolução do conhecimento matemático.

O primeiro ensaio (*A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*, 1967, 1976), resultante de discussões conduzidas em uma conferência ocorrida em 1965, ainda parece polarizada pelo diálogo com os estudos da fundamentação da matemática.

O segundo ensaio (*Cauchy and the continuum*) foi lido no *International Logic Colloquium* de 1966 e aceito para publicação em 1966 mas o autor, talvez pretendendo revisá-lo, impediu que fosse publicado. É dedicado ao famoso erro cometido por Augustin Cauchy, ao enunciar um teorema acerca da convergência de séries de funções contínuas. LAKATOS pretendeu que a invenção da análise não canônica, por Abraham Robinson (1966), tenha exigido uma modificação radical na narrativa da evolução do cálculo infinitesimal de Cauchy a Karl Weierstrass. Assim, esse ensaio de LAKATOS aponta para uma reavaliação de narrativas anteriormente compostas de perspectivas enviesadas ou, pelo menos, restringentes.

Michael HALLETT [1979], em sua tese de doutoramento, estudou a validade de um critério epistemológico mediante o estudo de um caso, a fase inicial da teoria dos conjuntos.

ISRAEL & MENGHINI [1998] conduziram um estudo de caso de *tensão essencial* (conceito introduzido por Thomas Kuhn), mediante o estudo da emergência da teoria qualitativa, na obra de Henri Poincaré e Federigo Enriques.

Eduard GLAS descreveu um caso de processo sócio-cognitivo de mudança conceitual [1989], um caso de experimentos de pensamento [1999], um caso de prática de raciocínios baseados em modelos [2000] e um caso de mudanças na matemática condicionadas socialmente [2002]. GLAS afirmou, textualmente, que "relatos filosóficos

adequados da matemática devem, portanto, ser bem informados, consistentes e verificáveis por evidência histórica". [GLAS 2000:71] [26]

Também são da lavra de Eduard Glas "o falibilismo e o uso da história na educação matemática" (a equação cúbica) [1998], "experimentos de pensamento e inovação matemática" (a quadratura da parábola por Arquimedes) [1999], "o raciocínio baseado em modelos e os descobrimentos matemáticos" (o caso de Felix Klein) [2000], " lógica falibilista e o descobrimento matemático" (o desígnio dos *Elementos* de Euclides" [2001] e "mudanças matemáticas condicionadas socialmente (o caso da Revolução Francesa) [2002].

Recentemente, surgiram estudos que retomam o caminho apontado por Lakatos, cabendo citar-se os autores seguintes:

Yehuda RAV [1999], que denuncia o questionamento acerca da composição de programas de computação que sejam capazes de comprovar ou refutar qualquer conjectura, a despeito de o teorema de Church-Turing, formulado na terceira década do século XX, afirmar ser impossível construir-se um algoritmo capaz de, em um número finito de passos, dizer se uma qualquer fórmula escrita em um cálculo lógico de primeira ordem seja demonstrável nesse cálculo. (Assim, esse teorema dá resposta negativa ao problema geral da decisão, proposto por David Hilbert.)

RAV dedica seu ensaio ao estudo da prova matemática, partindo do estudo de um caso, vinculado à conjectura de Goldbach (que ainda constitui problema aberto) e à teoria dos números primos.

Mary LENG [2002], que preconiza uma filosofia fenomenológica da matemática, entendendo por esse qualificativo um tratamento que procure basear o pronunciamento de sentenças filosóficas no cuidadoso escrutínio da prática matemática, na esteira de Lakatos.

LENG distingue sua abordagem daquela preconizada por Edmund Husserl, que enfatizara o retorno da filosofia matemática aos números, pensados como sua *materia prima*. LENG também reconsidera certas censuras feitas a Lakatos, por haver ele, supostamente, tentado estender a toda a matemática um método que fora empregado em um contexto particular, o caso da característica de Euler-Poincaré.

LENG dedica seu ensaio ao estudo de dois casos recentes no âmbito das álgebras C*, introduzidas na terceira década do século XX, no contexto da estrutura das álgebras de operadores em espaços de Hilbert. (Esse tema fora inaugurado por John von Neumann, que tentara fornecer um fundamento matemático à mecânica quântica.) O primeiro caso diz respeito a um teorema de classificação de álgebras indutivas, proposto por no seminário de George E. Spring (em 1998); e o segundo caso refere o limite indutivo de uma categoria, também proposto nesse seminário (em 1999).

Jessica CARTER [2004], que dedica um estudo à natureza dos objetos matemáticos, mediante um estudo do caso da teoria K, iniciada no âmbito da topologia, por Michael Atiyah, na quinta década do século XX.

Posteriormente, essa teoria foi introduzida em outros ramos da matemática e permitiu obterem-se teoremas interessantes, como uma expressão, formulada por J. Adams (em 1961), que fornece o número de campos de vetores linearmente independentes na esfera S^{n+1}. Também a teoria K foi usada, por Atiyah e Hirzebruch, para provarem que o espaço projetivo complexo (Cp^n) não pode ser imerso em R^m, para $m = 4n - 2\alpha(n)$, sendo $\alpha(n)$ o número de termos na expansão diádica de n. O trabalho de Atiyah baseou-se em estudos de Alexander Grothendieck, que introduzira o primeiro grupo K. (Em virtude desses estudos, Atiyah e Grothendieck ganharam a medalha Fields de 1966.) Esse ensaio de Jessica Carter procura desvelar o motivo de Grothendieck haver introduzido o primeiro grupo.

Trabalhos desse jaez tocam um dos quesitos mais relevantes do pensamento matemático: os motivos cognitivos que animam a busca feita pelos pesquisadores. Esse quesito aproxima os estudos históricos do pensamento matemático de um dos objetos da psicologia da matemática, ramo esquecido da psicologia, talvez por exigir que seus praticantes sejam versados simultaneamente em psicologia e em matemática, como já advertira Jacques HADAMARD [1954:1].

Hadamard apontara que, sendo praticada por pessoas que desconhecem a matemática, a psicologia da matemática conduz a resultados inadequados. Cita, como exemplo, o livro *Théorie de l'Invention*, escrito pelo psicólogo Étienne Souriau. Segundo HADAMARD [1954:64], a descrição da atividade matemática oferecida nesse livro leva à conclusão de que "esse autor mal parece haver coligido dados de profissionais. [...] o comportamento descrito por Souriau corresponde à atitude assumida por estudantes, na verdade por estudantes medíocres." (27)

1.11 Resumo

Nesse primeiro capítulo, foram discutidas alguns quesitos pertinentes aos estudos de caráter histórico, como a impregnação teórica dos dados históricos, a prática dos anacronismos, a exigência de um distanciamento temporal, a maior acuidade no trato dos dados históricos e a conveniência em se evitarem ferramentas ou, como se prefere dizer, categorias de pensamento cuja aceitação não seja pacífica.

Os teóricos da metodologia das ciências já apontaram que todo trabalho experimental se efetua no âmbito de uma teoria, fato que geralmente se resume, dizendo-se que os resultados dos experimentos estão impregnados pela teoria (princípio da pregnância teórica).

O autor deste ensaio entende que ocorre uma pregnância semelhante nos dados históricos: A narrativa da evolução de qualquer ciência está impregnada da visão que hoje temos dessa ciência. Como toda narrativa consiste na escolha e na articulação dos dados históricos, sua elaboração dependerá fortemente da perspectiva segundo a qual tais dados serão contemplados.

Assim, por exemplo, uma narrativa da evolução da álgebra, escrita na última década do século XIX, poderia enfatizar os passos dados na construção da teoria de Galois pois, naquele século, a imagem corrente da álgebra era que a sua finalidade específica consistisse na resolução de equações polinomiais. Já uma narrativa da evolução da álgebra, escrita na última década do século XX, poderia acentuar os aspectos estruturais da matemática, recorrendo fortemente ao conceito de isomorfismo e discorrendo acerca das faces de interação entre a álgebra e a topologia. Também poderia enfocar a teoria de Galois, mas como precursora do pensamento functorial.

Por isso, ciente da denúncia feita por Herbert Butterfield, de que os autores centrados no presente desvirtuem os dados históricos, por haverem imposto suas categorias epistêmicas aos atores históricos e aos atos cometidos por esses autores, acentuo como inadequadas as duas tendências, relativamente frequentes na prática dos historiadores das ciências, descritas como *hagiografia* e *anacronismo*.

A hagiografia consiste em estimar as contribuições dos atores históricos, atribuindo-lhes a percepção de que certos teoremas por eles obtidos teriam consequências que apenas se tornariam conhecidas, depois de algumas décadas.

E o anacronismo se manifesta, sobretudo, quando nos apoiamos em nosso conhecimento hodierno da matéria vertente, para proferirmos juízos acerca da relevância de resultados obtidos há diversas décadas. Essa prática tem sido frequente, relativamente aos *Elementos* de Euclides. Desde que o método axiomático se tornou dominante, graças à obra de Moritz Pasch e, sobretudo, à obra de David Hilbert, tem sido costume de todo autor desavisado apontar *erros* ou *falhas* na obra do alexandrino, atribuindo-lhe tacitamente o mesmo desígnio que inspirou os autores posteriores a Pasch.

Ciente desses óbices metodológicos, empreendi a tarefa de efetuar um estudo crítico, de fundamento histórico, do pensamento matemático, reconhecendo que as ilações que pretendo obter não estarão isentas dos defeitos que se podem reconhecer em uma narrativa histórica.

1.12 Fontes

(1) [...] *a good example of a history of mathematics written by a productive scientist.* [STRUIK 1987:166]

(2) *Mais nous avons eu en vue surtout, en retraçant la marche de la Géométrie, et en présentant l'état de ses découvertes et de ses doctrines récentes, de montrer, par quelques exemples, que le caractère de ces doctrines est d'apporter dans toutes les parties de la science de l'étendue une facilité nouvelle, et le moyens d'arriver à une généralisation, jusqu'ici inconnue, de toutes les vérités géométriques; ce qui avait été aussi le caractère propre de l'analyse, lors de son application à la Géométrie. Aussi conclurons-nous de notre aperçu, que les ressources puissantes que la Géométrie a aquises depuis une trentaine d'années sont comparables, sous plusieurs rapports, aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais, sans désavantage, dans un ordre très-étendue des questions. Cette idée se trouvera réproduite, puissions-nous dire justifiée! dans plusieurs endroits de cet écrit; parce qu'elle en est l'origine et qu'elle n'a point cessé de présider aux longues recherches qu'ont nécessitées la partie historique, les Notes, et les deux Mémoires qui composent cet ouvrage.* [CHASLES 1837:2]

(3) *In trying to make new ideas and methods clearer and more understandable, one is almost invariably led to think of other possible approaches, which sometimes open ways of thought and paths of research unsuspected by the originator of the theory.* [DIEUDONNÉ 1973:17]

(4) *According to a commonplace view, facts are evidence in potentia: mustered in an argument, deduced from a theory, or simply arranged in a pattern, they shed their proverbial obstinacy and help with the work of proof and disproof. However, in modern usage facts and evidence are nonetheless distinct categories, and crucially so. On their own, facts are notoriously inert — "angular", "stubborn", or even "nasty" in their resistance to interpretation and inference. They are robust in their existence and opaque in their meaning. Only when enlisted in the service of a claim or a conjecture do they become evidence, or facts with significance. Evidence might be described as facts hammered into signposts, which point beyond themselves and their sheer, brute thingness to states of affairs to which we have no direct access: the clues pertaining to a crime committed without witnesses, the observations testing a theory about the true configuration of the solar system or the workings of the mind, the ruins of a civilization that vanished millennia ago, the indices that predict the future.* [DASTON 1991:93]

(5) *Well, I think there is absolutely no way of making any kind of prediction about the way mathematical research will develop. All considerations of this kind have no object.* [CASACUBERTA & CASTELLET 1991:102]

(6) *Well, thankfully the development of mathematics is not something one can predict, and it would be foolish to try. One reason we love doing mathematics is that we don't know what lies ahead that future research will uncover.* [KHOSROVSHAHI 2005:1]

(7) *I deslike such grand statements as Hermite's. They imply that the person who speaks knows what will happen in the next century. This is who speaks knows what will happen in the next century. This is* hybris. [RAUSSEN & SKAU 2004:212]

(8) *Yet Popper had never intended his methodology to apply to mathematics, and ... he kept seeing fundamental differences between the methods of science and of mathematics.* [GLAS 2001A:119]

(9) [...] *most historians of mathematics acquainted with the new historiography of science have been skeptical as to whether the insights embodied therein can be applied in any direct way to the historiography of mathematics. The writings of these five authors do not facilitate such application, for*

their works contain few references to, and generally have been written without detailed consideration of the history of mathematics. Moreover, the major differences between the conceptual structures of mathematics and of science make it questionable whether their histories should exhibit similar patterns of development. [CROWE 1975:161]

(10) *Lakatos plays only one tune on a single instrument — admittedly with a number of satisfying variations — where what is wanted is much greater melodic variety and the resources of a symphonic orchestra.* [*Apud* LENG 2002:8]

(11) *Soweit sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.* [*Apud* WEYL 2000:171-172]

(12) *The subject of group theory is essentially the study of those constructions of groups which behave in a covariant or contravariant manner under induced homomorphisms.* [EILENBERG & MAC LANE 1945:237]

(13) *Nobody can give in a short article a really exhaustive account of the influence of Wedderburn on the development of modern algebra. It is too big an undertaking and would require years of preparation. In order to present at least a modest account of this influence it is necessary to restrict oneself rather severely. To this effect we shall discuss only the two most celebrated articles of Wedderburn and try to see them in the light of the subsequent development of algebra. But even this would be too great a task. If we would have to mention all the consequences and applications of his theorems we could easily fill a whole volume. Consequently we shall discuss only the attempts the mathematicians made to come to a gradual understanding of the* meaning *of his theorems and be satisfied just to mention a few applications. For the understanding of the significance that Wedderburn's paper* On hypercomplex numbers *had for the development of modern algebra, it is imperative to look at the ideas his predecessors had on the subject.* [ARTIN 1950:65]

(14) *The various works surveyed in his chapter had various motivations and were carried out to a large extent independently from one another. They are presented here as contributions to a theory of linear algebraic groups a bit by hindsight: they did not necessarily appear so to their authors, who had other goals in mind, except for Maurer, whose aim was indeed to build up such a theory.* [BOREL 2001:93]

(15) *The development of the theory of partial differential equations took place in several stages, or periods, during each of which only some of the ideas were prominent. Moreover, as seen from the vantage-ground of subsequent history, the prominent ideas were often considered from a particular point of view.* [DEMIDOV 1982:326]

(16) *Bisher habe ich nichts gewonnen auszer der Erkenntnis, dasz alle die Rechnereien von Kummer überflüssig gemacht werden müssen.* [*Apud* EDWARDS 1992:131]

(17) [...] *studiere die wunderbaren, tiefligenden Sätze von Kronecker über den Invariantenkörper in der Hoffnung den arithmetischen Kern rein herauszuschälen, so dasz auch diese Theorie in meinem Bericht eine Stelle finden kann.* [*Apud* EDWARDS 1992:131]

(18) *Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte! Welche besonderen Ziele werden es sein, denen die führenden mathematischen Geister der kommenden Geschlechter nachstreben? Welche neuen Methoden und neuen Tatsachen werden die neuen Jahrhunderte entdecken - auf dem weiten und reichen Felde mathematischen Denkens? Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwicklung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der mutmaßlichen Entwicklung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passieren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht bloß auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.* [HILBERT 1900:253]

(19) *It is not always easy, in a given historical context, to distinguish between mere routine and creative reasoning; there can be no worthwhile history of mathematics unless this is done.* [WEIL 1978:93]

(20) [...] *their Italian mentors did not accept and, to some extent, did not even understand the need of the kind of deep transformations Lefschetz and Zariski effected.* [BRIGAGLIA & CILIBERTO 2004:311]

(21) *He reputedly declared that* "the methods of the Italian school have reached a dead end and are inadequate for further progress in the field of algebraic geometry". [BRIGAGLIA & CILIBERTO 2004:316]

(22) *If Castelnuovo did, indeed, make this pronouncement, it is easy to understand why he suggested that his young student go further in his studies and* "explore the work of Solomon Lefschetz" [...] ." [BRIGAGLIA & CILIBERTO 2004:316]

(23) *Castelnuovo himself told me time and time again that the methods of the Italian geometric school had done all they could do, had reached a dead end, and were inadequate for further progress in the field of algebraic geometry. [...] Both Castelnuovo and Severi always spoke in the highest possible terms of S. Lefschetz's work on algebraic geometry, based on topology; they both were of the opinion that topological methods would play an increasingly important role in the development of algebraic geometry.* [ZARISKI *Collected papers*, preface, page X]

(24) *Peter Lejeune Dirichlet was closely associated with Gauss and Jacobi, as well as with the French mathematicians. He lived from 1822 to 1827 as a private tutor and met Fourier, whose book he studied; he also became familiar with Gauss' Disquisitiones arithmeticae. He later taught at the University of Breslau and in 1855 succeeded Gauss at Göttingen. His personal acquaintance with French as well as German mathematics and mathematicians made him the appropriate man to serve as an interpreter of Gauss and to subject Fourier series to a penetrating analysis.* [STRUIK 1987:157]

(25) *Chargé depuis quelque temps d'un cours sur le calcul aux différentielles partielles et sur les applications qui en dépendent, j'ai bientôt senti l'impossibilité de présenter d'emblée à nos élèves l'exposition détaillée de toutes les richesses qui composent cette partie de la science; mais je n'ai pas cru devoir pour cela renoncer à leur donner une idée générale de tout ce que le sujet possède de véritablement important. Dans cette vue je me suis attaché à faire suivre la solution complète et largement développée de quelques questions choisies, d'un tableau analytique de toutes les idées réellement fécondes et nouvelles dont la matière s'est enrichie, cherchant à imiter les leçons vraiment philosophiques que vous nous faisiez autrefois au Collège de France et dans lesquelles vous nous présentiez avec tant de lucidité et de profondeur la filiation des pensées qui peu à peu ont formé les sciences, que sans connaître nous-mêmes les détails où votre immense érudition avait su les en déméler, nous voyons, pous ainsi dire, naitre la science sous nos yeux. Pour me mettre en état de suivre votre exemple, autant du moins que mes faibles moyens pouvaient me le permettre, j'ai dû m'astreindre à lire avec le plus grand soin et la plume à la main, tous les ouvrages que le sujet avait fait naître depuis l'époque mémorable où les travaux de Fourier et de Poisson en ont changé la face [...].* [*Apud* TATON 1954:175]

(26) [...] *adequate philosophical accounts of mathematics should therefore be informed, substantiated, and testable by historical evidence.* [GLAS 2000:71]

(27) *We have said that this author hardly seems to have gathered information from professional men. [...] the behavior which Souriau describes is that of the pupil, and even of the rather bad pupil.* [HADAMARD 1954:64]

Capítulo segundo

Breve introdução histórica ao pensamento matemático: parte A

Sumário

2.1 Antelóquio

2.2 Contextuamento

2.3 A geometria de Descartes

2.4 A discordância entre geômetras

2.5 Ideias cosmogônicas

2.6 A construção de retas tangentes

2.7 A emergência do conceito de função

2.8 As séries de potências

2.9 A invenção do cálculo infinitesimal

2.10 A filosofia da natureza

2.11 O entendimento humano e a experiência

2.12 A reação ao cálculo das fluxões

2.13 O nascimento da física matemática

2.14 A curvatura e outras noções geométricas

2.15 A maturescência do cálculo infinitesimal

2.16 Novamente o conceito de função

2.17 As imagens do cálculo e da matemática

2.18 Reflexões sobre a matemática

2.19 Resumo

2.20 Fontes

2.1 Antelóquio

Na construção de qualquer ciência colocam-se duas ordens de quesitos: as questões referentes ao objeto da citada ciência e as questões atinentes à ciência considerada, como o seu método e a legitimidade dos estudos que se conduzem no âmbito dessa ciência. (Dizemos que as proposições relativas ao objeto de uma ciência constituem o seu corpo e que as proposiçoes relativas à própria ciência dizem respeito a sua imagem.)

No presente capítulo serão apresentados alguns quesitos sobre a imagem da matemática suscitados pelo desenvolvimento das técnicas algébricas (que cedo foram estendidas às séries de potências), pela tentativa cartesiana de se algebrizar a geometria e pela criação do cálculo infinitesimal.

2.2 Contextuamento

> "O realismo fenomenológico exige que não se apresentem pretextos que possam conduzir à recusa de alguns aspectos da matemática, rotulando-se de psicológicos, sociológicos ou subjetivos." (1) [ROTA 1997B:184]

O pitagoricismo defendia o princípio de que todos os fenômenos do mundo sensível se podiam descrever mediante os números naturais. Esse juízo decorreu, possivelmente, da verificação de que as consonâncias musicais professadas na cultura grega eram determinadas pela razão de números inteiros. Por exemplo, os intervalos de oitava, de quinta justa, de quarta justa e de terceira maior correspondem, respectivamente, às proporções de 2:1, de 3:2, de 4:3 e de 5:4. [MOSTERÍN 1984:31; JEANS 1968:63-64, 154]

Também os fenômenos geométricos se sujeitavam a tal princípio descritivo. Por exemplo, dados dois números, a e c, sendo a > c, e definida **a média harmônica** desses números como o número m que satisfaça à proporção $(a - m)/a = (m - c)/c$ ou, equivalentemente, que satisfaça à condição $2/m = 1/a + 1/c$, verifica-se que, em um hexaedro regular, o número de vértices (oito) é a média harmônica entre o número de arestas (doze) e o número de faces (seis). [BRUNSCHVICG 1972:39-40]

Os pensadores gregos valeram-se de objetos geométricos para descrever o cosmos. A mais antiga contribuição grega à astronomia teórica foi a teoria planetária elaborada por Eudoxo de Cnido. Era uma teoria geocêntrica que pretendia explicar o movimento dos planetas, da lua e do sol, admitindo a sobreposição de quatro esferas concêntricas, cada uma delas girando em torno de um eixo que passava pelo centro comum dessas esferas. [YAVETZ 1998:222]

A teoria de Eudoxo distinguia-se de todas as crônicas dos fenômenos celestes até então escritas, por *propor uma explicação* para o movimento dos astros. [STRUIK 1987:55]

No diálogo *Timeu*, Platão de Atenas ensinava que os quatro elementos apresentavam átomos que tinham a forma de um dentre quatro sólidos regulares: os átomos do fogo eram tetraédricos, os átomos da terra eram hexaédricos, os átomos do ar eram octaédricos e os átomos da água eram icosaédricos. [RUSSELL 1972:146-147]

Desde o outono da idade média, a Natureza era representada como um livro. Esse livro, segundo o exemplo da bíblia, consistia em sinais, significados e segredos que se ofereciam à interpretação do leitor. Galileo Galilei modificou essa metáfora, afirmando (no conhecido excerto de *Il saggiatore*, 1623, capít. VI) que "a filosofia está escrita nesse grandioso livro, o universo, que permanece continuamente aberto a nosso olhar atento. Porém não pode ser compreendido, se não aprendermos, primeiramente, a compreender a linguagem e a reconhecer os caracteres com os quais é composto. É escrito na linguagem matemática e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas. Sem esses meios é humanamente impossível compreender-se uma única palavra. Sem eles, andamos à toa em um labirinto escuro." (2) [*Apud* BIAGIOLI 2003:557]

Assim Galilei acentuou que a interrogação metódica da Natureza se faria mediante a experimentação e que a linguagem na qual se proporiam as perguntas e se interpretariam as respostas seria a linguagem geométrica. [KOYRÉ 1946:403]

Contudo, ao assim se pronunciar, Galilei não atribuiu à matemática o papel que geralmente lhe outorgam os físicos nossos contemporâneos. Primeiramente, porque Galilei manteve a separação entre a geometria celeste e a mecânica terrestre (ao contrário de Kepler, que buscava uma física que fosse válida nos céus e na terra, e de Descartes, que asseverava a existência de uma única mecânica, que regesse tanto os fenômenos celestes quanto os fenômenos terrestres). [TRUESDELL 1976:6]

Além disso, o idioma geométrico imaginado por Galilei era a linguagem praticada desde a idade antiga e sistematizada nas obras de Euclides de Alexandria, Arquimedes de Siracusas e Apolônio de Perga.

Talvez possamos afirmar que, desde a publicação da *In artem analyticam isagoge* (1591), por François Viète, foi iniciada uma disputação entre os defensores do uso restrito dos métodos geométricos herdados da tradição grega e dos propugnadores dos novos métodos algébricos. [EVES 1997:309]

Nessa obra, Viète distinguiu entre a *logistice numerosa*, que operava com números, e a *logistice speciosa*, que operava com 'espécies ou formas de coisas, como as letras do alfabeto'. A *logistice speciosa* baseava-se em uma concepção de número distinta da ideia esposada pela tradição grega. Na matemática grega, *arithmos* sempre designava 'um número definido de objetos definidos', quer esses objetos fossem percebidos sensualmente, quer o fossem

intelectualmente. Já a *logistice speciosa* operava com um conceito abstrato de número, que não se supunha anteriormente definido. [FERRARO 2001:543]

À *logistice speciosa* devemos a direção que seria impressa à técnica algébrica, conduzindo-a ao papel que desempenharia após um século e meio, consoante a definição proposta por Colin Maclaurin (1748), no *Treatise of algebra*: "Um método geral de computação mediante signos e símbolos que foram excogitados com esse escopo e que foram considerados convenientes." (3) [*Apud* KATZ 1997:26]

Lembremos, *en passant*, que a disputação entre os defensores dos antigos métodos geométricos e os partidários do uso de novos métodos algébricos se pode inscrever entre as diversas '*querelles des anciens et des modernes*', inauguradas, por volta de 1612, pelo poeta Alessandro Tassoni, em uma época na qual os espíritos estavam apaixonados pelas obras de Dante Alighieri, de Giovanni Boccacio, de Ludovico Ariosto e de Torquato Tasso. Então Tassoni afirmou que Grécia clássica e a Roma antiga deveriam ceder o lugar à Itália contemporânea. Os contendimentos entre conservadores e renovadores foram iniciados na França, na sessão, de 27 de janeiro de 1687, da *Académie française*, na qual Charles Perrault celebrou o século de Louis le Grand como igual ao século de Péricles e ao século de Augusto, provocando o protesto de Nicolas Boileau. Ainda em 1721, Charles de Montesquieu atribuiu o título *querelles des anciens et des modernes* à trigésima sexta *Lettre Persane*. [GREVE 1952:190-191])

2.3 A geometria de Descartes

A seguinte narrativa trata de uma época na qual "muitos pensadores eminentes buscavam um 'método geral', às vezes concebido em um significado restrito como método matemático, às vezes imaginado em um significado mais geral como um método de entender a natureza e de criar novos inventos. Por isso, nesse período, todos os filósofos notáveis eram matemáticos e todos os matemáticos notáveis eram filósofos". (4) [STRUIK 1987:101-102]

Em 1637, René Descartes publicou o *Discours de la méthode*, que trazia, como apêndice (*Géométrie*), a sistematização de um novo método de investigação, mediante o qual problemas algébricos se poderiam converter em diagramas geométricos e problemas geométricos se poderiam traduzir em equações algébricas. Tal método dependia do uso de duas coordenadas, cujo papel não seria simétrico, para representar graficamente pontos de um plano. Pierre de Fermat também desenvolvera o uso de coordenadas e resolvera diversos problemas geométricos por métodos algébricos, mas parte de sua obra somente foi publicada postumamente. E, anteriormente, Nicole d'Oresme (*circa* 1360) recorrera a eixos ortogonais para discutir os movimentos uniformes, uniformemente acelerados e dotados de aceleração variável. O mérito de Descartes consistiu, sobretudo, no emprego consistente dos recursos algébricos então disponíveis, para efetuar a análise geométrica cometida pelos autores antigos; e na percepção de que considerações acerca da dimensão das grandezas

envolvidas em cada problema não deveria impedir o emprego desses recursos. [BABB 2005:445; CHERN 1990:680; GRABINER 2007:82; STRUIK 1987:82, 96]

A publicação da *Géométrie* por Descartes acentuou a controvérsia entre os geômetras que defendiam o recurso exclusivo às ferramentas de que dispunham os autores gregos clássicos (e que, por isso, eram às vezes denominados 'adeptos dos antigos') e os seus oponentes, que propugnavam o uso de recursos da incipiente álgebra, vigorosamente impelida pela obra *In artem analyticam isagoge* (1591), de François Viète [EVES 1997:309]. A fase em que tal disputação se mostrou mais ardente fora iniciada pelos escritos matemáticos de John Wallis, a *Arithmetica infinitorum* (1655) e o *Treatise of algebra* (1685). Wallis não mostrava escrúpulo com o raciocínio sobre símbolos, aceitava os números negativos e os números imaginários, empregava a álgebra à geometria e sugeria até a subordinação da geometria à aritmética. [PYCIOR 1987:269-270; STRUIK 1987:101]

A inclusão de um estudo de caráter matemático em um 'discurso sobre o método' era cognato com o desígnio de seu autor de fornecer uma ferramenta que permitisse a todo leitor nela industriado resolver problemas geométricos que, até então, dependiam da inspiração súbita ou de elevado engenho e não de uma compreensão metódica, como desejava Descartes. Com efeito, Descartes declarou, no início desse trabalho, que "todos os problemas de geometria poderiam facilmente reduzir-se de tal modo que, para construí-los, fosse necessário conhecerem-se apenas os comprimentos [de segmentos] de certas retas". E que o método filosófico geral exposto no seu *Discours* forneceria também um método completo para a geometria. [JONES 2001:49-51; BOS 1984:338].

Em uma carta, Descartes descreveu com maior precisão o seu método geral: "Na solução de problemas geométricos, tanto quanto for possível, tenho o cuidado de usar, como linhas de referência, retas paralelas ou retas perpendiculares. Além disso, recorro apenas a dois teoremas: o que informa serem proporcionais os lados de triângulos semelhantes e o que institui ser o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo igual à soma dos quadrados dos seus catetos. Não hesito em introduzir diversas quantidades desconhecidas, de modo que o problema seja reduzido a termos tais que dependam apenas dos dois teoremas citados." [SHABEL 1998:604]

A locução 'construir problemas' remetia a uma prática antiga. Nos trabalhos clássicos dos matemáticos gregos, havia dois tipos de proposições geométricas: os teoremas e os problemas. Os teoremas deveriam ser provados e os problemas deveriam ser construídos, sendo a construção acompanhada de uma prova de que a figura construída gozasse das propriedades exigidas. (Também na prova de teoremas podiam ocorrer construções, desde que sua validade já houvesse sido anteriormente instituída.) E por serem **retas e círculos** as curvas habitualmente usadas nesses tipos de problemas, dizia-se que tais problemas eram **construtíveis com régua e compasso**. As construções com régua e compasso eram as preferidas dos geômetras gregos clássicos. Foram legitimadas pelos três postulados iniciais dos *Elementos* de Euclides, obra na qual não figurara outro tipo de construções. [BOS 1984:332]

Pappos de Alexandria, na *Synagoge* (*circa* 325-340), classificou os problemas geométricos em três tipos, consoante a tradição clássica: os problemas planos (que se podiam construir mediante linhas retas e círculos), os problemas sólidos (que se podiam resolver pela interseção de cônicas) e um terceiro tipo constituído pelos problemas cuja construção exigia curvas mais complicadas. (Ao explicar essa classificação, Pappos acentuou que seria geometricamente inaceitável resolver de outro modo os problemas que se pudessem construir com régua e compasso.) [BOS 1984:333]

Essa classificação suscitava um outro quesito, a construção das curvas que se usariam na resolução dos problemas do segundo e do terceiro tipo. Na geometria grega clássica, havia três modos de se definirem curvas: como interseção de superfícies (o caso das seções cônicas), como trajetória de um ponto resultante da combinação de movimentos (o caso da espiral de Arquimedes e da quadratriz de Hípias) e como o lugar dos pontos que gozassem de uma dada propriedade (o caso da cissoide de Díocles).

Dentre os problemas herdados dos geômetras gregos, três resistiram às tentativas de resolução mediante régua e compasso: a quadratura do círculo (isto é, a construção de um quadrado cuja área fosse igual à área de um dado círculo), a duplicação do cubo (isto é, a construção de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado) e a trissecção de um ângulo arbitrário. No *Supplementum geometriae* (1593), Viète argumentou que, assim como as construções com régua e compasso se legitimavam pelos três postulados iniciais dos *Elementos* de Euclides, dever-se-ia admitir um novo postulado que justificasse um tipo de construção que permitiria a resolução de diversos problemas. Tal postulado seria o seguinte: Dados um ponto P e duas retas r e s, traçar uma reta t pelo ponto P, que interseque as retas r e s em dois pontos, A e B, de tal modo que a razão entre os comprimentos dos segmentos PA e PB seja igual a qualquer número anteriormente escolhido. Viète mostrou que, apoiando-se nesse postulado, se poderia efetuar a trissecção de qualquer ângulo; mostrou também que todo problema, o qual traduzido à álgebra, conduzisse a uma equação de terceiro ou quarto grau, poderia ser reduzido ou a uma trissecção ou à determinação de duas médias proporcionais e, portanto, construído segundo o citado postulado. [BOS 1984:336]

Johann Kepler, no *Harmonice mundi* (1619), reagiu à proposta de Viète e, apontando as proporções harmoniosas existentes nos polígonos e nos poliedros regulares, defendeu que só se admitissem as construções com régua e compasso. [BOS 1984:336-337]

Assim, tanto Viète quanto Kepler evitaram o quesito de *construir os meios de construção dos problemas geométricos*: aquele, introduzindo um novo postulado; esse, negando a legitimidade das novas construções. Descartes retomou a classificação proposta por Pappos e aceitou, como ferramentas legítimas, muitas curvas descritas mediante a combinação de movimentos, desde que a razão entre as correspondentes velocidades fosse um número racional ou um número construtível com régua e compasso. No tipo da razão entre as citadas velocidades baseou-se Descartes, para distinguir entre as curvas *geométricas* (aceitáveis nas construções) e as curvas *mecânicas* (inaceitáveis). Desse modo, Descartes eliminou, como ferramentas de construção, tanto a espiral de Arquimedes quanto a quadratriz de Hípias

(que, na idade antiga, haviam sido usadas na quadratura do círculo), por serem traçadas mediante a combinação de um movimento retilíneo com um movimento circular cuja razão de velocidades envolve o número π (que não é construtível com régua e compasso). [BOS 1984:337; WREN & GARRETT 1933:269]

A doutrina de construção geométrica exposta por Descartes era consistente com seu programa de usar ferramentas algébricas em problemas geométricos, constituindo a construção geométrica o vínculo entre as duas disciplinas, a geometria e a álgebra. Desde que Descartes publicou a *Géométrie*, tornou-se corrente a prática de, dada uma equação polinomial, se efetuar uma construção geométrica que produzisse segmentos de reta cujos comprimentos fossem as raízes da equação vertente. [BOS 1984:338, 331]

2.4 A discordância entre geômetras

Em 1644, Severein Longbord (que era professor de geometria na universidade de Copenhagen desde 1607 e que antes, de 1588 a 1599, fora assistente de Tycho Brahe) publicou um tratado *Rotundi in plano seu circuli absoluta mensura*, no qual explicava como quadrar um círculo mas foi contestado pelo matemático inglês John Pell. Longbord replicou, apresentando outra versão de sua prova e rejeitando o lema no qual Pell se fundamentara para refutar a construção inicial. Pell retrucou, apresentando diversas provas do lema citado e, em 1645, esforçou-se por obter outras provas desse lema elaboradas pelos mais distinguidos matemáticos. Em 1647, foram publicadas, conjuntamente, as provas do citado lema, fornecidas por Descartes, Bonaventura Cavalieri, Gilles de Roberval e Thomas Hobbes. [JESSEPH 1999:428-429]

Em 1655, o próprio Hobbes publicou o volume *De corpore*, no qual expôs dois princípios, um ontológico (de que tudo que existe são corpos materiais) e outro metodológico (de que todo conhecimento demonstrativo deve fundamentar-se em causas conhecidas); e defendeu que a geometria fosse a ciência dos corpos, cabendo-lhe descrevê-los e mostrar como são gerados. Sob esse aspecto, *Os Elementos* de Euclides deveriam ser reformulados, substituindo-se, entre outras, as definições euclidianas de ponto (aquilo que não tem partes) e reta (comprimento sem espessura) pelas conceituações seguintes: O ponto é um corpo tão pequeno, que suas dimensões não são consideradas nas provas dos teoremas. E uma reta é a trajetória de um ponto em movimento. [JESSEPH 1999:427]

No vigésimo capítulo de *De corpore*, Hobbes atacou o problema da quadratura do círculo. Mas, imediatamente antes da impressão final de sua obra, Hobbes verificou falhas na construção proposta e acrescentou um adendo ao capítulo, alegando ser melhor advertir o leitor da deficiência apontada que postergar a publicação do livro. Depois Hobbes acrescentou que a publicação de uma prova inválida e da razão de sua invalidez poderia concorrer para se encontrar a construção correta. [JESSEPH 1999:430-432, 434]

Hobbes manteve que o objeto da geometria eram os corpos extensos e, nas *Six lessons to the Savillian professors of mathematics* (1656), declarou que a geometria fosse demonstrável (isto é, baseada no conhecimento das causas e não de seus efeitos), exatamente por que "as linhas e as figuras sobre as quais raciocinamos são desenhadas e descritas por nós mesmos". (5) [PYCIOR 1987:271]

A tentativa de quadratura empreendida por Hobbes foi duramente censurada por John Wallis, professor de geometria em Oxford. Mas tal censura não impediu Hobbes de tentar também a duplicação do cubo. A solução desse outro problema, apresentada por Hobbes, foi publicada anonimamente em 1661 e refutada pelo mesmo Wallis. Essa solução, a refutação por Wallis e a réplica por Hobbes figuraram em sua nova obra *Dialogus physicus*, também de 1661. Nessa pretendida réplica, Hobbes já não concordou com os cânones de rigor então vigentes e afirmou que os resultados algébricos não tinham nenhuma relevância nas construções geométricas. Dentre as censuras por ele feitas, uma merece ser lembrada: Por considerar que o produto de duas curvas fosse uma terceira curva, Descartes não respeitava, nas operações algébricas, o princípio de homogeneidade dimensional, praticado cuidadosamente por Viète. [EVES 1997:309; JESSEPH 1999:437, 439-440; DUBREIL 1962:105]

À medida que Hobbes tentava destruir os argumentos de seus oponentes, lhe foi ficando perfeitamente claro que os pontos de conflito eram conceituais ou, mais especificamente, decorriam dos princípios por ele adotados, que não se coadunavam com a prática matemática corrente, tanto que sua abundante produção ulterior (de 1666 até a morte, em 1679) não parece haver merecido a consideração dos contemporâneos. [JESSEPH 1999:437, 449]

Hoje, beneficiados pelo progresso do conhecimento, podemos considerar hilariantes as tentativas de Hobbes em efetuar, mediante régua e compasso, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo pois, desde meados do século XIX (quase dois séculos depois de *De corpore* haver sido publicado), sabemos que tais problemas são insolúveis, **na forma em que foram enunciados**. [STEWART 1973:57-58]

Mas, tentando colocar o episódio em seu contexto, podemos lembrar que, um pouco antes, Grégoire de Saint-Vincent, considerado um eminente geômetra por Gottfried Leibniz, também se dedicara ao problema de quadrar o círculo, envolvendo-se em disputa com Roberval e Descartes, e que, somente em 1651, essa disputa fora concluída, pela intervenção de Christiaan Huygens. [DUBREIL 1962:105-106]

Por outro lado, a desavença entre Hobbes e Wallis pode inscrever-se na psicomaquia acerca do ceticismo nas ciências, contendimento que remonta pelo menos à altercação em torno das ideias de Alessandro Piccolomini. De fato, Piccolomini arrazoara, no *Commentarium de certitudinem mathematicarum disciplinarum* (1547), que a certeza da matemática não fosse consequência de suas provas mas de seu conteúdo. [COZZOLI 2007:151; FLORIDI 1999]

Além disso, podemos enxergar na obra de Hobbes uma primeira crítica dos fundamentos da geometria, ainda que não tenha sido conduzida na direção que, futuramente, seria aceita. [DUBREIL 1962:105] A esse respeito, é pertinente notar que, em 1838, ao iniciar o primeiro capítulo (*Os primeiros conceitos da geometria*) de seu estudo sobre os *Novos princípios da geometria*, Nikolai LOBACHEVSKI [1955:73] adotaria como primitivo o conceito de corpo, exibindo afinidade com a perspectiva anteriormente adotada por Hobbes (embora, tanto quanto eu saiba, não exista evidência alguma de que Lobachevski conhecesse a obra de Hobbes). Em seguida, usando os conceitos de *corpo*, *contacto* e *seção*, Lobachevski definiria as noções de *superfície*, *linha*, *ponto* e *plano* e provaria todos os axiomas euclidianos pertinentes à geometria absoluta. [PERMINOV 1997:11]. Note-se, também, que, concomitantemente aos estudos de Lobachevski, János Bolyai (em 1831) construiria, no plano hiperbólico, um quadrado e um círculo com a mesma área. (Em tal procedimento, o círculo e o quadrado devem ser construídos simultaneamente.) [JAGY 1995:31]

A despeito da desavença de Hobbes com os matemáticos contemporâneos, podemos considerar seu asserto de que a geometria fosse "a única ciência que aprouve à divindade até então confiar à humanidade [6] [*apud* JESSEPH 1999:426] como um forte indício de que, naquela fase da evolução do pensamento humano, a geometria gozasse de elevado conceito entre os filósofos.

2.5 Ideias cosmogônicas

Entrementes, Descartes tinha publicado seus *Principia philosophiae* (1644), obra na qual propusera minuciosamente a hipótese dos vórtices. Segundo essa hipótese, inicialmente, em um universo infinito constituído por um único bloco sólido de matéria, a divindade produzira vórtices, distribuídos ao acaso e ao longo de toda a sua extensão. Da ação de tais vórtices dimanariam a diversidade de elementos, os corpos celestes e todos os fenômenos físicos. A concepção dessa teoria, segundo a qual o papel da divindade (*primum immobile*) se esgotara na produção dos vórtices, marcou um afastamento relativo ao modo de pensar medieval, dominado por um princípio teleológico, segundo o qual o universo e sua evolução obedeceriam aos desígnios divinos. [PONCZEK 2002:90, 92-93]

Coube aos adeptos da hipótese de Descartes desenvolver essa concepção, a fim de explicar fatos que se foram acumulando, entre eles a forma da Terra que, como os outros astros, fora desfigurada pela revolução astronômica. Com efeito, a forma esférica, que dominara os céus dos gregos até Nicolau Copérnico, se revelara um dogma obsoleto no século XVII. Quando Johann Kepler substituíra os círculos e os epiciclos por elipses, também os globos dos planetas se revelaram esferoides imperfeitos. Domenico Cassini, diretor do observatório de Paris, observou que o planeta Júpiter parecia achatado e sugeriu que também a Terra deveria sê-lo. Discutiu-se, então, se a Terra seria achatada nos polos ou, pelo contrário, se o comprimento de seu eixo de revolução seria maior que o raio das seções equatoriais. [CASINI 1995:63]

No século XIV, William of Ockham introduzira um princípio, posteriormente denominado a navalha de Ockham, segundo o qual "é vão construir com mais aquilo que se pode construir com menos". (7) [RUSSELL 1972:472]

Os cartesianos não pareciam considerar seriamente a navalha de Ockham pois, para acordarem a teoria dos vórtices com o acervo de resultados experimentais então disponíveis, não se pejavam de acrescentar novas hipóteses ao núcleo duro concebido por Descartes. [CASINI 1995:68-69]

2.6 A construção de retas tangentes

As tentativas feitas, desde o século V a.C., pelos geômetras gregos, para resolver os três problemas clássicos (a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trisseção de um ângulo arbitrário) suscitaram, além do aprimoramento da técnica geométrica, a invenção de diversas curvas, cujas propriedades eram estudadas com interesse. [WREN & GARRETT 1933:270]

Esses antigos geômetras também conceberam a noção de reta tangente a uma curva. Euclides, no *Livro 3* dos *Elementos*, definiria a reta tangente a um círculo como a reta que encontra esse círculo em apenas um ponto e forneceria um procedimento de construção de tal reta. [GUINNESS 1996:363; HARARI 2003:5]

O problema da construção de retas tangentes a uma curva consiste, desde a idade antiga, em descrever um procedimento de traçado de retas que toquem essa curva e em demonstrar que essas retas tocam a curva considerada em apenas um ponto, **o ponto de contacto**. Apolônio, por exemplo, estudou a construção de retas tangentes à elipse, à hipérbole e à parábola. [EVES 1997:199]

Esse problema da construção de retas tangentes foi retomado, na idade moderna, por Roberval e Fermat e, após a publicação da *Géométrie* (1637) por Descartes, se tornou ainda mais atraente. De fato, o uso do método das coordenadas (preconizado por Descartes) suscitou a busca de um método geral de construção de retas tangentes, substituindo os antigos procedimentos específicos descobertos para cada curva.

No curso desses estudos, também foi ressuscitada a disputação acerca d**o ângulo** entre uma curva e a correspondente reta tangente, iniciada no século anterior por Jacques Peletier (1563). Em 1656 (no ano seguinte à publicação de *De corpore*, por Hobbes), Wallis sustentou que tal ângulo não fosse nada. Hobbes contestou (nas *Six lessons to the professors of mathematics of the institution of Sir Henry Saville*, 1656), afirmando não ser possível ser nada alguma coisa que se percebe claramente em uma figura desenhada em uma folha de papel. Além disso, argumentou Hobbes, examinando-se visualmente a figura de dois círculos, de raios distintos, tangentes a uma mesma reta, percebe-se claramente que o círculo de raio

menor forma um ângulo maior com essa reta e "onde houver um maior e um menor, também haverá uma quantidade". (8) [*Apud* BRATING & PEJLARE 2008:351]

Posteriormente, Wallis retrucaria, afirmando que a figura revelava apenas ser mais curvo o círculo de menor raio. Esse episódio é notável, por evidenciar que, durante parte do século XVII, as discussões de caráter geométrico repousavam fortemente na visualização de figuras. [BRATING & PEJLARE 2008:352]

Outro fato relevante, presente nesse episódio, é o procedimento de apreensão de um conceito geométrico. De fato, é notável que os autores discutissem acerca de uma noção que ainda não havia sido definida. "O labor matemático adota, assim, o que qualifiquei algures como inversão epistemológica: Torna visível o que não se vê e oculta o que se vê. Cria um novo nível de abstração, estritamente conceitual, com suas consequências necessárias relativamente aos atos propriamente perceptivos, como a criação do que depois se qualificará de 'fato científico', objetivo e positivo. E esse fato, supostamente, não ocorre desvelado em a natureza mas se manifesta na provocação e na transformação racional que se produziu nessa mesma natureza." (9) [LORENZO 1987:XIII]

Ulteriormente, seria definido **o ângulo entre duas curvas regulares**, no ponto de interseção, como o ângulo entre as correspondentes retas tangentes, no ponto considerado. Assim ensinam, por exemplo, HILBERT & COHN-VOSSEN [1952:172]: "De todas as retas que passam pelo ponto de contacto, a reta tangente fornece evidentemente a aproximação mais íntima com o rumo da curva nesse ponto; por isso, a direção da reta tangente nesse ponto é denominada a direção da curva no ponto considerado." (10)

2.7 A emergência do conceito de função

A ideia de função parece haver sido concebida por James Gregory, conforme se lê no texto *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667): "Dizemos que uma quantidade é composta de outras quantidades, quando se obtém dessas outras mediante o emprego da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão e da radiciação ou de qualquer outra operação imaginável. Quando uma quantidade é composta de outras quantidades mediante as operações citadas, dizemos que é composta **analiticamente**." (11) [*Apud* YOUSCHKEVITCH 1976:58]

Alguns autores enxergam no conceito de função uma ruptura com a concepção estática que teria caracterizado o pensamento matemático na idade antiga. Por exemplo, KLEINER [1989:283]: "O século XVII testemunhou a emergência da moderna ciência matematizada e a invenção da geometria analítica. Ambos esses desenvolvimentos sugeriram uma cisão dinâmica e contínua da relação funcional, em oposição à visão estática e discreta, nutrida pelos antigos." (12)

Parece-me que tenha sido decisiva a exigência imposta pela pesquisa física, como bem o aponta YOUSCHKEVITCH [1976:51]: "[...] nas ciências exatas da época anterior, especialmente no início do século XVII, a nova concepção de leis quantitativas da natureza, que estabeleciam relações funcionais entre valores numéricos das grandezas físicas, esteve robustecendo-se de modo sempre crescente e adquirindo realce. Nesse processo, a criação de um campo, cada vez mais amplo, de metrologia física associado à introdução de medidas quantitativas do calor, da pressão etc. desempenhou papel importante; também foi decisivo o papel exercido pelo ganho imediato de precisão tanto nos experimentos quanto nas observações, decorrente da invenção de diversos instrumentos científicos. Dentre as ciências, a mecânica, alcançando a astronomia, ocupou o primeiro plano, acompanhada do novo ramo, a dinâmica, à qual logo se uniria a mecânica celeste. Estudar a relação entre o movimento curvilíneo e as forças que afetavam o movimento tornara-se o principal problema da ciência. Esse problema suscitou uma séries de problemas na análise infinitesimal, cuja solução tinha de ser conduzida até a respostas numéricas." (13)

Conclui o autor: "Consequentemente, emergiu o novo método de se introduzirem funções, que se tornaria, por muito tempo, o método principal em matemática e, especialmente, nas suas aplicações. Como ocorria antes, não era raro que funções fossem introduzidas verbalmente ou mediante um gráfico ou cinematicamente. E, também como ocorria antes, as tábuas de funções continuaram a ser usadas amplamente. Contudo, na investigação teórica, tornou-se dominante o método analítico de se introduzirem funções mediante fórmulas e equações." (14) [YOUSCHKEVITCH 1976:51]

Resumindo, direi que, inicialmente, as funções eram consideradas como expressões de quantidades obtidas pela efetuação sucessiva de operações com outras quantidades. [FERRARO & PANZA 2003:19-20]

O termo 'função' apareceu, pela vez primeira, em manuscritos de Leibniz (em 1673), dos quais um ostentava o título *O método inverso de tangentes ou de funções* [*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*]. Em alguns artigos de 1692, o termo 'função' reaparece, para denotar segmentos de retas associadas a pontos de uma dada curva, como abscissas, ordenadas, cordas, segmentos de retas tangentes e de retas normais determinados pelos eixos coordenados. Nessa mesma acepção, o termo foi usado por Jakob Bernoulli (em 1694). Quatro anos depois (em 1698), também Johann Bernoulli usa o mesmo termo, porém em uma acepção mais ampla, muito próxima daquela em que Gregory usara a locução 'quantidade composta'. [YOUSCHKEVITCH:1976:56-58]

2.8 As séries de potências

Note-se que, "no início, o espectro das funções expressas analiticamente estava restrito às funções algébricas e Descartes chegou a excluir de sua geometria todas as curvas mecânicas, por não serem acessíveis ao seu método de análise. Porém, um descobrimento feito um pouco depois, nos meados do século XVII [...], tornou possível representar

analiticamente qualquer relação funcional então estudada. Refiro-me ao descobrimento de como se expandirem funções em séries infinitas de potências". (15) [YOUSCHKEVITCH 1976:53]

Assim, a manipulação das séries de potências concorreu para a emancipação do conceito de função. Embora eu não disponha de evidência documental, avento a opinião de que as séries de potências tenham sido suscitadas por dois procedimentos, de caracteres distintos.

O primeiro procedimento, de caráter geométrico foi o procedimento de exaustão, sugerido por Antifonte (*circa* 430 a.C.), inaugurado por Eudoxo de Cnido (*circa* 370 a.C.) e praticado com perícia por Arquimedes de Siracusas (*circa* 250 a.C.), no cálculo de áreas e de volumes. [EVES 1997:418-424; WREN & GARRETT 1932:269]

O segundo procedimento, de caráter formal, consistiu na prática de certas operações com polinômios, as quais podem conduzir a séries. Nessa direção, foi fundamental a *Arithmetica infinitorum* (1655), de Wallis, que "trouxe aos matemáticos a certeza de que o infinito era susceptível de ser manipulado, sem que se tivesse que recorrer ao desvio pela imagem espacial". (16) [BRUNSCHVICG 1972:183]

Wallis costumava efetuar induções diretamente sobre as relações numéricas. Por exemplo, Wallis considerou a sequência cujos termos são frações, das quais o numerador é a soma dos quadrados dos números naturais ($1 + 4 + 9 + ... + n^2$) e o denominador é o produto do maior quadrado que figura no numerador (n^2) pelo consecutivo à raiz quadrada desse número ($1 + n$). Em seguida, Wallis percebeu que os termos dessa série diferiam de 1/3 por uma parcela positiva que se aproximava de zero, quando crescia o número de parcelas (n) do numerador. Então, concluía Wallis, que tal sequência convergia a 1/3. "Feito pois o experimento, tornou-se patente que as razões encontradas pela indução se aproximam continuamente dos valores limites, de modo que, enfim, a diferença termina por se tornar menor que qualquer valor; desse modo, continuado o procedimento indefinidamente, a diferença se nulifica. (17) [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:184-185]

Também opino que o bom êxito na representação por séries dos quocientes de polinômios (hoje diríamos, *das funções racionais*) tenha conduzido à tentativa de se representarem por séries os resultados de outras operações com polinômios, como a radiciação, consoante este exemplo: $\sqrt{(1 + x^2)} = 1 + (1/2)x^2 - (1/8)x^4 + (1/16)x^6 - (5/128)x^8 + (7/256)x^{10} ...$.

Tentativa desse tipo podem haver sido um dos antecedentes do teorema do binômio (ou da série binomial).

Ora, a representação por séries dos resultados de certas operações com polinômios, como a divisão de 1 por ($1 - x^2$), motivou três quesitos:

(a) É lícito igualar $1/(1 - x^2)$ à série $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$?

(b) No caso afirmativo, o símbolo '=' nessa igualdade tem o mesmo significado que esse mesmo símbolo em igualdades do tipo $4 = 2 + 2$?

(c) Se tais significados não forem o mesmo, sob que condições será legítimo igualar $1/(1 - x^2)$ à série $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$?

Assim, talvez seja lícito afirmar, como o fizeram FERRARO & PANZA [2003:20], que "séries de potência houvessem sido concebidas como objetos de natureza semelhante aos polinômios, isto é, como extensões, de natureza infinita, dos polinômios". (18)

Esse asserto é corroborado pela prática de se estenderem formalmente às séries as operações efetuadas com polinômios, prática essa consentânea com o significado então atribuído às séries: Se as séries representavam funções e se as funções se podiam submeter a certas operações, também assim ocorreria às séries.

Essas considerações não pretendem sugerir que as séries fossem concebidas apenas como objetos formais. Com efeito, na *De vera proportione* (1682), Leibniz sustentara que $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots = \pi/4$, apontando que, se aproximarmos $\pi/4$ pelo primeiro termo da série, cometeremos um erro inferior a $1/3$; se aproximarmos $\pi/4$ pela soma dos dois termos iniciais, cometeremos um erro inferior a $1/5$; se aproximarmos $\pi/4$ pela soma dos três termos iniciais, cometeremos um erro inferior a $1/7$ etc. "Se a série for continuada, o erro tornar-se-á menor que qualquer quantidade dada. Logo, a série completa contém todas as aproximações e exprime o valor exato." [FERRARO & PANZA 2003:20]

Por outro lado, a função racional $1/(1 - x^2)$ admite a expansão $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$. Ora, essa função racional não está definida no ponto $x = 1$ e a série, nesse ponto, é divergente.

Quesitos desse tipo podem haver conduzido às noções de **série convergente,** do **limite** de tal série e de seu domínio de convergência (que, no caso de séries de termos complexos, se traduz pelo disco de convergência).

Esses termos, ***series convergens*** e ***terminatio***, foram introduzidos por James Gregory que, entre as 'outras operações imagináveis' com funções, incluiu a passagem ao limite, a que denominava ***nostra sexta operatio***. [YOUSCHKEVITCH 1976:58]

Cabe salientar que, opondo-se a diversos escoliastas, Paul BOUTROUX [1920:116-117] nega que o cálculo diferencial e o cálculo integral houvessem introduzido "um princípio novo, do qual se possa dizer tenha promovido uma revolução no curso das ciências" (19).

Mas reconhece a transformação inaugurada pelas séries de potências: "[...] a parte mais notável e mais fecunda dessa nova matemática era incontestavelmente *a teoria das expansões em séries*, que possibilitou o estudo geral das funções". (20) [BOUTROUX 1920:117]

Informa Craig Fraser que, até mais tarde, as séries não eram consideradas funções mas eram consideradas um modo de tornar inteligíveis esses objetos, consoante exporia Leonhard Euler (em 1748): "Além disso, a natureza das funções transcendentes se deixa melhor entender, se forem expressas mediante séries, ainda que infinitas." (21) [*Apud* FRASER 1989:322]

2.9 A invenção do cálculo infinitesimal

> "A análise que se explica nesta obra supõe a análise comum mas muito se distingue dela. A análise comum trata apenas de grandezas finitas; essa outra penetra até o próprio infinito." (22) L'Hôpital (1696), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, sentença de abertura da prefação. [*Apud* BOS 1972:4]

Assim como a construção de retas tangentes por pontos de uma dada curva, dois outros problemas, **o problema dos extremantes** (calcular os valores mínimos e os valores máximos da ordenadas de uma curva) e **o problema da quadratura** (calcular a área da região circunscrita por uma curva fechada ou a área da região determinada por duas curvas que se intersecam) eram populares na primeira metade do século XVII. (LORENZO 1987:XXII)

Do descobrimento por Gilles de Roberval, em 1645, de que existe um vínculo entre o problema da construção de retas tangentes e o problema da quadratura, surgiu um novo problema, denominado o problema inverso das retas tangentes. Esse problema consistia em encontrar a equação de uma curva, de cujas retas tangentes se conheciam as propriedades ou cuja quadratura estava bem caracterizada. (LORENZO 1987:XXV)

Em 1658, Blaise Pascal acrescentou a esses um quinto problema: Calcular o comprimento de um arco de uma dada curva. (LORENZO 1987:XXIII)

Coroando esforços despendidos por vários estudiosos, em 1684, Leibniz publicou *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus* ... [novo método para os máximos e os mínimos bem como para tangentes ...]. Esse novo método de cálculo, que logo se denominou **cálculo diferencial** [*calculus differencialis*], fora concebido precipuamente para determinar os pontos de curvas planares nos quais a ordenada assumisse valores máximos ou mínimos e para construir retas tangentes a essas curvas. [LEIBNIZ 1987:3-29; STRUIK 1987:112]

O título desse ensaio indica que, na época em que foi escrito, o conceito de função ainda não desempenhava papel dominante entre os geômetras, tanto que seu autor não o dedicou à pesquisa de valores máximos e mínimos *de funções* mas ao cálculo de tais valores ao longo de *curvas planares*, assim como o destinou à investigação das retas tangentes por serem construídas.

Mas esse novo método proposto por Leibniz não foi acolhido imediatamente pelos contemporâneos. Na verdade, dez anos após haver sido divulgado, o método proposto por Leibniz foi criticado nas *Considerationes circa analyseos ad quantitatis infinite parvae* (1694) e nas *Considerationes secundae* (1696) de Bernard Nieuwentijt, autor de um manual didático, talvez o primeiro acerca desse novo método, dedicado às propriedades dos polígonos curvilíneos (*Analysis infinitorum, seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae*, 1695). Essa crítica conduzida por Nieuwentijt motivaria exposições mais acuradas do novo método, que seria empregado para se resolverem os cinco problemas citados. [SIERKSMA & SIERKSMA 1999:442]

Impende notar que, já em 1696, seria publicada a *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, do marquês de l'Hôpital, escrita sob a forte influência de Johann Bernoulli [STRUIK 1987:112] ou por inspiração de Bernard de Fontenelle, que haveria sido seu *daemon scribendi* [*ghostwriter*], como sugere GUICCIARDINI [1996:168].

A sugestão de Guicciardini não parece bem fundamentada pois, citando cartas de Bernoulli, SHANK [2004:273] refere um contrato, pactuado em 1694 entre l'Hôpital e Bernoulli, segundo o qual o citado marquês seria o único recipiente, na França, da obra matemática do geômetra suíço. E SIERKSMA & SIERKSMA [1999:440] reproduzem parcialmente um excerto da autobiografia do próprio Johann Bernoulli, do qual consta que o marquês de l'Hôpital não se envergonhara em tomar lições, tanto de cálculo diferencial quanto de cálculo integral, as quais ulteriormente compilou e publicou como livro, em cuja prefação reconheceu seu débito para com Bernoulli.

Na verdade, o texto publicado pelo marquês de l'Hôpital trata apenas do cálculo diferencial e em sua prefação não figura a atribuição a Bernoulli do conteúdo mas tão somente existe menção de 'débito de gratidão pelas muitas ideias lúcidas' dos dois irmãos Bernoulli (Jakob e Johann), especialmente a Johann. [SIERKSMA & SIERKSMA 1999:440]

A extensão do cálculo a outras funções operou-se através das séries de potências: Já que os polinômios podiam ser facilmente diferenciados e integrados, o descobrimento de que muitas das funções conhecidas admitiam expansão em séries de potências permitiu estender esses procedimentos (a diferenciação e a integração) a tais funções. Isso também suscitou a associação de uma soma a uma série de potências, quesito que despertaria muito interesse e produziria intensa controvérsia. [BARBEAU 1979:357]

Um dos aspectos dessa controvérsia está associado à emergência das séries de funções circulares (as *séries de Fourier*) e das séries de funções ortogonais, que suscitaram o

conceito de **continuidade uniforme** e, posteriormente, já no âmbito das funções de uma variável complexa, a noção de **funções analíticas**.

Apenas para acentuar que esse defluente não foi percorrido serenamente, lembrarei que Niels Abel, preocupado com o rigor na exposição, propôs restringir "o domínio de validade de todos os teoremas da análise às séries de potências". [LAKATOS 1978:46]

2.10 A filosofia da natureza

Entrementes, Isaac Newton publicara os *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). A historiografia contemporânea elaborou, em torno dessa obra, um acervo significativo de estudos que procuram desvendar o significado que o próprio Newton pretendeu imprimir a ela. Não me deterei sobre esses estudos, por que a reputação de que essa obra gozou ao longo dos dois séculos seguintes foi decorrente do modo do qual ela então foi compreendida [DOLBY 1987:339a].

Nessa obra, para instituir os fundamentos da dinâmica, Newton adotou o estilo que já fora cultivado por Arquimedes, o qual, no tratado *Acerca dos corpos flutuantes* (*circa* 220 a.C.), propusera alguns postulados relativos à natureza dos fluidos e neles baseara a demonstração de diversas propriedades. Esse mesmo estilo fora restaurado por Galilei que, nos *Discursos sobre duas novas ciências* (1638) instituíra diversas proposições acerca dos fenômenos físicos, recorrendo às técnicas dedutivas da geometria (de Euclides). [ARNOLD 1983:252]

Mas o método expositivo de Newton (posteriormente denominado '**estilo newtoniano**' por I. Bernard Cohen) se caracterizou por separar, em cada quesito, os aspectos matemáticos e os aspectos físicos. Em seguida, os aspectos físicos eram descritos por um conjunto de hipóteses e eram sujeitos a um tratamento matemático refinado que lhe extraía as consequências. Tais consequências eram, em seguida, comparadas com os dados da observação e da experimentação, que poderiam evidenciar a necessidade de se introduzirem modificações na escolha das hipóteses iniciais. O procedimento era então replicado, até que houvesse concordância entre os *principais* aspectos revelados pela experiência e as suas respectivas previsões feitas pela teoria formal.

Um exemplo simples do estilo newtoniano figura no *livro primeiro* dos *Principia*. Newton considerou um corpo animado de movimento circular. Tendo demonstrado a lei da força centrípeta, provou que o período seria proporcional à n-ésima potência do raio do círculo se e somente se a força centrípeta fosse proporcional ao inverso da potência, de ordem 2n-1, do citado raio. Disso decorre que o período seria proporcional à potência de ordem 3/2 (terceira lei de Kepler), se e somente se a força centrípeta fosse proporcional ao inverso do quadrado do raio. A proporção entre a força centrípeta e o inverso do quadrado do raio já havia sido sugerida antes de Newton mas o seu método revelava uma

concordância entre a lei de Kepler e a sua segunda lei, admitida como hipótese. [GRABINER 2004:842]

Esse método de investigação, no qual a escolha das hipóteses é regulado por consequências que podem ser confrontadas com relatos de experimentos seria ulteriormente convertido em um dos princípios do método axiomático, no qual a escolha dos axiomas é censurada pelo cotejo de teoremas decorrentes desses axiomas com a descrição de fatos (teóricos ou empíricos) pertinentes à teoria que se quer construir.

Newton recorreu, nos *Principia*, a uma profusão de técnicas demonstrativas entretecidas consoante a distinção, referida frequentemente pelo próprio Newton, entre os métodos de prova analíticos e sintéticos. Na antiguidade, o método analítico (ou, mais brevemente, a análise) era concebido como método de descobrimento ou de resolução de problemas. Por exemplo, se quisermos construir um certa reta, suporemos que tal reta tenha sido construída e daremos os passos na ordem inversa, até encontrarmos uma construção que saibamos efetuar. Desde então, poderemos *provar* por 'síntese' que a construção desejada é possível, repetindo, na ordem oposta, os passos que demos durante a análise. Assim, a análise constituiu uma '*via inveniendi*' enquanto a síntese é uma '*via disserendi*'. [GRABINER 2004:849; GUICCIARDINI 1999:293] Talvez dessa nomenclatura dimane o emprego do qualificativo 'analítico' para designar o método preconizado por Descartes para o estudo da geometria.

Essa norma metodológica também se empregaria na *filosofia natural*, o que sugere ou, pelo menos, fornece o indício, de que não fizessem os geômetras daquela fase histórica uma distinção rígida entre o método matemático e método de outras ciências. Confronte-se, por exemplo, o excerto seguinte de um manuscrito sobre óptica, de Newton [18 MS Add. 3970, f. 286r, *apud* SHAPIRO 2004:197]:

> "Assim como na matemática, também na filosofia natural a investigação das coisas difíceis pelo método da análise sempre deverá preceder o método de composição. Essa análise consiste em efetuar experimentos e observações e em tecer argumentos que conduzem das substâncias compostas aos seus ingredientes, dos movimentos às forças que os produzem e, em geral, dos fenômenos a suas causas e das causas particulares às causas mais gerais, até que o argumento termine nas causas mais gerais. A síntese consiste em admitir como princípios as causas [gerais] descobertas e instituídas e, mediante essas causas, explicar os fenômenos que delas promanam e provar as explicações." (23)

Os empiricistas lógicos retomarão esse tema, sob o rótulo de 'contexto de descobrimento' e 'contexto de prova'.

A leitura dos manuscritos e das cartas de Newton revela que a escolha do estilo geométrico adotado nos *Principia* foi motivada por um espectro significativo de fatores culturais, dentre os quais citarei os seguintes, reconhecendo ser necessário um estudo mais acurado dos procedimentos que então se consideravam aceitáveis, a fim de termos uma visão

mais clara das escolhas feitas por esse autor. [Cf. GUICCIARDINI 1999:292-293; BRUNEAU 2007:230]

Sustenta-se que, na sétima década daquele século, Newton concebeu uma profunda aversão pelos métodos simbólicos, talvez sob a influência de um mito, constituído em torno do testemunho, dado por Proclo de Constantinópole (cujas *Collectiones* haviam sido publicadas em 1588 e cujo sétimo livro Newton estudou aprofundadamente), de que os antigos divulgavam em linguagem geométrica sintética o que fora anteriormente descoberto mediante procedimentos heuréticos analíticos, conservados ocultos. Considerando-se o herdeiro da antiga tradição em geometria, Newton se afastou dos modernos, de Descartes especialmente, que buscavam unir a aritmética à geometria. [GUICCIARDINI 2003:413; GUICCIARDINI 2004:227]

Newton aceitava um mito de que os antigos haviam atingido um conhecimento avançado na natureza física da criação divina. [DOLBY 1987:339] Esse mito em torno da *prisca sapientia* (a sabedoria dos antigos), não era novo e, enquanto Newton vivia, estava disseminado na Inglaterra. Restrito à matemática, tal mito é transparente no seguinte excerto de Newton, escrito na sétima década do século XVII: "Na verdade, o método dos antigos é, de longe, mais elegante que o método cartesiano. Pois Descartes alcançou resultados por meio de um cálculo algébrico que, traduzido em palavras (como era a prática no escrito dos antigos), se mostraria tão tedioso e emaranhado, que causaria náusea e não poderia ser entendido. Porém os antigos conseguiam resultados através de certas proposições simples, julgando que não valesse a pena ler nada que fosse escrito em outro estilo. Por isso, ocultavam a análise mediante a qual obtinham suas construções." (24) [*Apud* GUICCIARDINI 1998:5]

Mais tarde, na polêmica travada com Leibniz acerca da prioridade do método das fluxões, Newton diria que o cálculo diferencial e o cálculo integral eram úteis apenas na arte de descobrimento mas inadequados na ciência da demonstração e afirmou que seu método geométrico das fluxões era fundado na antiga prática das técnicas de exaustão e dotado de significado seguro. [GUICCIARDINI 2003:415]

Mas, para comprovar a anterioridade de seu método, Newton não pôde apresentar como evidência documental os seus próprios *Principia*, pois nesse texto a maior parte das demonstrações tinha caráter sintético. [GUICCIARDINI 1996:168]

Assim, referindo-se a si mesmo na terceira pessoa, escreveu ele (em 1714) que "auxiliado por essa nova análise, o sr. Newton encontrou a maior parte das proposições de seus *Principia Philosophiae*. Mas, como os antigos, ao construirem argumentos, só admitissem em geometria poposições demonstradas sinteticamente, ele provou sinteticamente as proposições acerca do sistema dos céus, fundando-as sobre a boa geometria. Isso tornou difícil a pessoas não industriadas perceber o emprego da análise no descobrimentos dessas proposições". (25) [*Apud* GUICCIARDINI 1996:169]

Newton adotou uma prática de publicação, associada a uma estratégia de formação de *escola*, consoante a qual somente aos adeptos eram revelados os passos dados no

descobrimento das proposições, passos esses dados, em diversos casos, mediante o método das fluxões, por ele inventado em 1666 mas não divulgado. Importava a Newton e aos seus discípulos mais próximos afirmar os *Principia* como o texto no qual se revelava uma nova cosmologia, enquanto Leibniz desejava impor-se como portador de um novo método de cálculo e formar uma escola europeia de matemáticos que, assumindo cátedras e outra posições acadêmicas, se fizessem transmissores de uma nova linguagem. "Para Newton e os seus seguidores mais próximos era importante afirmar os *Principia* como texto no qual se encontrava revelada uma nova cosmologia. Newton queria impor-se como o portador de uma nova verdade. [...] Leibniz, pelo contrário, queria impor-se como portador de um novo método de cálculo. Aspirava a formar, em nível europeu, uma escola de matemáticos que, constituindo colônias em cátedras e em posições nas academias, se fizessem portadores de uma nova linguagem matemática." (26) [*Apud* GUICCIARDINI 1998:7]

Cabe realçar, contudo, que "a herança matemática de Newton era complexa e não parecia organicamente integrada. Nos trabalhos legados por Newton não há uma unidade facilmente discernível nem uma indicação clara do método matemático *correto*. Em particular, definir os métodos matemáticos de Newton como orientados unicamente para a *geometria* constitui simplificação deficiente. Consequentemente, desenvolveram-se diversos tratamentos da herança matemática de Newton, cada um coerente com uma leitura distinta de sua obra." (27) [GUICIARDINI 2004:223]

Na seção final dos *Principia*, referindo-se ao sistema solar, Newton declarou que "este sistema sumamente elegante, constituído do sol, dos planetas e dos cometas não poderia haver surgido sem o desígnio e o domínio de um ser inteligente e poderoso". (28)

2.11 O entendimento humano e a experiência

Pouco depois da edição dos *Principia* por Newton, John Locke havia apresentado um *Essay concerning human understanding* (1690), no qual propôs uma teoria geral da construção do conhecimento do mundo material pela mente humana. (Locke seria posteriormente descrito como o primeiro *newtoniano* não matemático que teria aceito o juízo, formulado por Christiaan Huygens, de que eram verdadeiras todas as proposições matemáticas que figuravam nos *Principia*.) Cedo, a filosofia natural de Newton seria associada ao sistema defendido por Locke, associação essa que perdurou nos escritos dos enciclopedistas, que apresentaram os resultados formais de Newton como o exemplo supremo do racionalismo científico, entendido nos termos da teoria do conhecimento defendida por Locke [DOLBY 1987:339b-340a].

No que tange ao conhecimento da matéria, Aristóteles de Estagiros definia os diferentes tipos de substâncias materiais mediante as suas qualidades imediatamente sentidas. (Assim, o fogo seria a substância material que é imediatamente sentida como quente e seca.) [NORTHROP 1946:425]

Galileo Galilei rejeitou essa doutrina, fazendo "claramente a distinção entre o que, no mundo, é absoluto, objetivo, imutável e matemático e o que é relativo, subjetivo, flutuante e sensorial" [BURTT 1991:67]. Galilei distinguiu entre as qualidades primárias e secundárias. Essas últimas, as secundárias, que são qualidades sentidas, seriam meras aparências; dependeriam da presença e da consciência do observador. Aquelas primeiras, as primárias, seriam propriedades geométricas dos átomos que, por sua pequena dimensão, não seriam detectadas pelos sentidos. Manifestar-si-iam como a impenetrabilidade e a forma (geométrica). "A realidade do universo é geométrica; as únicas características últimas da natureza são aquelas nos termos das quais se torna possível certo conhecimento matemático. Todas as demais qualidades — e elas são, por vezes, muito mais flagrantes aos nossos sentidos — são secundárias, efeitos subordinados das primárias." [BURTT 1991:68]

Informa RUSSELL [1972:604] que os *Ensaios acerca do entendimento humano* [*Essays concerning human understanding*], de John Locke, foram concluídos em 1687, no mesmo ano em que Newton editava seus *Principia*. (Acrescenta DOLBY [1987:339-340] que foram publicados em 1689, com data de 1690, e que, já em 1688, Locke publicara, em língua francesa, um relatório sumário dos *Principia*.) "O filósofo, embora imperito em matemática, viu nos *Principia* o mais alto produto do método experimental, cujos fundamentos epistemológicos havia justificado nos seus *Ensaios* (...) [CASINI 1995:33].

Também Locke defendeu a doutrina das qualidades primárias e secundárias, definindo aquelas como as qualidades inseparáveis dos corpos e enumeradas como solidez, extensão, figura, movimento (ou repouso) e número. As qualidades secundárias são as que restam: a cor, o som, o cheiro etc. As qualidades primárias são inerentes aos corpos; as qualidades secundárias, pelo contrário, vinculam-se ao percipiente. Sem o olho do percipiente, não haveria cores; sem os seus ouvidos, não haveria sons etc. "Porém Berkeley apontou que os mesmos argumentos se aplicam às qualidades primárias. Desde Berkeley, o dualismo de Locke a esse respeito se tornou filosoficamente antiquado. Não obstante, dominou a física prática até o surgimento da teoria quântica em nossos dias. Não somente foi esse dualismo admitido, explícita ou tacitamente, pelos físicos como também se mostrou fecundo, como fonte de muitos descobrimentos importantíssimos. A teoria de que o mundo físico consistisse apenas de matéria em movimento foi a base das teorias aceitas do som, do calor, da luz e da eletricidade. Pragmaticamente, a teoria era útil, embora teoricamente pudesse ser equivocada." (29) [RUSSELL 1972:605-606]

Segundo RUSSELL [1972:609], "Locke pode ser considerado como o fundador do empiricismo, a doutrina de que todo nosso conhecimento (com a possível exceção da Lógica e da Matemática) é derivado da experiência." (30)

Vale referir que, embora não houvesse escrito especificamente sobre o entendimento humano, Newton exprimiu claramente sua visão da origem empírica da geometria, na prefação aos *Principia mathematica*

> "A geometria não nos ensina a desenhas essas curvas (linhas retas e círculos) porém exige que o aprendiz primeiramente seja ensinado a descrevê-las acuradamente, antes

de se iniciar na geometria. Descrever linhas retas e círculos são problemas mas não problemas geométricos. As soluções desses problemas é exigida pela mecânica e, assim resolvidos, é mostrado o uso dessas linhas. E é a glória da geometria que seja capaz de produzir tantas coisas desde poucos princípios trazidos de seu exterior. Portanto, a geometria se funda na prática mecânica e é apenas a parte da mecânica universal que propõe e demonstra acuradamente a arte de medir." (31) [*Apud* BKOUCHE 2006:5]

2.12 A reação ao cálculo das fluxões

George Berkeley entendeu que o sistema defendido por Newton implicava na existência de uma divindade da ordem da natureza (diríamos hoje, *uma divindade naturalizada*) e que isso subverteria a autoridade das assim denominadas *Escrituras*. Nessa apreciação, Berkeley estava certo. Com efeito, foi enérgica a evolução intelectual, após a aceitação do sistema de Newton. RUSSELL [1972:536] cita que, no início do século XVII, o médico inglês Thomas Browne participara de julgamentos de feitiçaria mas que fatos dessa espécie já não seriam possíveis no fim daquele século.

Com efeito, o sistema de Newton, acompanhado do refinamento na capacidade de predição dos astrônomos, promoveu, em grande parte, a descrença no animismo. Enquanto para Aristóteles de Estagiros, o espírito de um animal, entre outras funções, seria responsável pelo seu movimento, Newton afirmava que a matéria inanimada, sujeita a uma força instantânea, continuaria a mover-se indefinidamente, a menos que fosse detida por alguma causa externa. E os próprios cometas, que na teoria aristotélica seriam perenes, por se situarem na esfera supralunar, tiveram suas órbitas calculadas por Newton e por Edmund Halley e se mostraram "tão obedientes à lei da gravitação quanto os planetas". (32) [RUSSELL 1972:536]

Berkeley empreendeu o ataque às ideias de Newton. No libelo *O analista* (1737), impugnou a validade lógica do cálculo das fluxões e, apresentando exemplos bem escolhidos do emprego desse cálculo, afirmou que os matemáticos se baseavam em raciocínios mais débeis que os teólogos. [BERKELEY 2002:9; GRABINER 2004:844]

Para revelar a inconsistência do método proposto por Newton, Berkeley enunciou o princípio (posteriormente denominado lema de Berkeley) de que, se em um argumento, uma dada proposição p for considerada verdadeira e dela se deduzirem outras proposições, então a ulterior negação da proposição p implicará que a conclusão anteriormente obtida já não procederá. E apontou que, no cálculo de uma fluxão, inicialmente, se considera não nulo o incremento atribuído à variável e, finalmente, se considera que tal incremento fosse nulo. Segundo o lema de Berkeley, o valor obtido para a fluxão não procede. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então, supondo que $h \neq 0$, poderemos escrever a razão $\{f(x + h) - f(x)\}/h$ como $2x + h$. Em seguida, supondo que $h = 0$, concluímos que a fluxão seja $2x$. [CAJORI 1917:147-1487]

A fim de tornar risíveis o método de Newton, Berkeley indagava retoricamente: "E que são essas fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes? E o que são esses mesmos incrementos evanescentes? Não são quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas nem mesmo nada. Não podemos, pois, denominá-los fantasmas de quantidades que morreram?" (33) [*Apud* PYCIOR 1987:284]

Ainda que tenha tido forte motivação religiosa (o que, aliás, naquela época, não era estranho ao modo de pensar), a crítica elaborada por Berkeley ao método das fluxões se inseria às cogitações contemporâneas. Com efeito, Berkeley viveu na época em que se travou uma forte disputação entre os 'adeptos dos antigos' e os seus oponentes.

Talvez a melhor resposta a Berkeley tenha sido dada por Colin Maclaurin, um dos mais próximos seguidores do método de Newton e autor de um tratado de fluxões [*A treatise of fluxions*, 1742], em cuja prefação asseverou que parte da autoridade da matemática promanava da crença em a demonstração matemática produzir consenso universal, não dando azo a dúvida nem a cavilação [GRABINER 2004:844].

Newton havia argumentado, nos *Principia*, que a terra apresentava a forma de uma esfera achatada nos polos ou, mais precisamente, a forma de um elipsoide de revolução dotado de elipticidade muito pequena (*livro I, proposição 91*).

Maclaurin aprofundou esse tema, estudando corpos homogêneos na forma de elipsoides, cujas partes se atraíam reciprocamente, segundo uma lei de atração que previsse forças proporcionais ao inverso do quadrado das distâncias. Entre outras coisas, provou ser uma configuração de equilíbrio um elipsoide homogêneo que revolve em torno do eixo de simetria, o qual passa pelos pontos do elipsoide nos quais a curvatura é mínima.

Instituiu também o teorema de que dois elipsoides confocais de revolução atraem uma partícula situada ou no eixo ou no equador com forças proporcionais aos respectivos volumes. Nessa obra, Maclaurin recorreu às séries introduzidas por Brook Taylor, no *Methodus incrementorum* (1715), e posteriormente conhecidas como séries de Maclaurin. Suas pesquisas eram contemporâneas com os trabalhos de Alexis Clairaut e de Leonhard Euler. [GRABINER 2004:845; STRUIK 1987:130]

Convém apontar a diferença na apresentação dessas duas obras notáveis. Nos *Principia*, Newton expõe as ideias através de recursos diversos, como as séries, os infinitésimos, as quadraturas, procedimentos geométricos de cálculo de limites, a teoria das seções cônicas e das curvas algébricas de ordem superior, a geometria projetiva e técnicas de interpolação. Por isso, essa obra de Newton era inacessivel, salvo aos leitores mais persistentes. [ARNOLD 1983:252; GUICCIARDINI 2003:407; STRUIK 1987:130]

Já o primeiro volume do *Tratado das fluxões* de Maclaurin fora, deliberadamente, redigido no estilo geométrico antiquado, imune à crítica de Berkeley.

Note-se que, ao contrário do que ocorria ao cálculo das fluxões, acoimado de incongruente por Berkeley, a geometria se apresentava como o paradigma da ciência natural

e ainda gozava do prestígio que, havia pouco mais de seis décadas (1677), induzira Baruch Spinoza a atribuir ao seu tratado de ética o subtítulo *segundo o estilo euclidiano* [*geometrico more demonstrata*], isto é, mediante definições, axiomas e teoremas [GRABINER 2004:845; RUSSELL 1972:549, 572].

Mas o segundo volume do tratado das fluxões de Maclaurin não tinha o caráter geométrico do primeiro volume. Intitulado '*Sobre a computação no método das fluxões*' [*On the computations in the method of fluxions*], iniciou pela afirmação do poder da notação simbólica e pela importância em se provarem novamente as regras do cálculo das fluxões, desta vez de um ponto de vista algébrico. O caráter duplo do *Tratado das fluxões* seria notado por Sylvestre Lacroix que, na introdução histórica à segunda edição de seu influente *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797), elogiaria especialmente o tratamento concedido por Maclaurin às séries de potências. De fato, foi nessa obra que Maclaurin introduziu o critério de convergência de séries mediante comparação com integrais impróprias. Além disso, Maclaurin introduziu critérios de identificação dos pontos de máximo e de mínimo, através do exame dos sinais das derivadas de ordem n, usando, para isso, a expansão em séries de Taylor. [GRABINER 1977:394-395; GRABINER 2007:85-86; STRUIK 1987:130]

É surpreendente haver um escoliasta do quilate de Niccolò Guicciardini, inadvertidamente, esposado a opinião de que o *Tratado* de Maclaurin fosse de pouco uso para o pesquisador. [GRABINER 2007:85] Porém, em estudo mais recente, esse autor reconhece o impacto que o *Treatise of fluxions* teve sobre os matemáticos do Continente, embora advirta em que esses matemáticos não professaram a mesma doutrina que Maclaurin. [GUICCIARDINI 2004:240-241]

Maclaurin não aceitava que a matemática se pudesse desenvolver independentemente da filosofia natural. Pelo contrário, acreditava que a matemática e a filosofia natural estivessem entrançadas intimamente. [GUICCIARDINI 2004:240]

Maclaurin escreveu ainda um *Relatório dos descobrimentos filosóficos de Sir Isaac Newton* [*Account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries*], baseado em suas preleções em Edimburgo e publicado postumamente. Nessa obra, na qual Maclaurin procurou consolidar a concepção de Newton, chamam a atenção especialmente os títulos dos capítulos IV e V, respectivamente, 'a gravidade demonstrada pela análise' e 'os efeitos do poder geral da gravidade deduzidos sinteticamente'. Essa obra foi imediatamente (em 1749) vertida à língua francesa. [GRABINER 1977:396]

A obra de Maclaurin gozava de aceitação fora da Escócia. O *Treatise* foi vertido à língua francesa, como *Traité de fluxions* (1749). E, em 1765, apareceu o resumo *Abregé du calcul intégral ou méthode inverse des fluxions*. [GUICCIARDINI 2004:240] Além disso, Maclaurin, por duas vezes, foi agraciado pela Académie de Sciences (de Paris). Em 1724, por uma memória sobre colisões; em 1740, juntamente com Antoine Cavalleri, Daniel Bernoulli e Leonhard Euler, por uma memória acerca das marés. [GRABINER 1997:396; GUICCIARDINI 2004:221]

2.13 O nascimento da física matemática

De certo modo, Leibniz e Newton atingiram ambos os seus respectivos escopos. De fato, de acordo com Galilei, através de experimentos bem conduzidos, a Natureza nos revelaria os segredos. Ora, uma tal interrogação metódica da Natureza por experimentos pressupõe uma linguagem. No interstício de 1690 a 1710, ao labor de se matematizar a ciência do movimento ofereciam-se três vias: os métodos geométricos (como os empregados por Newton), o cálculo diferencial de Leibniz (baseado na noção de infinitésimos) e o cálculo fluxional de Newton (apoiado no conceito de limite). [Cf. GUICCIARDINI 1996:169]

Concorreram decisivamente para a aceitação do método de Leibniz como ferramento da dinâmica Jakob e Johann Bernoulli, que dele se aproximaram desde 1687 e que "começaram a descobrir-lhe os tesouros contidos no empreendimento precursor". (34) [STRUIK 1987:118]

Também foi determinante à conformação da "*physique mathématique*", elaborada mediante o método de Leibniz, a contribuição de alguns estudiosos franceses que, de algum modo, se ligavam a Nicolas de Malebranche, quer por aceitarem as suas ideias, quer por as impugnarem pois, como lembra HANKINS [1967:193], "a influência de um filósofo importante pode estender-se mesmo aos seus críticos mais violentos". Lembre-se, *en passant*, que o desígnio de Malebranche fora coadunar a física cartesiana com a doutrina da igreja romana, tarefa pouco simpática aos pensadores que depois seriam dominantes na *época das luzes*. Por outro lado, se essa época "foi a primeira a descobrir e a afirmar apaixonadamente a autonomia da razão e a impô-la em todos os domínios da vida do espírito" [CASSIRER 1997:15], não constituirá surpresa haverem Pierre-Louis Maupertuis, Jean d'Alembert e Voltaire feito referências elogiosas ao autor de *De la recherche de la vérité* (1674) que, na esteira de Descartes, professava um vigoroso racionalismo.

Avançando as teses cartesianas, Malebranche afirmou, sem perífrases, em *De la recherche de la vérité*, que "a verdade é apenas uma razão real, de igualdade ou de desigualdade. A falsidade é apenas a negação da verdade." [HANKINS 1967:195] E classificou as verdades em três tipos: As relações entre as coisas criadas, as relações entre as ideias inteligíveis ou arquétipos e as relações entre as coisas e as suas ideias. [WALTON 1969:150]

Malebranche estava convencido de que as leis do movimento eram consequência necessária da ação divina. Descartes tentara deduzir as leis do movimento de dois princípios, que ele considerava evidentes: a lei da inércia e a lei da conservação do movimento absoluto. Também Malebranche atribuía a essas leis o caráter universal: "[...] todos os movimentos ocorrem ou tendem a ocorrer segundo uma linha reta e, havendo colisão, os movimentos se comunicam de acordo com a proporção das grandezas dos corpos colidentes". Mas, nos escritos posteriores, Malebranche se afastou um pouco de Descartes, ao justificar esses princípios mediante a simplicidade da ação divina. [HANKINS 1967:199]

A noção da simplicidade da ação divina, defendida por Malebranche, refletir-se-ia no princípio da menor ação, invocado por Pierre-Louis de Maupertuis, no *Accord de différentes lois de la Nature* (1748). Com efeito, nesse estudo, admitindo o modelo corpuscular da luz, Maupertuis discutiria, de três modos, a propagação da luz entre dois meios de distinta refringência: O primeiro modo, conforme Descartes, supunha que a luz atuasse como uma bola que atravessa uma superfície e, por isso, em um meio mais denso, teria maior velocidade que em um meio mais rarefeito. O segundo modo, segundo Newton, supunha que o meio atraísse o raio de luz e, por isso levaria ao mesmo resultado previsto por Descartes. O terceiro modo recorria a "explicações, que são extraídas de princípios metafísicos, daquelas leis em que, na produção de seus efeitos, por estar sujeita a uma inteligência superior, a Natureza sempre atua, procedendo do modo mais simples." [*Apud* SILVA 2006:59-60]

Segundo a narrativa de Fontenelle, a leitura de *De la recherche de la vérité*, de Malebranche, levou l'Hôpital a renunciar ao serviço militar e a dedicar-se inteiramente ao labor matemático. Quando Johann Bernoulli esteve em Paris (em 1691), consoante sua própria narrativa, encontrou Malebranche na companhia de diversos sábios, entre os quais l'Hôpital, com quem travou estimulante conversa sobre a paixão pela matemática e em quem reconheceu um notável domínio da geometria aliado ao completo desconhecimento do cálculo diferencial. Johann Bernoulli ofereceu a l'Hôpital um de seus recentes artigos. L'Hôpital percebeu que os quesitos discutidos nesse artigo não poderiam ser resolvidos pela análise cartesiana e, imediatamente, se fez discípulo de Bernoulli, com quem manteria ininterrupta correspondência até morrer (em 1704). Já no ano seguinte, em 1692, Pierre de Varignon, colega de l'Hôpital, também iniciaria correspondência com Johann Bernoulli. [SHANK 2004:271-273]

A atividade conjunta de Varignon e de ambos os irmãos Bernoulli plasmou a nova feição da ciência do movimento, que se distanciava de um projeto de geometrização, **dotado de estritos compromissos ontológicos** (associado a Galilei, Descartes e Huygens), e se aproximava de um projeto de matematização, **no qual todas as reivindicações de realismo ontológico eram abandonados** em favor de um tratamento instrumental mediante técnicas baseadas no método de Leibniz. [MANCOSU 1999:366]

Um marco característico dessa transição constituiu a publicação (em 1716), por Jacob Hermann, da obra *Phoronomia*, dedicada à dinâmica dos sólidos e dos fluidos, que tratou de diversos quesitos estudados por Newton nos livros I e II dos *Principia*. Embora o autor houvesse declinado o desejo de, nessa obra, se ater aos métodos geométricos, a familiaridade com o método de Leibniz lhe permitia versar sobre a matéria diferentemente de Newton.

Na primeira edição dos *Principia*, Newton havia enunciado, sem demonstrar, que seria uma seção cônica a trajetória de uma massa pontual m (cujas condições iniciais fossem conhecidas), se essa massa estivesse submetida a uma força de atração central, exercida por outra massa M, força essa cuja intensidade fosse proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as duas massas e exercida ao longo da reta por elas determinada.

Em 1710, foram publicadas em Paris as demonstrações dessa proposição oferecidas por Hermann, por Johann Bernoulli e por Varignon. Os argumentos propostos por esses três investigadores foram, inicialmente, considerados como prova da superioridade do método de Leibniz relativamente ao método geométrico de Newton. Contudo, logo foi verificado que os três argumentos repousavam na proporção entre o elemento infinitesimal de área varrida pelo raio vetor e o intervalo de tempo despendido na varredura, dA = k.dt, e a única prova então conhecida dessa proporção era a prova, de caráter geométrico, dada pelo próprio Newton. Finalmente, no *Phoronomia*, Hermann exibiu uma prova da citada proporção que dependia apenas de diferenciais. [GUICCIARDINI 1996:170-174]

Esse episódio concorreu para que se escolhesse **a linguagem através da qual se deveria instituir o diálogo com a Natureza**, preconizado por Galilei. Durante o interstício em que vivera Newton, ainda não havia uma opinião consensual acerca do modo pelo qual deveria ser matematizada a ciência do movimento mas, na terceira década do século XVIII, graças ao trabalho dos dois irmãos Bernoulli, de Varignon e de Hermann, tornou-se dominante **a opinião de que as equações diferenciais fossem a linguagem apropriada à dinâmica**. [GUICCIARDINI 2003:407-408]

Esse talvez seja o primeiro exemplo notável de uma ferramenta matemática cujo emprego repercutiu vigorosamente sobre essa mesma ferramenta, reclamando o seu refinamento. De fato, na citada *Mechanica* (1734), Euler introduziu a noção de massa pontual e definiu a aceleração como uma grandeza cinemática associada ao movimento ao longo de qualquer trajetória. [TRUESDELL 1976:17] Ora, desde a publicação dos *Principia*, de Newton, se sabia que o único modo de se compararem forças consistia na comparação das mudanças nos movimentos produzidas pelas forças vertentes em intervalos iguais (e infinitesimais) de tempo. [BOS 1974:52]

Empregando-se a segunda lei de Newton, obtém-se a expressão $F = m.(d^2s/dt^2)$. Assim, a determinação da trajetória de uma massa pontual sujeita a uma força dada exige a integração de uma equação diferencial (de segunda ordem).

Constituiu-se, pois, ao lado da álgebra (que então se configurava na teoria das equações polinomiais), uma nova disciplina, **a teoria das equações diferenciais**, na qual, inicialmente, foram reunidas todas as técnicas inventadas para se resolverem tais equações, formuladas, sobretudo, no âmbito de dois domínios: a dinâmica (em virtude da segunda lei de Newton) e a geometria, consoante a narrativa seguinte.

2.14 A curvatura e outras noções geométricas

> "É um grande mistério que o cálculo infinitesimal seja uma fonte de tanta profundidade e de tanta beleza." [Shiing-Shen Chern] (35)

O emprego do cálculo infinitesimal desvelou diversos filões que, desde então, foram avidamente explorados.

Embora fosse antiquíssima a noção de linha curva, em oposição ao conceito de linha reta, a noção de curvatura somente foi claramente exposta por Newton (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1671) e por Leibniz (*Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi* ..., 1686).

Assim se pronunciou Leibniz:

> "Nos pedaços infinitamente pequenos de uma curva se podem considerar não apenas a direção ou a declividade (ou a inclinação), como se tem feito até agora, mas também a mudança da direção ou curvatura. E, assim como os geômetras têm medido a direção de uma curva mediante a linha mais simples, isto é, mediante a reta tangente, também assim eu meço a curvatura de uma curva mediante a linha mais simples que, no ponto considerado, apresenta não somente a mesma direção mas também a mesma curvatura, isto é, mediante o círculo que não apenas tangencia a dada curva mas que também a oscula, o que explico em seguida. [...] Digo que um círculo oscula uma curva, com a qual forma o menor ângulo de tangência [...], de modo que entre esse círculo e essa curva não se possa inserir nenhum outro arco de círculo." (36) [*Apud* GERICKE 1982:10-11]

Para apresentar essa noção, introduzamos, inicialmente, a ideia de um centro de curvatura associado a cada ponto de uma linha curva. Essa ideia decorre da analogia com a propriedade, exibida por um círculo, de que passa por seu centro a reta normal traçada por qualquer de seus pontos. (Equivalentemente, escolhidos dois quaisquer pontos P e Q sobre um círculo, as retas normais ao círculo que passam por esses dois pontos P e Q concorrem em um mesmo ponto C, independente da escolha dos pontos P e Q.)

Assim, dada uma linha curva planar Γ, descrita como o gráfico de uma função $y = f(x)$ que admite derivadas até a segunda ordem, escolhamos, ao longo de Γ, um ponto $P = (a, f(a))$ e um ponto $Q = (a + h, f(a + h))$. Em seguida, busquemos o ponto de concurso das retas normais à curva Γ, pelos pontos escolhidos. Essas duas retas normais podem representar-se, respectivamente, por $p(t) = (a + t.f'(a), f(a) - t)$ e $q(u) = (a+h + u.f'(a+h), f(a+h) - u)$. No ponto de concurso, vigora $0 = h + f'(a+h).\{f(a+h) - f(a)\} + t.\{f'(a+h) - f'(a)\}$. Fazendo o ponto Q aproximar-se do ponto P, obtemos $0 = 1 + \{f'(a)\}^2 + t_0.f''(a)$. Conceituemos, pois, o centro de curvatura da curva Γ no ponto P como o ponto $C = (a - f'(a).\{1 + [f'(a)]^2\}/f''(a), f(a) + \{1 + [f'(a)]^2\}/f''(a))$. Dessa fórmula decorre que uma curva não admite centro de curvatura em seus pontos de inflexão (fato esse bastante intuitivo). [Os pontos de inflexão foram primeiramente discutidos por De Sluse (1668) e Fermat (1679), consoante STRUIK 1933:95.]

E o raio de curvatura da curva Γ no ponto P será definido como a distância entre o ponto P e o centro de curvatura da curva Γ nesse ponto.

Por outro lado, notando que, em um círculo, é constante a razão entre o comprimento de um qualquer arco e o ângulo que o subtende, definimos a curvatura média do arco da curva Γ, cujas extremidades são os pontos P e Q, como a razão, para o comprimento desse arco, do ângulo β formado pelas respectivas retas normais. Notando que esse ângulo β é congruente ao ângulo ψ formado pelas respectivas retas tangentes (denominado ângulo de contingência correspondente ao arco considerado), podemos introduzir a indicatriz tangencial como a função λ que a cada ponto p(t) da curva associa o vetor T(t), aplicado ao centro de um círculo cujo raio mede uma unidade, e notar que a curvatura média, correspondente ao arco cujas extremidades são (a, f(a)) e (a+h, f(a+h)), se exprime como a razão do $\arctan\{f'(a+h) - f'(a)\}$ para a integral $\int \sqrt{\{1 + f'(u)^2\}}.du$, estendida ao intervalo [a, a+h]. Definimos, em seguida, a curvatura de Γ no ponto P como o limite dessa curvatura média, quando o ponto Q se aproxima do ponto P: $f''(a)/\{1 + f'(a)^2\}^{(3/2)}$. (Assim, vemos que a curvatura da curva Γ no ponto P representa a taxa de variação da reta tangente, relativa ao comprimento do arco considerado.) Essa fórmula, aplicada a um ponto de inflexão, fornece uma curvatura nula e mostra que, nos outros pontos, o valor absoluto de sua curvatura coincide o inverso de seu raio de curvatura.

Resumidamente, a curvatura de uma curva planar corresponde à velocidade de rotação de sua reta tangente. [YAGLOM 1988:172]

Essas ideias permitiram definir-se o círculo osculador a uma curva Γ em um ponto P como o círculo que melhor aproxima essa curva Γ no ponto considerado. A locução 'círculo de osculação' ocorre no artigo citado (*Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*), no qual Leibniz supôs que esse círculo passasse por quatro pontos consecutivos de uma curva. Após uma advertência por Jacob Bernoulli (em 1692), Leibniz prontamente reconheceu ser suficiente considerar apenas três pontos. De fato, três pontos determinam tanto um plano quanto um círculo nesse plano. Mas a fórmula para cálculo do raio de curvatura aparece em um escrito de Johann Bernoulli (1691). [BOS 1974:36; EVES 1997:444; RUSSELL 1897:17; STRUIK 1933:96-97]

A descrição, mediante uma fórmula, da curvatura de uma curva permitiu dar um tratamento mais expedito à noção de evoluta de uma curva, com a qual Christian Huygens se defrontara, já em 1659. [GERICKE 1982:9] A evoluta de uma curva fora definida como o lugar de seus centros de curvatura.

Um segundo passo no estudo desse tema foi dado por Alexis Clairaut, ao publicar suas *Recherches sur les courbes à double courbure* (1731). Nesse livro, que inovava principalmente a geometria analítica, tratando dos fatos espaciais, as curvas não eram consideradas entes autônomos mas ocorriam como interseção de superfícies. Clairaut justificou o título do livro, dizendo haver chamado curvas como a hélice de curvas de dupla curvatura, por que essas curvas, em um certo sentido, participam da curvatura de duas outras curvas. (37) [STRUIK 1933:100-101]

Paralelamente à compreensão do conceito de curvatura, também se desenvolveu a noção de linhas geodésicas em uma superfície, definidas por Johann Bernoulli (1697) em uma carta a Leibniz, na qual figurava o seguinte problema: Dados dois pontos quaisquer sobre uma dada superfície, ligar esses dois pontos mediante uma trajetória de comprimento mínimo. Tal problema foi discutido pelos irmãos Bernoulli e, embora a equação de uma geodésica não figurasse nas publicações daquela época, Johann Bernoulli declarou, em carta a Leibniz e em carta a L'Hospital, havê-la encontrado. [STRUIK 1933:98; CHILOV 1975:424; NABONNAND 1995:160]

No ano segunte (1698), seu irmão Jakob Bernoulli mostrou que as geodésicas de um cilindro ou de um cone se aplicam sobre linhas retas, quando tais superfícies são desenvolvidas sobre um plano. [NABONNAND 1995:160]

O estudo das linhas geodésicas foi retomado por Euler e Clairaut. Euler (em 1732) redescobriu (ou descobriu) a equação diferencial das geodésicas e, no tratado *Mechanica sive motus scientia analytice* (1736), mostrou que, *na ausência de forças externas*, a trajetória descrita sobre uma superfície por um ponto é uma geodésica. [NABONNAND 1995:160]

Clairaut (em 1733) publicou um teorema sobre superfícies de revolução, segundo o qual, ao longo de uma linha geodésica Γ, é constante o produto $R.\sin\psi$, sendo R o raio do círculo paralelo que passa pelo ponto considerado e ψ o ângulo entre a curva Γ e o meridiano que passa pelo ponto considerado. [STRUIK 1933:101; STRUIK 1988:134]

Hoje em dia, preferimos dizer que, ao longo de uma linha geodésica Γ, é constante o produto $R.\cos\beta$, sendo R o raio do círculo paralelo que passa pelo ponto considerado e β o ângulo entre a curva Γ e esse paralelo. [DO CARMO 1976:256-257]

Clairaut teve o nome preservado em um tipo de equação diferencial, $y = x.(dy/dx) + f(dy/dx)$, que oferece um dos primeiros exemplos conhecidos (1752) de soluções singulares de uma equação diferencial, isto é, de funções que atendem a uma equação diferencial mas que não se incluem entre as funções descritas pela solução geral. [STRUIK 1987:128); BOYCE & DIPRIMA 1969:48-49; PISKUNOV 1974b:45-48]

Parece que o nome de *linha geodésica* foi introduzido por Laplace, no *Traité de Mécanique Céleste* (1799). Mas, ainda em 1827, Gauss usaria a locução 'linhas mais curtas', quando se referisse às geodésicas de uma superfície. [GAUSS 2005:23; NABONNAND 1995:160]

Consoante a narrativa anerior, a noção de curvatura conduziu a uma fórmula na qual figuravam derivadas de segunda ordem. Assim, tanto a pesquisa de evolutas de uma curva quanto a investigação das curvas geodésicas a uma superfície exigiram a resolução de equações diferenciais (de segunda ordem).

Assim, os problemas decorrentes do emprego do novo método conduziram ao seu amadurecimento, permitindo fosse ele aplicado a situações que advieram ou que foram criadas mediante investigações que somente se puderam efetuar mediante esse mesmo

método. Parodiando BACHELARD [1978:58], podemos dizer que o cálculo infinitesimal criou o seu próprio objeto de estudo, a teoria das funções, "assim como o microscópio criou a microbiologia".

2.15 A maturescência do cálculo infinitesimal

> "[...] no interstício de 1650 a 1750, a análise infinitesimal emancipou-se gradualmente em uma disciplina matemática separada, independente das imagens geométricas de coordenadas, curvas, quadraturas e tangentes e dotada de seus objetos específicos, quais sejam, expressões analíticas e, posteriormente, funções. Esse processo de emancipação, que se pode denominar a degeometrização da análise, constituiu a dinâmica principal no interior da área de atividades matemáticas em torno da investigação de curvas através da análise finita e infinitesimal." (38) [Henk BOS]

Foi comentado, na seção sobre *a emergência do conceito de função*, haverem as funções, inicialmente, sido descritas por tabelas e, logo, por fórmulas nas quais, primeiramente, se combinavam polinômios mediante as operações então usuais (adição, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). Depois, essas operações foram estendidas às séries de potências e às funções transcendentes então conhecidas (o logaritmo, as funções circulares e as correspondentes funções inversas). A invenção das equações diferenciais e dos métodos de resolução conduziu a uma ampliação do conceito de função: Funções seriam objetos que satisfizessem a equações diferenciais.

Com efeito, a resolução de equações diferenciais suscitadas por problemas da dinâmica ou da geometria conduziu a uma infinidade de funções nunca dantes imaginadas, cuja existência era certificada pelo contexto descrito pela equação vertente. Aliás, talvez nem se cogitasse do quesito da existência de funções. (A esse respeito, leia-se o antepenúltimo parágrafo da seção *As provas de existência*, no capítulo oitavo.)

Predominava, nas primeiras décadas do século XVII (interstício no qual foram operantes Clairaut, Euler e d'Alembert), uma quase irrestrita confiança na autonomia dos símbolos algébricos. "Às vezes, parece haver sido aceito que, se se pudesse escrever uma fórmula que fosse coerente simbolicamente, estivesse assegurada a veracidade da sentença. E tal admissão não se referia apenas a fórmulas finitas. Os métodos finitos se estendiam rotineiramente aos processos infinitos. Muitos fatos importantes acerca das séries de potências foram descobertos, tratando-as como polinômios muito longos." (39) [GRABINER 1974:356]

Talvez essa confiança decorresse do bom êxito a que a linguagem simbólica tinha conduzido, desde a obra de Viète. De fato, antes da edição de *In artem analyticam isagoge*

(1591), os poucos símbolos usados eram mera abreviação de expressões da linguagem corrente enquanto na *Géométrie* (1637) de Descartes já se reconhece um sistema de símbolos próximo ao praticado hoje. Daí em diante, a manipulação de símbolos tornou-se uma prática usual tanto na construção de argumentos quanto na investigação. [LARVOR 2007:122]

Desde cedo se revelou o poder da notação simbólica na investigação algébrica. Por exemplo, a igualdade simbólica $(x - a).(x - b).(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$ permite perceberem-se fatos que não seriam vistos através de dúzias de exemplos numéricos, como a relação entre as raízes e os coeficientes de um polinômio. Permite também induzirem-se certos fatos, como o asserto de que uma equação polinomial de grau n admita exatamente n raízes, feito por Albert Girard (1629), primeira formulação do que Carl Gauss denominaria teorema fundamental da álgebra. [GRABINER 1974:357]

Não é difícil imaginar (embora isso talvez não esteja devidamente documentado) como pode haver nascido essa suposta confiança na autonomia da linguagem simbólica usada na álgebra. De fato, podemos imaginar que as citadas extensões se operassem, inicialmente, mediante propriedades operatórias; depois, por ajustes conceituais. Assim, por exemplo, o cubo de um número x escrevia-se, inicialmente, como xxx. Parece natural que, depois de se haver substituído essa notação enfadonha pela notação mais expedita x^3, se indagasse acerca do significado de x^s, sendo s um número inicialmente negativo, depois racional e, finalmente complexo. [Cf. LARVOR 2007:124; CARTIER 2000:4]

E, nesse contexto, se praticaria, inicialmente, o que, ulteriormente, seria nomeado 'princípio da permanência das leis formais' ou 'princípio das formas equivalentes' (cf. capítulo quarto), isto é, se atribuíriam a cada símbolo as propriedades de que esse símbolo gozava em situações já conhecidas. Atribuir-se-ia, depois, às potências de expoente negativo um significado que fosse compatível com a noção de que esse símbolo era originalmente revestido. Dentre os significados que atendessem a essa exigência, a escolha poderia recair sobre qualquer um deles, consoante a perspicácia do investigador. Explicitamente, na primeira fase, como $5^4/5^2 = 5^{4-2}$, supor-se-ia, também, que $5^2/5^4 = 5^{2-4}$, o que permitiria, na segunda fase, definir 5^{-2} como $1/5^2$.

Um aspecto deve ser enfatizado. Em diversos casos, a prática sintática precedeu a atribuição semântica. [Cf. LARVOR 2007:124] Isso ocorreu, por exemplo, no estudo das raízes de polinômios de terceiro grau. As fórmulas que exprimem tais raízes em função dos coeficientes do polinômio considerado fornecem, às vezes, o símbolo $\sqrt{-1}$. Embora desde Rafael Bombelli, em 1572, se calculasse correntemente com esse símbolo, somente de 1797 em diante, se logrou atribuir-lhe um significado aceitável (cf. o capítulo sexto). Podemos, pois, dizer que, nessa questão, prevaleceu, "*avant la lettre*", uma atitude pragmática. [STRUIK 1987:85; PARSHALL 1985:227]

Essa mesma atitude pragmática presidiu a manipulação das séries de potências. Se as fórmulas algébricas eram válidas, por consistirem em extensões de fórmulas numéricas igualmente válidas, também seria válido o cálculo com séries infinitas de funções, pois

configurava a extensão às funções do cálculo com séries numéricas infinitas. [GRABINER 1974:357]

Mas, nesse contexto o processo evolutivo foi mais rico e apresentou notáveis consequências semânticas. De fato, no cálculo infinitesimal, a *persona dramatis* eram objetos geométricos (como curvas e retas tangentes, no método de Leibniz, ou como curvas e velocidades, no método de Newton) e grandezas associadas (como o comprimento de um arco de curva ou a curvatura da curva em um ponto). E, assim como se usavam figuras na demonstração de propriedades geométricas, consoante a tradição grega, também assim se recorria a diagramas, quando se empregava o cálculo infinitesimal à geometria, à dinâmica ou a qualquer outro ramo do saber.

Mesmo assim, já em 1740, estudando a construção de trajetórias ortogonais a famílias de curvas, Euler considerou que a coincidência entre as derivadas parciais de segunda ordem, mistas, de funções de duas variáveis reais não fosse um fato de caráter geométrico e que, portanto, devesse ser provado por um argumento analítico, baseado na própria natureza da diferenciação. [FRASER 1989:319]

Além disso, houve também um afastamento progressivo de interpretação geométrica das técnicas usadas em diversas tentativas de integração de equações diferenciais. No tratamento de equações diferenciais parciais, por exemplo, Euler (em 1770), sem atentar a possíveis interpretações, considerou uma derivada parcial ($\partial z/\partial x$ ou $\partial z/\partial y$) como variável independente. [DEMIDOV 1982:329-330]

Esse mesmo recurso foi aproveitado por Euler na dedução da equação diferencial da função que minimiza um certo funcional, hoje denominada equação de Euler - Lagrange: $(d/dx)(\partial F/\partial y') - (\partial F/\partial y) = 0$. [HILDEBRAND 1965:123-125]

Concomitantemente, houve uma consciente recusa em se admitir que o cálculo infinitesimal fosse apenas uma técnica geométrica, como aparentemente pensaram os seus criadores. Enquanto para Leibniz o cálculo era uma '*ratio inveniendi*' de natureza geométrica, isto é, constituía um procedimento de descobrimento que se justificava enquanto referisse objetos geométricos, nas *Institutiones calculi differentialis* (1755), Euler recusou que a confirmação geométrica constituísse um critério de validade do cálculo: "[...] tudo está contido no âmbito da análise pura, de modo que nenhuma figura é necesssária para explicar as regras deste cálculo". [*Apud* FERRARO 2001:537, 545]

Mais precisamente, Euler não admitiu que a confirmação geométrica dos resultados obtidos mediante o cálculo infinitesimal constituísse a única prova da validade do cálculo e preferia considerar o cálculo como um sistema simbólico autônomo, no qual as provas fossem conduzidas pelo encadeamento de proposições.

Enquanto no segundo volume do *Treatise* de Maclaurin, cálculos efetuados mediante fluxões "não eram apresentados como manipulação cega de símbolos mas como uma linguagem dotada de significado que poderia sempre ser traduzida na nomenclatura do modelo cinemático-geométrico adotado no primeiro volume" [(40)], Euler entendia que as

funções correspondessem às curvas traçadas à mão livre e defendia que a realidade das diferenciais e das razões evanescentes fosse algébrica e não geométrica ou física: "A mesma expressão simbólica certificava a homogeneidade e a consistência dos entes algébricos representados." (41)

É surpreendente que, em 1748, apenas seis anos depois da publicação do *Treatise* de Maclaurin, Euler, na *Introductio in analysin infinitorum*, adotando desígnio e estilo inteiramente diferentes, definisse, classificasse e manipulasse funções de diversas variáveis, concebidas como "expressões simbólicas envolvendo quantidades variáveis e constantes". É no primeiro volume dessa obra que aparece a classificação de funções em pares e ímpares e a ênfase é conferida à expansão em séries de potências. No segundo volume, são feitas aplicações a temas geométricos, como o estudo das cúbicas, das quádricas, das assíntotas, da curvatura e das superfícies, de técnicas algorítmicas obtidas independentemente de interpretação. [GUICCIARDINI 2004:244]

Admira-nos a crença na consistência algébrica (que seria logo partilhada por Lagrange) pois, naquela época, ainda nem estava resolvida a disputação acerca dos números negativos, quanto mais a dos números imaginários. Com efeito, na *Encyclopédie* (cujo primeiro volume seria estampado em 1751), d'Alembert consignaria, no verbete 'négatif', que havia duas escolas de pensamento distintas: Uma delas aceitava a interpretação, dada por Euler, de que números negativos simplesmente eram quantidades menores que zero. A outra, sugerida pelo próprio d'Alembert, considerava que o sinal negativo afixado a uma grandeza indicava apenas que essa grandeza era tomada com orientação oposta à usual. D'Alembert negava cabalmente a existência "*real e absoluta*" de qualquer quantidade negativa insulada, sustentando que "*tomadas abstratamente, não apresentariam ideia alguma ao intelecto*". [DASTON 1986:271]

2.16 Novamente o conceito de função

> "No começo do século [XIX], a ideia de função era uma noção simultaneamente muito restrita e muito vaga. Com efeito, por um lado, as funções descontínuas e as funções que não admitiam derivadas ou eram desconhecidas ou eram consideradas como criações puramente artificiais, indignas da atenção do geômetra. Excluía-se, pois, da análise todo um domínio que, depois, lhe seria anexado. Por outro lado, os geômetras ficariam conturbados, se lhe fosse pedido que enunciassem, de modo claro e preciso, as condições necessárias e suficientes para se conferir a uma função o direito de cidadania. A fronteira entre as funções analíticas e as outras estava longe de ser completamente delineada. Na realidade, como por herança recebida dos fundadores do cálculo infinitesimal, preocupados inicialmente com as

> aplicações, reportávamo-nos inconscientemente ao modelo fornecido pelas funções consideradas na mecânica e rejeitávamos tudo que se afastasse desse modelo. Não éramos guiados por uma definição clara e rigorosa mas por um tipo de intuição e de instinto obscuro." (42) [POINCARÉ 1898:4-5]

Para melhor se evidenciar a evolução gradual dos conceitos associados ao cálculo, notemos que, em um dos textos fundadores do novo método, a *Analyse des infiniments petits* (1696), l'Hôpital escreveu que "variáveis são quantidades que crescem ou decrescem continuamente enquanto constantes são as quantidades que permanecem as mesmas, enquanto as outras variam"; e que, após um século, no *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797), Lacroix confirmou que "variáveis são quantidades que mudam de valor ou que são capazes de fazê-lo, ao passo que constantes são as quantidades que sempre mantêm o valor durante o cálculo". [FERRARO 2001:539-540]

Mas, durante esse interstício, o termo quantidade teve a sua compreensão significativamente ampliada. Para l'Hôpital, as quantidades eram grandezas associadas a pontos de curvas, tais quais a abscissa, a ordenada, o segmento de subtangente, o segmento de subnormal, as coordenadas do centro de gravidade de um arco de curva planar, a área da superfície gerada pela revolução desse arco (em torno de um eixo situado no plano que contém tal arco) e o volume do corpo circunscrito por tal superfície. As relações entre essas variáveis eram expressas, sempre que o pudessem, por meio de equações. Mas isso nem sempre era possível, pois ainda não se conheciam fórmulas para as relações transcendentes que se exprimiam, basicamente, descrevendo-se os métodos de construção (geométrica) das curvas que as representassem. [BOS 1974:5]

A introdução de expressões que contivessem operações transcendentes ocorreu lentamente. Johann Bernoulli expandiu em série de Taylor a função exponencial e Euler obteve as expansões das funções circulares e de suas inversas. [EULER 1948, cap. 7; FERRARO 2001:548]

Também nesse ínterim, o termo 'função' sofreu modificação semântica, perceptível na definição dada, em 1718, por Johann Bernoulli, na qual já não se alude a noções geométricas: "Aqui se chama *função de uma grandeza variável* a uma quantidade composta, de qualquer modo possível, dessa grandeza variável e de constantes." (43) [BOS 1974:10]

Essa conceituação foi aceita, em linhas gerais, por seu insigne aluno Euler (a quem considerou o príncipe dos matemáticos), que assim se pronunciou, em 1748: "Portanto uma função é uma expressão analítica de uma quantidade variável, expressão essa composta, por qualquer modo, da mesma quantidade variável e de números ou de quantidades constantes." (44) [GRAY 2008C:1; GUICCIARDINI 2004:242]

Nessa mesma obra, Euler definira a variável como "uma indeterminada ou uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados". E acrescentou que, "do mesmo modo que as ideias de espécie e de gênero se formam da ideia de indivíduos, a quantidade variável é o gênero que abrange todas as quantidades determinadas". [FERRARO 2001:541]

Nota-se, contudo, uma diferença entre as duas definições. Enquanto Johann Bernoulli apenas referia 'quantidades compostas, seja qual for o modo', Euler exigiu que as funções fossem 'expressões analíticas' de tais 'quantidades compostas', talvez desejando deslocar a ênfase para o aspecto técnico da expressão.

O acento sobre *a expressão* também se encontra na definição (aliás, mal redigida), proposta por Joseph-Louis Lagrange (1813), de funções de diversas variáveis: "O termo função de uma ou de mais quantidades deve ser atribuído a toda expressão de cálculo na qual tais quantidades figurem e estejam aptas a assumir todos os valores possíveis, podendo ocorrer outras quantidades, dadas ou tidas por constantes." Pouco adiante, o mesmo autor exige que tal expressão represente *uma lei de variação*: "Em geral, pelos símbolos f ou F, antepostos ao símbolo de uma variável, denotamos uma função dessa variável, isto é, uma quantidade dependente dessa variável e que varie de acordo com essa variável conforme uma dada lei." [FERRARO 2001:547]

A insistência e o vacilamento visíveis nas tentativas de conceituação feitas por Lagrange talvez ainda reflitam a discordância anteriormente manifesta em um episódio notável, cujo início pode ser datado de 1727, quando Johann Bernoulli efetuou o experimento mental [*Gedankenexperiment*] de colocar n massas punctiformes iguais, igualmente espaçadas, ao longo de uma corda imponderável, esticada horizontalmente. Se for levemente perturbada, tal corda começará a vibrar, a fim de retornar ao estado de equilíbrio. Uma vibração é denominada fundamental, se todos os pontos do sistema passarem simultaneamente pela posição de equilíbrio; e a frequência de uma tal vibração também é nomeada fundamental. Johann Bernoulli conseguiu encontrar as frequências fundamentais associadas a certos valores pequenos de n. [ARNOLD 1983; LUZIN 1998A:60]

Pouco depois (entre 1732 e 1736), Daniel Bernoulli (filho de Johann Bernoulli) e Euler (que era colega desse Daniel) enfrentaram o problema de determinar as frequências fundamentais de uma corda imponderável vertical, suspensa por uma das extremidades e capaz de oscilar, na qual se fixaram n partículas materiais, dotadas do mesmo peso e igualmente espaçadas. Mas nesses problemas, Daniel Bernoulli e Euler investigavam apenas as vibrações fundamentais. Sempre que a força dependesse apenas da posição da partícula, a vibração fundamental seria harmônica, isto é, o deslocamento da k-ésima partícula se exprimiria por $y_k = f_k.\cos(at)$, na qual f_k seria específica de cada partícula mas todas as partículas teriam o mesmo período $T = 2\pi/a$. Uma hipótese, porém, viciava as soluções encontradas. Já em 1726, o compositor (e teórico musical) Jean-Philippe Rameau observara que os instrumentos musicais produzem outras vibrações além das fundamentais. Mas Daniel Bernoulli considerava que essas vibrações compostas tendiam rapidamente a uma

vibração fundamental, por causa da dispersão de energia (provocada pela fricção e pela resistência do ar) e transpunha esse fenômeno às equações diferenciais formuladas. [LUZIN 1998A:60]

Enquanto Daniel Bernoulli e Euler obtinham diversas vibrações fundamentais para uma corda vibrante, d'Alembert (1747) alcançou uma solução quase exaustiva desse problema. Iniciando pela hipótese de que $\partial^2 y/\partial t^2 = \partial^2 y/\partial x^2$, d'Alembert chegou à equação $y = \psi(t + x) + \zeta(t - x)$, a que chamou **solução geral**. No caso em que a corda, fixada nos pontos $x = 0$ e $x = L$ do eixo das abscissas, passasse pela posição de equilíbrio (o eixo das abscissas) no instante $t = 0$, essa solução geral se converteria na expressão $y = \psi(t + x) - \psi(t - x)$, na qual ψ designa uma função periódica par de período 2L. [[LUZIN 1998A:62]

No ano seguinte (1748), Euler retoma esse problema da corda vibrante e conclui que, se no instante inicial ($t = 0$), for nula a sua velocidade ($v_0 = 0$) e sua forma for descrita como $y = f(x)$, então a solução geral será $y = (1/2)f(x + t) + (1/2)f(x - t)$.

À primeira vista, parece que a solução de d'Alembert e a de Euler coincidiam essencialmente, diferindo em aspectos menos relevantes. Contudo, ocorre entre as duas soluções uma distinção semântica. Concordaram esses geômetras em que o vocábulo 'equação' designasse a igualdade entre duas expressões analíticas e concordaram também em que fossem iguais duas expressões analíticas que assumissem os mesmos valores em todos os pontos de um intervalo. Porém discordaram quanto ao significado do termo 'função', entendendo d'Alembert que esse termo designasse qualquer expressão analítica enquanto Euler defendia que ele correspondesse a uma qualquer curva desenhada à mão livre: "*curva quaecumque libero manus ductu descripta*." [LUZIN 1998A:63; STRUIK 1987:158]

D'Alembert apontou inconsistência na interpretação dada por Euler ao vocábulo 'função': "Não se pode imaginar uma expressão mais geral de uma quantidade y que supor seja ela função de x e t. E, nesse caso, o problema da corda vibrante terá uma solução, somente se as diferentes formas da corda estiverem descritas pela mesma função." E concluiu que as soluções propostas por ele e por Euler serão consistentes com o problema, somente se a função f dada for periódica. Euler retrucou, indagando: "Se devemos considerar deficiente a solução obtida nos casos especiais em que a forma da corda não puder ser descrita por uma única função, que deveremos entender, em tais casos, por uma solução?" E insistiu em que a sua solução fosse correta, independentemente da forma inicial da corda, e que as partes distintas da curva inicial podem não estar vinculadas, mediante uma única equação, mas estarão vinculadas por sua descrição e que o conhecimento da curva geométrica é inteiramente suficiente ao conhecimento do movimento vibratório, sem haver necessidade de computação. Na tréplica, d'Alembert apontou que a hipótese adotada de que seja $\partial^2 y/\partial t^2 = \partial^2 y/\partial x^2$ exige que $\partial^2 y/\partial x^2$ tenha um valor definido (finito); logo, também deverá ser definida, em todos os pontos da curva a sua curvatura. Isso se aplica, especialmente, às extremidades da corda, nas quais $\partial^2 y/\partial x^2 = 0$ e o correspondente raio de curvatura será infinito. E, nos pontos angulosos (dotados de duas retas tangentes), a força

(calculada via a aceleração) será indeterminada e, consequentemente, o movimento será impossível. [LUZIN 1998A:63]

Por seu lado, Daniel Bernoulli, convencido por seus experimentos acústicos de que a corda vibrante apresentasse uma infinidade de vibrações fundamentais, sugeriu, em 1753, que o movimento mais geral de uma corda vibrante poderia ser descrito pela composição de vibrações fundamentais, indicando uma expressão que inclui tanto a solução de Euler quanto a de d'Alembert: $y = c_1.\sin x.\cos t + c_2.\sin 2x.\cos 2t + c_3.\sin 3x.\cos 3t + ...$

Euler reagiu, apontando que Daniel Bernoulli não percebera uma consequência inaceitável, implícita em sua solução: O fato de que uma qualquer função arbitrária da variável x fosse representável mediante uma série em cujos termos figurassem senos de arcos múltiplos, série essa que corresponderia a uma função ímpar e periódica. (Aqui Euler talvez estivesse apoiando-se no princípio de que fossem idênticas em toda parte duas expressões analíticas que assumissem os mesmos valores numéricos em um dado intervalo.)

Daniel Bernoulli replicou, notando que, na expressão por ele proposta, figura um infinidade de coeficientes c_h, suficientes para fazer com que a curva passe por uma infinidade de pontos dados, obtendo-se assim uma aproximação arbitrariamente próxima.

Por sua vez, d'Alembert afirmou que seria muitíssimo difícil, senão impossível, atender a uma condição de coincidência em uma infinidade de pontos, que nem toda função periódica poderia ser representada por uma séries de senos e que toda função representável por tal série teria necessariamente curvatura contínua. [LUZIN 1998A:63-64]

A essa altura, entrou na cena outra figura que, inicialmente, quisera dar suporte à posição de Euler. Lagrange iniciou pela apresentação do problema de interpolação. Tomou uma curva Γ de Euler (isto é, qualquer curva desenhada à mão livre em uma folha de papel), dividiu em um número finito de intervalos de igual longitude o intervalo correspondente no eixo das abscissas, tomou retas ortogonais ao eixo vertente pelas extremidades dos subintervalos, obtendo como interseções com a curva Γ um número finito de pontos sobre essa curva. Em seguida, Lagrange determinou um 'polinômio circular', isto é, uma expressão do tipo $y = c_1.\sin x.\cos t + c_2.\sin 2x.\cos 2t + c_3.\sin 3x.\cos 3t + ... + c_h.\sin(hx).\cos(ht)$, que seria aceito pelo próprio d'Alembert como uma expressão analítica simples.

Em seguida, Lagrange supôs que h crescesse muitíssimo ($h \to \infty$) e obteve a solução proposta por Euler, comentando que "fosse uma pena ser insustentável uma teoria tão astuta" (como a sugerida por Daniel Bernouli). Mas o método de Lagrange foi duramente reprovado por d'Alembert, que não aceitava a operação com séries divergentes. Lagrange, bastante pragmático, respondeu-lhe que, "tanto quanto ele soubesse, até então ninguém havia cometido erros, por ter substituído a série $1 + x + x^2 + x^3 + ...$ pela fórmula $1/(1 - x)$". Mas d'Alembert, subsequentemente, forçou Lagrange a admitir que sua solução supunha tacitamente a existência e a finitude das derivadas de todas as ordens, fato esse que,

consoante a opinião então prevalente, assegurava poder expandir-se tal solução em série de Taylor. [LUZIN 1998A:65]

Retrospectivamente, percebemos que, nessa discussão, havia pontos cruciais inicialmente não identificados, como as condições sob as quais fosse lícito tomar limites ($h \to \infty$), permutar a ordem de integração, derivação e passagem ao limite, operar com séries divergentes; as condições a que convergisse a série de Taylor associada a uma função infinitamente diferenciável; e a distinção entre uma função e sua representação analítica. [LUZIN 1998A:65]

Embora seja extremamente difícil, pela ausência de uma caracterização clara e inequívoca dos termos usados na polêmica, pronunciar um julgamento sobre as opiniões de cada um dentre os matemáticos referidos, a evolução posterior daria razão a Daniel Bernoulli, quando Joseph Fourier (1807) refutou parcialmente a opinião de d'Alembert, mostrando como se calculam os coeficientes que figuram na série $a_0/2 + \Sigma\{(a_h.\cos(hx) + b_h.\sin(hx)\}$, para $1 \leq h < \infty$, por ele proposta para representar uma função f, escolhida arbitrariamente. Tais coeficientes (hoje denominados coeficientes de Fourier), calculam-se mediante as fórmulas:

$a_h = (1/\pi)\int f(u).\cos(hu).du$, $u \in [0 , 2\pi]$ e $b_h = (1/\pi)\int f(u).\sin(hu).du$, para $u \in [0 , 2\pi]$. [LUZIN 1998A:65-67]

É claro que a opinião de d'Alembert não foi totalmente refutada, pois Fourier não mostrou que suas séries convergiriam. (Isso somente seria definitivamente resolvido por Dirichlet, desde 1828.) E, muito menos, Fourier não discutiu a existência das integrais que fornecem os citados coeficientes. (A primeira demonstração correta da existência de integral de uma função contínua seria dada por Gaston Darboux, em 1875.) [CHILOV 1973A:339]

Ainda assim, a proposição de Fourier causou forte turbulência intelectual, pois, até então, todos pensavam que uma expressão analítica representasse apenas curvas cujas partes dependessem uma da outra. Às curvas cujas partes exibissem essa dependência Euler chamava **funções contínuas**, em uma acepção bastante diferente do conceito posteriormente aceito. [Cf. o terceiro exemplo do capítulo sétimo.] E, na teoria das funções analíticas (1797), sob a influência da concepção euleriana de continuidade, Lagrange tentou mostrar que toda função contínua pudesse ser representada por uma série de Taylor, vinculando talvez o comportamento de toda a curva ao comportamento de um pequeno arco dessa curva. Fourier mostrou, então, que tal expectativa era fútil pois, ao traçarmos uma curva arbitrária (à mão livre, como queria Euler), ser-nos-á permitido, a qualquer instante, mudar o seu curso. Porém, desenhada essa tal curva, ela poderá ser representada por uma simples expressão analítica. Isso sugeriu que, paradoxalmente, não existe nenhum vínculo orgânico entre segmentos de uma mesma reta ou entre arcos de um mesmo círculo, pois por uma série de Fourier se poderia representar uma curva contínua que consistisse de segmentos de retas distintas e de arcos de círculos distintos. Embora algumas vozes tímidas lembrassem que as equações que definem uma reta ou um círculo era mais simples que uma série de Fourier, logo ficou patente que esse critério de simplicidade era inútil, pois exigiria

que nos restringíssemos apenas a operar com funções algébricas, rejeitando o uso das séries. [LUZIN 1998A:67]

O descobrimento das séries de Fourier mostrou que quase toda a polêmica acerca do problema da corda vibrante procedia da identificação entre **o conceito de função** e **o conceito de sua representação analítica**. Na verdade, antes do estudos de Fourier, a ideia de função e a ideia de representação analítica não se distinguiam. Feita essa distinção, os esforços foram conduzidos em duas direções. De um lado, colocaram-se os problemas nos quais se desejava manter um vínculo orgânico entre as partes de uma curva e criou-se **a teoria das funções de uma variável complexa**, cujo principal arquiteto seria Karl Weierstrass.

A distinção entre esses dois conceitos foi a nascente de duas correntes de estudos. O prospecto dessa corrente era a separação completa entre os dois conceitos citados. Do outro lado, estudaram-se as expressões analíticas e a sua convergência, enfatizando-se a sua única propriedade: a sua determinabilidade.

Desse estudo nasceu a definição de função real de variável real, proposta por Dirichlet (em 1837): "y é uma função da variável x, definida no intervalo $a < x < b$, se a todo valor da variável x nesse intervalo corresponder um valor definido da variável y, sendo irrelevante o modo consoante o qual essa correspondência é instituída". [LUZIN 1998B:263-264; O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Dirichlet.]

Note-se que, já em 1810, Lacroix propusera (no *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*) a seguinte definição de função de diversas variáveis: "Toda quantidade cujo valor depende de uma ou de diversas outras quantidades é dita função dessas últimas, quer se saibam quer se ignorem as operações que devem atuar, a fim de se passar dessas outras quantidades para a primeira." (45)

A um leitor nosso contemporâneo talvez essa definição pareça distinguir-se da conceituação dada por Dirichlet, apenas por Lacroix enfatizar o aspecto cognitivo enquanto Dirichlet acentuar a correspondência entre as duas variáveis. Note-se, contudo, que, ao acentuar tal correspondência, Dirichlet não invoca nenhum procedimento operatório que permita instituí-la. Assim, Dirichlet nos conduziu às fronteiras do que poderia ser conceituado como função (de uma variável real) e ele próprio, em 1828, dera o exemplo de uma função cujo gráfico não pode ser desenhado à mão livre, como quisera Euler. Exemplos dessa natureza podem ser construídos até no contexto funcional $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, considerado como espaço métrico (sendo a distância definida mediante o valor absoluto). De fato, sejam $\mathbb{A} = \{m/3^n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ e $f(x) = x$, se $x \in \mathbb{A}$; $f(x) = -x$, se $x \notin \mathbb{A}$. É fácil mostrar que tal função somente é contínua no ponto 0 (segundo o conceito hodierno de continuidade). É fácil perceber-se que exemplos dessa natureza podem ser multiplicados, considerando-se a decomposição de $\mathbb{Q}$ (ou de $\mathbb{R}$) em duas partes densas.

Talvez por não exigir que se explicitasse o processo mediante o qual se instituiria a correspondência entre as duas variáveis, a reação da comunidade à nova definição de função

tenha sido variada: Alguns a consideraram perfeita, outros a tiveram por muito ampla e ainda outros a pensaram como destituída de qualquer significado. [LUZIN 1998B:263]

Também Nikolai Lobachevski aduzira uma definição bastante ampla de função *contínua*, no artigo *Acerca da convergência das séries trigonométricas* (1834): "Um conceito geral exige que chamemos função de x a um número que é dado para cada valor de x e que varia *gradualmente* com x. O valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica ou por uma condição que permita verificarem-se todos os números e escolher-se um dentre eles ou, finalmente, tal dependência pode existir mas permanecer desconhecida." [*Apud* YOUSCHKEVITCH 1976:77; cf. LAURIENTIEV & NIKOLSKI 1973:108]

É oportuno indicar que, ao longo de todo essa fase na qual o conceito de função adquiriu autonomia, libertando-se de sua origem geométrica, não parece haver ocorrido aos pesquisadores a menor hesitação em submeter as funções às *operações* tradicionais. Assim, somavam-se e multiplicavam-se funções e os resultados de tais operações eram o objeto tanto da derivação quanto da integração. E se, desde Leibniz foi acentuado o comportamento distintivo do produto de funções (cuja derivada se exprimia através da soma de duas parcelas e cuja integral se sujeitava ao método da *integração por partes*), cedo se percebeu a propriedade depois denominada *linearidade*: Denotando por f e g funções e por s um escalar (ou, como se dizia, uma constante numérica), a forma da expressão $f(t) + sg(t)$ se preservava, tanto na derivação, $f'(t) + sg'(t)$, quanto na integração, $\int f(t)dt + s.\int g(t)dt$, fato que é resumido, hoje em dia, dizendo-se que a derivação e a integração são *transformações lineares*.

No labor frequente de se resolverem equações diferenciais, cedo se percebeu que as soluções das equações lineares e homogêneas se sujeitavam à mesma regra: "Que uma combinação linear de soluções de uma equação ou de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneas seja também uma solução, que se obtenha a solução geral da equação completa, somando-se à solução geral da equação homogênea uma solução particular, eram resultados conhecidos, havia muito tempo." [DORIER 1996:268]

Assim, lentamente, começaram a impor-se as ideias estruturais. A ideia de transformação linear seria, ulteriormente, percebida como um homomorfismo entre espaços vetoriais. (No caso de tal transformação linear ser bijetiva, o homomorfismo é denominado *isomorfismo*.)

2.17 As imagens do cálculo e da matemática

> "É evidente que todas as ciências guardam uma relação, maior ou menor, com a natureza humana e que, por mais distante da natureza humana que qualquer uma dentre as ciências pareça desenvolver-se, elas ainda retornam por um ou outro caminho. Até a matemática, a filosofia natural e a religião natural dependem, de algum modo, da ciência do

humano, pois se subordinam à capacidade cognitiva humana e são julgadas por seus poderes e suas faculdades." (46) [David Hume, *Tratado da natureza humana*]

Em uma tentativa de caracterizar antropologicamente o conhecimento científico como um sistema cultural, Yehuda Elkana distinguiu entre dois tipos de sentenças associadas a uma mesma disciplina científica. O primeiro tipo de sentenças consiste nas proposições acerca do objeto da disciplina vertente; o segundo tipo de sentenças consiste nos juízos e nos discursos feitos acerca da citada disciplina. Desses dois tipos de sentenças (ou, como se prefere dizer, desses dois estratos) associados a cada conhecimento Elkana chamou ao primeiro *o corpo do conhecimento* e ao segundo *a imagem do conhecimento*. [CORRY 1989:411-412]

O corpo do conhecimento inclui teorias, fatos, métodos e problemas abertos. As imagens do conhecimento desempenham o papel de *seletores de problemas* para o corpo do conhecimento, pois orientam os pesquisadores na escolha dos problemas abertos que irão enfrentar, na decisão entre teorias emulantes, no reconhecimento dos experimento relevantes e na deliberação acerca de desacordos verificados no âmbito da disciplina. [CORRY 1993:106]

Aponta CORRY [1993:106] que nem sempre é pacífico distinguir entre as sentenças que compõem o corpo de um conhecimento e aquelas que lhe integram a imagem: "Claramente a teoria do movimento de Newton pertence ao corpo da física; trata-se de sentença acerca do movimento de corpos. A assertiva de que a teoria de Einstein é 'mais simples' que a teoria de Newton claramente pertence às imagens do conhecimento científico; trata-se de uma asserção acerca de teorias físicas e não de uma asserção acerca dos objetos físicos. Por outro lado, os teoremas de Gödel pertencem ao corpo da matemática; são resultados obtidos no âmbito de um ramo específico da disciplina. Todavia, também podem ser considerados um asserto (nesse caso, uma limitação intrínseca) acerca da matemática, a disciplina." (47)

Finalmente, impende acentuar que esses dois estratos de um qualquer corpo de conhecimento não têm existência independente mas atuam recíproca e organicamente. [CORRY 1993:106]

Talvez uma visão parcial da imagem da matemática na França, nos meados do século XVIII, se possa obter dos excertos seguintes da prefação ao *Traité de dynamique* (1743) de d'Alembert:

> "A certeza da matemática é uma preeminência que essa ciência deve principalmente à simplicidade de seu objeto." Constituem objeto da matemática "o cálculo das grandezas e das propriedades gerais da extensão, isto é, a álgebra, a geometria e a mecânica ... Quanto mais extenso for o objeto abrangido pela matemática, objeto esse considerado geral e abstratamente, tanto mais estarão seus princípios isentos de nebulosidade e tanto mais serão fáceis de se apreenderem." (48)

Essa concepção de d'Alembert prenuncia seus notáveis escritos, o *Discurso preliminar da Enciclopédia* (1751), o *Ensaio sobre os elementos de filosofia* (1759) e os *Esclarecimentos ao Ensaio sobre os elementos de filosofia* (1765), nos quais professou um tipo de sensualismo, que profundava o *Ensaio sobre o entendimento humano*, de Locke.

Está dito, tanto no *Discurso preliminar* quanto nos *Elementos*, que o primeiro conhecimento que devemos a nossas sensações é a consciência de existir; e que o segundo é a existência de objetos exteriores. Além disso, d'Alembert afirmou não existir "relação direta entre uma sensação e o objeto que a ocasiona" mas "o elo entre o real e o pensado" se fundamenta no mesmo *instinto* responsável pelo "poder de uma razão que se revela pela iluminação da evidência". Por outro lado, embora não possamos "transpor o fosso entre as impressões dos sentidos e a formação das ideias", podemos descrever "o processo mental de formação das *ideias simples gerais* que são os conceitos: é um processo de abstração, a partir da realidade material, por decomposição em noções simples das ideias complexas imediatamente propostas pelos sentidos". Tais abstrações resultam, pois, de um procedimento psíquico, pois "fora de nós existem realmente apenas seres particulares". [PATY 2005:170-171]

Contrapondo-se a Euler, d'Alembert negou a existência de quantidades atualmente infinitas, quer infinitamente grandes, quer infinitamente pequenas, por elas corresponderem apenas à ausência de delimitantes: "por inexistir em a natureza, a quantidade infinita está, propriamente falando, em nossas mentes e existe em nossas mentes apenas por um tipo de abstração que lhes extingue os delimitantes". Nos verbetes 'diferencial' e 'limite', da *Encyclopédie*, d'Alembert insistiu na necessidade de uma metafísica sadia para o cálculo, uma metafísica compatível com os dados experimentais (entendendo-se por essa locução um conjunto consistente de princípios subjacentes dos quais todo o cálculo pudesse ser deduzido). [DASTON 1986:270-271]

Causa surpresa que, às vezes, d'Alembert seja descrito como um fenomenalista radical, na acepção de que "tudo quanto vemos são apenas fenômenos sensuais; pois nada existe fora de nós que corresponda ao que cremos ver" (49)

De fato, na *Mélange de litérature, d'histoire et de philosophie* (1767, t. V, p. 249), d'Alembert escrevera que "[...] uma quantidade é alguma coisa ou não é nada. Se ela é alguma coisa, então ainda não se esvaeceu. Se não é nada, já se desvaneceu inteiramente." (50)

No capítulo IV, comentarei uma possível interpretação do conselho, supostamente dado por d'Alembert a um consulente inquieto, que lhe perguntava acerca da fundamentação do cálculo: "Prossiga que a crença o acometerá." (51)

A opinião externada por Euler de que a confirmação geométrica não constituísse um critério de validade do cálculo foi comungada também por Lagrange que, em um artigo de 1773, assim escreveu: "Espero que as soluções que proporei interessem aos geômetras tanto no que tange aos métodos quanto aos resultados. Estas soluções são puramente analíticas e podem ser entendidas sem figuras." [*Apud* FERRARO 2001:537-538]

E, no *Traité de Mécanique analytique* (1788), Lagrange declarou: "Neste trabalho, não se encontrarão figuras. Os métodos que exponho não requerem construções nem raciocínios geométricos ou mecânicos mas apenas operações algébricas, sujeitas a um curso regular e uniforme. Aqueles que amam a análise deliciar-se-ão em ver a mecânica se lhe tornar um novo ramo e ficar-me-ão gratos por eu lhe haver estendido o domínio." (52)

Para melhor contextuar as declarações de Lagrange, notemos que, também em 1773, na segunda edição da *Mélange de litérature*, d'Alembert afirmou que a geometria e a mecânica eram ciências 'materiais e sensíveis' e que a geometria, especialmente, era 'a ciência das propriedades da extensão'. Nesse aspecto, d'Alembert acordava com Euler, que assim se pronunciara, nas *Cartas a uma princesa alemã* (1770): "A extensão é o objeto próprio da geometria, que considera os corpos apenas enquanto entes extensos, abstraídas a impenetrabilidade e a inércia; o objeto de geometria, portanto, é uma noção muito mais geral que o conceito de corpo, pois ela compreende não somente os corpos porém todas as coisas simplesmente extensas, sem impenetrabilidade, se tais coisas existirem." [*Apud* FERRARO 2001:538; *apud* NAGEL 1939:145]

Mas, afirmava d'Alembert na *Mélange*, os princípios da análise 'eram baseados apenas em noções intelectuais, em ideias que conformamos por abstração, simplificação e extensão das ideias primárias'. [*Apud* FERRARO 2001:538]

Não se pense, porém, que, dessa forma, os autores contemporâneos a d'Alembert imaginassem o cálculo infinitesimal como uma teoria sintática, na acepção que hoje emprestamos a esse termo. Pelo contrário, na expressão de FERRARO [2001:551], "os objetos analíticos do cálculo não existiam em virtude de definições implícitas ou explícitas; não eram criação de nossa mente. Embora abstrato, o cálculo era considerado como um espelho da realidade; seus objetos eram idealizações derivadas do mundo físico e tinham existência intrínseca, independentemente de sua definição. As proposições matemáticas não eram apenas hipotéticas mas diziam respeito à realidade e eram verdadeiras ou falsas consoante correspondessem ou não aos fatos." (53)

De fato, d'Alembert declarou na *Mélange* (1773) que "o físico que ignore a matemática considera que as verdades da geometria estejam fundadas sobre hipóteses arbitrárias e que sejam simples jogos de espírito, carentes de quaisquer aplicações". [*Apud* FERRARO 2001:551]

Nada obstante, já em 1760, Euler havia avançado um pouco mais na visão sintática, ao propor a definição de soma de séries divergentes. Sua audácia é manifesta no excerto seguinte: "Portanto, se modificarmos a noção aceita de soma, de tal modo que digamos ser a soma de uma série uma expressão finita cuja expansão produz a série vertente, dissipar-se-ão naturalmente todas as dificuldades que, de outro modo, se apresentariam. Pois, se tal expressão conduzir por expansão a uma série convergente, o vocábulo 'soma' estará sendo tomado na acepção corrente; senão, não se poderá acoimar de absurda a busca de uma expressão finita cuja expansão, consoante as regras da análise, produzam a série (divergente)." (54)

Euler pôde justificar sua proposta, lembrando "parecer-lhe certo que nunca uma mesma série pudesse resultar da expansão de duas expressões finitas efetivamente distintas". (55)

2.18 Reflexões sobre a matemática

> "Desde os dias de Pitágoras e de Platão até os dias de Kant e de Herbart, as ciências matemáticas e, especialmente, a geometria desempenharam um papel tão importante nas discussões filosóficas como modelos de métodos e de cânones de certeza, que a filosofia não se pôde eximir de ser extremamente sensível a todas as mudanças e a todos os progressos que ocorreram nas visões dos matemáticos." (56)

A matemática tem constituído objeto da reflexão desde a Antiguidade. Dentre os filósofos que dela se ocuparam avultou Immanuel Kant, de cujas concepções ressaltarei apenas alguns aspectos mais relevantes è presente discussão.

Contudo, suas concepções filosóficas (como todas as concepções filosóficas ou científicas) são datadas, ainda que se pretendam eternas. Por isso, pode ser inadequado procurar compreendê-las de uma perspectiva hodierna ou de uma perspectiva fundada na assim denominada 'filosofia analítica'. Não surpreende, pois, que Bertrand Russell pudesse declarar, em 1917, que os avanços contemporâneos da Lógica houvessem desferido 'um golpe letal à filosofia kantiana' e que 'toda a doutrina das intuições *a priori*, mediante as quais Kant explicava a possibilidade da matemática pura, fosse inteiramente inaplicável à matemática em sua forma presente'. (57)

Após a divulgação da existência de outros sistemas geométricos distintos do euclidiano (também denominado parabólico), alguns pensadores apressaram-se em apontar que a concepção de Kant acerca da geometria estava definitivamente ultrapassada. Um exemplo típico dessa opinião é esposada por SCHILLER [1896].

Por outro lado, autores como WINTERBOURNE [1981] e, mais recentemente, HAGAR [2008] se têm esforçado por mostrar que a concepção geométrica de Kant não é incompatível com a existência de outros sistemas geométricos, antes até os supõe. Outros ainda, como FRIEBE [2008], examinaram a compatibilidade entre as concepções de Kant e a teoria especial da relatividade.

Esse quesito não será estudado agora, pois o escopo desta seção é apresentar uma descrição sumária de algumas opiniões que exerceriam forte influência nas décadas posteriores, talvez sobretudo por haverem provocado apaixonadas reações. Assim,

acentuemos a platitude de que Kant meditou sobre a imagem da matemática contemporânea que lhe era então oferecida.

A imagem então vigente dos aspectos elementares da matemática fora parcialmente plasmada pelo filósofo Christian Wolff que, já em 1710, escrevera os *Elementos de toda a ciência matemática* [*Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*], obra na qual defendera uma sistematização no ensino da aritmética na Alemanha [BULLYNCK 2009:53], e que, em 1720, redigira a prefação para a tradução alemã da correspondência epistolar entre Leibniz e Clarke (que já tinha sido publicada em Londres em 1717). [AHNERT 2004:473] A citada obra de 1710 teve duas edições em flamengo: a primeira em 1738-1739 e a segunda em 1758. [BECKERS 1999:238]

Ensina Thomas Ahnert que, após 1736, declinou, pelo menos na Prússia, a influência das ideias filosóficas de Wolff [AHNERT 2004:482] enquanto Katherine Dunlop afirma que, em torno de 1750, a cena filosófica alemã era dominada por essas ideias e que Wolff se jactava de haver introduzido o método matemático na filosofia. [DUNLOP 2009:48]

Esse asserto de DUNLOP causa alguma estranheza pois, nos *Elementa matheseos universae* (1741), Wolff censurou textualmente as tentativas de se usarem certas técnicas matemáticas em âmbitos distintos daqueles que lhes são próprios: "[...] como se as noções imaginárias, que são suficientes ao entendimento matemático da natureza e que nela se mostram fecundas, se revelassem úteis na filosofia primeira e na filosofia natural, como se dessas noções imaginárias se pudessem fazer ilações pertinentes à teologia natural e à cosmologia geral". (58)

Também nas *Investigações sobre o significado das proposições fundamentais da teologia natural e da moral* [*Untersuchungen über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral*, 1763], Kant se oporia às tentativas de se matematizar a filosofia *pela simples análise dos conceitos*, defendendo que "a matemática nada esclarece mediante a decomposição de um dado conceito mas mediante o vínculo arbitrário a um objeto, cuja ideia somente se torna possível exatamente por esse vínculo". (59)

E, na prefação à segunda edição da primeira *Kritik*, ao tratar da possibilidade de uma metafísica científica, Kant elogiou Christian Wolff por haver fornecido o exemplo de "como se atingir o progresso seguro de uma ciência somente pela instituição ordenada de princípios, a determinação clara de conceitos, a insistência de provas estritas e a evitação de passos não consecutivos e aleatórios nas inferências". [JONG 1997:148]

De qualquer modo, durante as três décadas que precederam a segunda edição da *Kritik der reinen Vernunft* (1787), Kant ministrou cursos, em nível secundário, de matemática e de física, para isso adotando textos escritos pelo filósofo Christian Wolff, entre os quais a obra, em diversos volumes, denominada *Bases de toda a ciência matemática* [Gründe aller mathematischen Wissenschaften], que versava sobre aritmética, geometria (incluída a trigonometria), álgebra, mecânica, óptica, astronomia e artilharia. Kant também recorreu à obra *Elementa matheseos universa*, do mesmo Wolff, que continha a 'análise finita' (aritmética e

álgebra) e 'análise infinita' (cálculos diferencial e integral). Esses textos representavam o estado contemporâneo dos aspectos elementares da matemática. Um dos escritos de Wolff fora vertido para a língua inglesa (já em 1739), sob o título "*A Treatise of Algebra; with the application of it to a variety of problems in arithmetic, to geometry, trigonometry, and conic sections. With the several methods of solving and constructing equations of the higher kind.*" — o que depõe em favor de sua aceitação didática. [SHABEL 1998:599]

Wolff considerava que a matemática fosse a ciência de tudo quanto pudesse ser medido; a aritmética, a ciência do número (enquanto ferramenta de enumeração); os números podiam ser homogêneos (como em 'dois globos de prata' e 'três globos de prata') ou heterogêneos (como em 'dois globos de prata' e 'dois globos de cobre'). Para evitar a heterogeneidade, o melhor procedimento consistia em exprimir os números mediante linhas retas. Em uma linha reta, escolhida uma unidade, todos os números (racionais ou irracionais) admitiriam representação. [SHABEL 1998:600]

A geometria do plano era a ciência das grandezas dotadas de extensão. Ela fornecia regras para se desenharem, medirem e compararem figuras construtíveis mediante régua e compasso. Os teoremas enunciavam as propriedades dos objetos construídos de acordo com as definições, os postulados e os teoremas. [SHABEL 1998:600-601]

Segundo Wolff, a análise ou 'arte analítica' era o método de se resolverem os diversos tipos de problemas. A análise finita encontraria 'desde algumas grandezas finitas conhecidas outras grandezas finitas ainda desconhecidas'. A álgebra era um tipo de análise finita, efetuada por meio de equações, que conduzia à solução de vários tipos de problemas aritméticos e geométricos. Um dos tópicos estudados era 'aplicação da álgebra à geometria', que tratava da 'construção de equações'. [SHABEL 1998:601]

O exame dos textos citados permite inferir que Wolff considerava a álgebra como um método de resolução de problemas mediante a representação de grandezas por símbolos e a manipulação simbólica dessas grandezas, isto é, o emprego de operações aritméticas sobre essas grandezas (operações essas também representadas simbolicamente). Todas essas grandezas, incluídas as quantidades numéricas, eram finalmente interpretadas relativamente a uma grandeza, arbitrária e previamente escolhida, considerada a unidade. [SHABEL 1998:607]

Os pronunciamentos de Kant acerca da matemática guardam alguma semelhança com a visão proposta por Wolff. Por exemplo, no verbete 'ratio' do *Mathematisches Lexikon* [1716:1170], Wolff refere a teoria das razões de Euclides como "a alma de toda a matemática". (60) E Kant, na *Teoria das Grandezas* [*Gröszenlehre*], considerava a aritmética universal ou álgebra como a doutrina das razões entre grandezas. [SUTHERLAND 2004:164]

Quanto à distinção entre o método matemático de pesquisa e o método filosófico de pesquisa, Kant ensinava que

"a filosofia se restringe aos conceitos gerais; a matemática nada pode obter apenas por conceitos mas recorre imediatamente à intuição, na qual ela considera o conceito *in concreto*, embora ainda não empiricamente mas somente em uma intuição que ela apresenta *a priori*, isto é, que ela construiu e no qual [conceito] tudo que decorre das condições gerais da construção é válido, em geral, para o objeto do conceito assim construído.

Suponhamos que a um filósofo seja dado o conceito de um triângulo e que lhe seja pedido que encontre, a seu modo, qual a relação que vigora entre a soma dos ângulos [internos] e um ângulo reto. O filósofo dispõe apenas do conceito de uma figura delimitada por três retas, que formam diversos ângulos. Por mais que medite acerca desses conceitos, o filósofo não obterá nada de novo. O filósofo poderá analisar e clarificar o conceito de uma linha reta ou o conceito de ângulo ou o conceito do número três mas ele não poderá jamais chegar a propriedades que já não estejam contidas nesses conceitos. Deixemos agora que o geômetra se ocupe dessa questão. Imediatamente, ele começará por construir um triângulo. Sabendo que a soma de dois ângulos retos é exatamente igual à soma de todos os ângulos adjacentes que se podem construir de um único ponto sobre uma reta, o geômetra prolongará um dos lados do triângulo e obterá dois ângulos adjacentes [um interno e o outro externo] que, juntos, perfarão dois ângulos retos. Em seguida, dividirá o ângulo externo, traçando uma paralela ao lado oposto do triângulo e observará que, assim, obteve um ângulo adjacente externo que é igual ao ângulo interno etc. Desse modo, mediante uma cadeia de inferências conduzidas pela intuição, o geômetra chegará a uma solução do problema que, simultaneamente, é evidente e geral." [*Disciplina da pura razão em seu emprego dogmático, Crítica da razão pura*, *apud* FRIEDMAN 1985:458]

Notemos, em seguida, que, após exemplificar apenas com a geometria, Kant propôs uma distinção entre a geometria e a álgebra, fundada na distinção entre dois tipos de grandezas, *quanta* e *quantitas*: *quanta* denota uma grandeza concreta, enquanto *quantitas* designa o seu aspecto abstrato. [SUTHERLAND 2004:165]

"[...] a matemática não apenas constrói magnitudes (*quanta*), como em geometria, mas também magnitudes puras (*quantitatem*), como na álgebra, na qual ela abstrai inteiramente da constituição do objeto que deverá ser pensado de acordo com tal conceito de magnitude. Nesse caso, a matemática escolhe uma certa notação para todas as construções de magnitudes em geral (números), bem como para adição, subtração, extração de raízes etc. e, após haver designado o conceito geral de quantidade de acordo com as diferentes relações, exibe todos os procedimentos através dos quais a magnitude é gerada e modificada de acordo com certas regras na intuição; onde uma magnitude tiver de ser dividida por outra, ela reúne os símbolos, de acordo com a forma da notação de divisão e, desse modo, obtém por uma construção simbólica o mesmo que a geometria consegue por uma construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objetos), o que a cognição discursiva jamais alcançaria mediante meros conceitos.

Até o procedimento que os algebristas adotam em suas equações, das quais, mediante redução, produzem a verdade conjuntamente com a prova, não constitui uma construção geométrica, mas ainda é uma construção característica, na qual se designam por símbolos os conceitos na intuição, especialmente as relações de quantidades e, sem mesmo considerar a heurística, se preservam todas as inferências de erros, colocando-se cada uma delas diante dos olhos." [*Crítica da razão pura*, *apud* SHABEL 1998:592]

Não há consenso entre os intérpretes quanto ao significado das locuções 'construção simbólica' e 'construção característica' que figuram no excerto citado, único no qual Kant trata da intuição em álgebra. No que tange à presente introdução, é suficiente indicar que a predileção de Kant pelos exemplos geométricos se pode explicar pela certeza que, naquela época, era atribuída aos juízos geométricos. Com efeito, embora as obras de Euler e Lagrange houvessem preparado "o caminho para a introdução do formalismo algébrico como a expressão privilegiada da razão matemática", "o fundamento da verdade e da *rigida demonstratio* (Euler) era ainda o 'ver claro e distinto' cartesiano e o que o formalismo algébrico abandonava era apenas a intuição geométrica como único fundamento do rigor." [SILVA 1989:44-45].

Por outro lado, embora estivessem convencidos do poder do cálculo infinitesimal, os matemáticos contemporâneos de Euler alimentavam receios acerca de sua consistência. Como naquela época fosse comum que as academias científicas oferecessem prêmios pela resolução de problemas relevantes e notáveis, em 1784, Lagrange propôs à Academia de Berlim que ela concedesse um prêmio por uma teoria rigorosa dos infinitésimos ou pela fundação consistente do cálculo. Do edital constou o seguinte excerto: "É um fato bem conhecido que a matemática superior usa quantidades infinitamente grandes e infinitamente pequenas. Não obstante, os geômetras e mesmo o antigos analistas evitaram cuidadosamente tudo que se assemelhe ao infinito; e alguns grandes analistas contemporâneos mantêm que sejam contraditórios os termos da locução *grandeza infinita*. Por isso, a Academia espera que se possa explicar como tantos teoremas verdadeiros foram deduzidos de uma suposição contraditória e que se possa esboçar um princípio que seja seguro e claro — em suma, matematicamente verdadeiro — que substitua apropriadamente *o infinito*." [DAUBEN 1988:182]

É possível que Lagrange quisesse obter no cálculo a mesma certeza que ele atribuía aos métodos algébricos e que, por isso, nenhum dos ensaios apresentados à Academia houvesse satisfeito à sua expectativa. Não obstante, dois dentre eles foram ampliados e publicados como livros: *Exposition élémentaire des principes du calculs supérieurs* (1786), de Simon l'Huilier e *Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal* (1797), de Lazare Carnot. [GRABINER 1983:189]

A *Exposition* de l'Huilier constitui um estudo refletido sobre o uso de limites. Nela foi introduzida a notação lim, para indicar limites, a qual, posteriormente, seria adotada por Augustin Cauchy. [GRATTAN-GUINNESS 1970:375, 383]

Nas *Réflexions*, Carnot indicou a principal dificuldade conceitual manifesta na noção de razões evanescentes, em uma citação do próprio Lagrange: "Esse método apresenta a impropriedade de considerar quantidades no estado em que, por assim dizer, deixam de ser quantidades. De fato, embora possamos conceber a razão entre duas quantidades, enquanto forem finitas, essa razão não oferece ao entendimento uma ideia clara e precisa, tão logo ambos os seus termos, concomitantemente, se tornam nulos." (61) [CAJORI 1915:148; STRUIK 1987:134]

E propôs, como solução, "eximir a análise infinitesimal da obrigação de dar prova direta de sua veracidade". (62)

Nesse mesmo ano (1797), na *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange elaborou sua definição de derivadas (de diversas ordens), baseado na álgebra das séries de Taylor, pretendendo evitar tanto as razões de 'grandezas evanescentes' de Newton quanto os limites de razões de d'Alembert. Lagrange verificou que, dados uma função f (hoje diríamos, dada uma função infinitamente diferenciável f), um ponto x de seu domínio e um incremento h_0 tal que $x + h_0$ esteja no domínio de f, existe um ponto $x + h_1$ ($x < x + h_1 < x + h_0$) tal, que $f(x + h_0) = f(x) + h_0.f'(x + h_1)$. Repetindo-se esse procedimento indefinidamente, obtém-se $f(x + h_0) = f(x) + h_0.f'(x) + h_0.h_1.f''(x) + h_0.h_1.h_2.f'''(x) + \ldots$. Supondo-se, agora, que h_0 seja muito pequeno e aproximando-se h_1 por $h_0/2$, h_2 por $h_0/3$ etc., obtêm-se a expansão de f em série de Taylor. [BECKERS 1999:225; CRAIK 1999:248]

As séries de Taylor eram usualmente geradas desde alguma definição de derivada de uma função. Lagrange inverteu o procedimento, supondo que as séries estivessem associadas a qualquer função e propôs definir f'(a) como o coeficiente do segundo termo da série, f''(a) como o dobro do coeficiente do terceiro termo da série etc. Embora desse modo evitasse argumentos com infinitésimos, Lagrange colocava outros problemas. Talvez o problema primário fosse demonstrar que efetivamente toda função admitisse uma expansão em série de Taylor e que, além disso, tal série convergisse para a função vertente. Foi no curso dessa tentativa de definir derivadas, que Lagrange obteve a expressão do resto de uma série de Taylor. [CRAIK 1999:248; GRABINER 2007:87-89; GRATTAN-GUINNESS 1970:375; RICHARDS 1991:310]

Disseminou-se na França, na Alemanha e até na Inglaterra essa busca pela fundamentação do cálculo diferencial, baseada na convicção de que a álgebra pudesse prover-lhe as bases. A crença nas séries de potências como meio de se definirem as derivadas das diversas ordens desapareceu logo depois da morte de Lagrange (em 1813), talvez em virtude da percepção de que nem toda função admitisse expansão em série convergente de potências em qualquer ponto de seu domínio. [BECKERS 1999:225, 235]

É compreensível que Kant houvesse enfatizado a geometria e discorrido sobre a intuição geométrica. Com efeito, "ao longo dos séculos XVII e XVIII, na guerra contra o empiricismo, a geometria permaneceu como uma fortaleza inexpugnável dos idealistas. Aqueles que sustentavam — como era geralmente afirmado no Continente — que fosse possível algum conhecimento, independente da experiência, acerca do mundo real tinham

apenas que apointar a geometria: Ninguém, salvo um insano, diziam eles, levantaria dúvida acerca de sua validade e ninguém, salvo um estulto, negaria sua referência objetiva." (63)

Aduzidas as considerações anteriores acerca da eficácia do cálculo infinitesimal e da sua carência de fundamentos sólidos, causa surpresa que, tanto quanto eu saiba, Kant houvesse guardado total reticência acerca dos quesitos fundacionais do cálculo, tema esse que já se tinha imposto aos filósofos desde a crítica feita por Berkeley ao método das fluxões de Newton. Com efeito, considerando a geometria como a ciência da extensão perceptível e o cálculo (o resultado do emprego da análise à geometria) como uma parte refinada da geometria, Berkeley asseverava que as entidades fundamentais do cálculo — os infinitésimos de Leibniz ou as fluxões de Newton — deveriam corresponder a ideias particulares ou a objetos perceptíveis e que, portanto, a ausência de tais referentes exigia uma explicação. [PYCIOR 1987:284] (Assim, a ausência desse tema na obra de Kant ensejaria um belo estudo de caso.)

Kant, por sua vez, sustentou (na *Crítica da razão pura*) que "o *genus* é a representação geral (*representatio*). Nessa categoria se inclui a representação com consciência (*perceptio*). Uma percepção puramente subjetiva, como a modificação de seu estado, é sensação (*sensatio*). A percepção objetiva é cognição, que consiste quer em intuição, quer em conceito. A intuição se refere imediatamente ao objeto e é singular, enquanto o conceito se remete ao objeto mediatamente, através de uma característica comum a diversas coisas". [*Apud* SMIT 2000:235-236]

Kant estendeu essa distinção (na *Reflexão sobre a Lógica*), dizendo que "uma característica é uma representação parcial. Pode ser ou uma característica intuitiva, uma parte da intuição (uma parte sintética); ou uma característica discursiva , uma parte do conceito (que é uma base analítica da cognição)". [*Apud* SMIT 2000:254]

Esclarece Houston SMIT [2000:255] que a distinção kantiana entre uma característica discursiva e uma característica intuitiva é correlata à distinção entre uma propriedade universal e um exemplo singular de um ente que goze dessa propriedade universal.

Realmente, sustentou Kant (na *Lógica*, ao descrever a generalidade dos conceitos*)*: "O conceito deve contrapor-se à intuição, pois o conceito é uma representação geral ou uma representação daquilo que é comum a uma pluralidade de objetos [...]". [SMIT 2000:257]

Finalmente, na *Dedução Metafísica da Primeira Crítica*, Kant asseverou que "como as representações (salvo as intuições) não alcançam imediatamente os objetos, um conceito nunca se reporta imediatamente a um objeto mas antes a uma outra representação do mesmo objeto (seja ela uma intuição ou já outro conceito). Um juízo é portanto a cognição mediata de um objeto, isto é, uma representação de uma representação desse objeto". [SMIT 2000:261]

Por outro lado, Kant contradisse uma expectativa nutrida por Leibniz, de que toda a Matemática se pudesse reduzir à Lógica. Leibniz justiticava essa expectativa,

afirmando que todas as proposições matemáticas se obteriam de definições analíticas apenas recorrendo-se ao princípio da contradição. [SHIN 1997:5] (Como veremos adiante, essa expectativa seria ressuscitada por Gottlob Frege e por Russell mas, na época em que esses pensadores escreveram, o termo 'lógica' já denotaria um objeto distinto daquele em que pensava Kant.)

Kant pretendeu refutar essa expectativa de Leibniz, apontando que proposições matemáticas, como a sentença "é igual a dois ângulos retos a soma dos ângulos internos de um triângulo", podem ser negadas, sem que seja infringido o princípio da contradição, pois o juízo acerca da soma dos ângulos não decorre da definição de triângulo.

Para firmar sua posição, Kant classificou os juízos em analíticos e sintéticos. Os juízos analíticos ou elucidativos decorrem do mero emprego da ilação ou das regras lógicas que permitem inferir um predicado da própria definição do sujeito. Por exemplo, '3 + 4 = 7' constitui um juízo analítico. Já os juízos sintéticos ou ampliativos têm caráter empírico. Por exemplo, 'o zinco funde a 420ºC' constitui um juízo sintético. [SHIN 1997:32]

Cabe notar que, aqui, estamos beneficiados pelo progresso ocorrido desde o tempo de Kant o qual, por não conhecer a teoria lógica da quantificação, tinha da implicação uma visão muito restrita. Assim, o exemplo de juízo analítico que acabo de propor não seria aceito pelo próprio Kant que, talvez, não imaginasse a possibilidade de se provar a igualdade '3 + 4 = 7', no âmbito de uma teoria axiomática e pretendesse dar dessa igualdade 'uma construção simbólica'. Na verdade, Gottlob Frege e Bertrand Russell acentuariam, ulteriormente, que o principal escopo do projeto logicista consistia em mostrar que a aritmética e a análise real não estavam fundados na intuição kantiana. [GOLDFARB 1982:692; MACFARLANE 2002:27; SHABEL 1998:613-614; SHIN 1997:32]

Finalmente, Kant afirmou que os juízos geométricos tinham caráter sintético pois, para demonstrá-los, não recorremos apenas à Lógica mas usamos também diagramas. A concepção kantiana da geometria resulta de uma reflexão sobre a geometria baseada em diagramas, consoante a tradição grega, na qual os postulados exprimem juízos evidentes acerca do que pode ser traçado em diagramas, as provas são conduzidas mediante exame dos diagramas e os conceitos referem propriedades de figuras desenhadas nos diagramas. [HEIS 2007:10]

Ensina RAGGIO [2007:230] que "durante muito tempo, a distinção entre juízos analíticos e juízos sintéticos e o asserto de que entre as proposições matemáticas também existem juízos sintéticos foram considerados o núcleo da filosofia matemática de Kant. [...] Não obstante, na *Crítica da Razão Pura*, a distinção e o asserto referidos não constituem teses fundamentais mas apenas consequências mais ou menos mediatas da concepção kantiana do conhecimento, segundo a qual, para conhecer, devemos gerar previamente, mediante uma síntese específica, um domínio homogêneo de objetos que configura a matéria e o *terminus ad quem* de toda a atividade teórica".

2.19 Resumo

Nesse capítulo foram perseguidos dois afluentes cognitivos.

O primeiro deles consistiu, essencialmente, em três passos: O aprimoramento da técnica algébrica (Viète), o emprego dos métodos algébricos na geometria do plano (Descartes e Fermat) e o cálculo infinitesimal (Leibniz).

O segundo deles, iniciado na antiguidade (pelo menos na obra de Arquimedes), consistiu no tratamento das séries numéricas. Esse afluente, inicialmente distinto do anterior, dele se aproximou, ao incorporar a novidade do método algébrico, o que lhe permitiu introduzir as séries de potências. Desde então, o método das séries de potências (elaborado em grande parte por Newton) se tornou um recurso indispensável ao cálculo infinitesimal, tanto na derivação quanto na integração de funções. Embora este procedimento não fosse uma regra, nota-se que o emprego de tais séries era mais frequente, quando não havia maior interesse em interpretação semântica mas se considerava imprescindível a coerência sintática.

Desse modo, foi referida, nos respectivos contextos, a emergência de alguns quesitos que constituíram matéria de dissenso ou tema de discussão e também foram comentados alguns quesitos que frequentam a evolução do conhecimento matemático, como:

- A distinção entre os aspectos sintáticos e os aspectos semânticos das expressões algébricas, distinção que começou a impor-se, pelo menos, desde quando Rafael Bombelli praticou o cálculo com o símbolo $\sqrt{(-1)}$, e que foi acentuada pela *Géométrie* de Descartes.

- O papel desempenhado pelos problemas (quer internos à matemática, quer solicitados pela cultura contemporânea) na perscrutação de novas técnicas e no questionamento de sua validade.

- O nascimento e a maturescência dos conceitos de função e de série de potências.

- A invenção do cálculo infinitesimal, as reações provocadas, o emprego do cálculo à geometria e a repercussão da geometria sobre o cálculo.

- A interdependência entre o conhecimento da matemática e o conhecimento da natureza.

Fez-se também uma breve referência a alguns aspectos das concepções filosóficas de Immanuel Kant. Ainda que não houvesse influído no progresso do conhecimento matemático, esse pensador elaborou um esquema conceitual que, durante algum tempo, se configurou em situante de diversos juízos, de caráter matemático, posteriormente proferidos. (É oportuno observar que também incorremos em *hybris*, quando pretendemos sujeitar a evolução do pensamento matemático a um leito de Procrustes.)

2.20 Fontes

(1) *Phenomenological realism demands that no excuses be made that may lead to dismiss any features of mathematics by labeling them as psychological, sociological, or subjective.* [ROTA 1997B:184]

(2) *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.* [*Apud* BIAGIOLI 2003:557]

(3) [...] *a general method of computation by certain signs and symbols which have been contrived for this purpose and found convenient.*" [*Apud* KATZ 1997:26]

(4) [...] *many great thinkers were in search of more: of a 'general method' — sometimes conceived in a restricted sense as a method of mathematics, sometimes more general as a method of understanding nature and of creating new invention. This is why in this period all outstanding philosophers were mathematicians, and all outstanding mathematicians were philosophers.* [STRUIK 1987:101-102]

(5) [...] *the lines and figures from which we reason are drawn and described by ouselves.* [PYCIOR 1987:271]

(6) [...] *the onely Science it hath pleased God hitherto to bestow on mankind* [*apud* JESSEPH 1999:426]

(7) *It is vain to do with more what can be done with fewer.* [RUSSELL 1972:472]

(8) [...] *wherever there is Greater and Less, there is also quantity.* [*Apud* BRATING & PEJLARE 2008:351]

(9) *El hacer matemático adopta, así, lo que he calificado en otros lugares de inversión epistemológica: hace ver lo que no se ve y no ver lo que se ve. Crea un nuevo nivel de abstracción, estrictamente conceptual, con sus obligadas consecuencias respecto a lo propio perceptivo. Y esto último en el sentido de crear lo que después se calificará de 'hecho científico', objetivo o positivo. Hecho que, por supuesto, no se da desnudo en la naturaleza, sino en la provocación y transformación racional que se ha producido en dicha naturaleza.* [LORENZO 1987:XIII]

(10) *Of all the straight lines passing through the point of contact, the tangent evidently provides the closest approximation to the course of the curve at that point; for this reason, the direction of the tangent at that point is also called the direction of the curve at the point.* [HILBERT & COHN-VOSSEN 1952:172]

(11) *Quantitatem dicimus a quantitatibus esse compositum: cum a quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas. Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, divisione, radicum extractione: dicimus illam componi analytice.* [*Apud* YOUSCHKEVITCH 1976:58]

(12) *The 17th century witnessed the emergence of modern mathematized science and the invention of analytic geometry. Both of these developments suggested a dynamic, continuous view of the functional relationship as against the static, discrete view held by the ancients.* [KLEINER 1989:283]

(13) *On the other hand, in the exact sciences of former times, especially from the beginnings of the 17th century, the new conception of quantitative laws of nature as establishing functional relations betweeen numerical values of physical quantities had been gathering strenght in ever-increasing measure and becoming more and more distinctive. In this process the creation of a broader and broader field of physical metrology with the introduction of quantitative measures of heat, pressure etc. played an important role; so did the swift gain in the precision of experiments and observation, brought about by the invention of various scientific instruments. Among the sciences mechanics, overtaking astronomy, came to the fore and, with it, its new branch, dynamics, soon to be joined by celestial mechanics. To study the relation between curvilinear motion and the forces affecting motion had become the chief problem of science. This problem gave rise to a series of problems in infinitesimal analysis, the solution of which had to be carried through to numerical answers.* [YOUSCHKEVITCH 1976:51]

(14) *As a consequence of all this, a new method of introducing functions was brought into being, to become for a long time the principal method in mathematics and, especially, in its applications. As before, functions not infrequently were introduced verbally; by a graph; kinematically; and, as before, tables of functions continued to be used most extensively. However, in theoretical research, the analytical method of introducing functions by means of formulae and equations came to the foreground.* [YOUSCHKEVITCH 1976:51]

(15) *At the beginning the range of analytically expressed functions was restricted to algebraic ones, and Descartes even excluded from his geometry all mechanical curves as not being amenable to his method of analysis. However, a discovery made somewhat later, in the middle of the 17th century (...) made it possible to represent analytically any functional relation studied in those times. What I mean here is the discovery of how to develop functions into infinite power series.* [YOUSCHKEVITCH 1976:53]

(16) [...] *apportaient aux mathématiciens la certitude que l'infini était susceptible d'être manié sans qu'on eût à passer par le détour de l'image spatiale.* [BRUNSCHVICG 1972:183]

(17) *Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continue propius accedere, ita ut differentia tandem evadat, quavis assignabili minor; adeoque in infinitum continuata evanescet.* [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:184-185]

(18) *Power series were conceived of as quasi-polynomial entities (that is, mere infinitary extensions of polynomials).* [FERRARO & PANZA 2003:20]

(19) [...] *un principe nouveau dont on puisse dire qu'il a révolutionné le cours de la Science.* [BOUTROUX 1920:116-117]

(20) [...] *la partie la plus remarquable et la plus féconde de cette nouvelle mathématique était incontestablement* la théorie des développements en séries*, qui a rendu possible l'étude génerale des fonctions.* [BOUTROUX 1920:117]

(21) *Quin etiam natura functionum transcendentium melius intelligi censetur, si per eiusmodi formam, etsi infinitam, exprimantur.* [*Apud* FRASER 1989:322]

(22) *L'analyse qu'on explique dans cet ouvrage, suppose la commune, mais elle en est fort différente. L'analyse ordinaire ne traitte que des grandeurs finies: celle-ci pénètre jusque dans l'infini même.* [*Apud* BOS 1972:4]

(23) *As in Mathematicks so in Natural Philosophy the investigation of difficult things by the method of Analysis ought ever to precede the method of Composition. This Analysis consists in [arguing] <making experiments & observations & in arguing by them> from compositions to ingredients & from motions to the forces producing them & in general from [Phaenomena] <effects> to their causes & from particular causes to more general ones, till the Argument end in the most general: The Synthesis consists in assuming the causes discovered & established, as Principles; & by them explaining the Phaenomena proceeding from them, & proving the explanations.* [Isaac Newton, *apud* SHAPIRO 2004:197]

(24) *Indeed their method is more elegant by far than the Cartesian one. For he achieved the results by an algebraic calculus which, when transposed into words (following the practice of the Ancients in their writings), would prove to be so edious and entangled as to provoke nausea, nor might it be understood. But they accomplished it by certain simple propositions, judging that nothing written in a different style was worthy to be read, and in consequence concealing the analysis by which they found their constructions.*] [Isaac Newton, *apud* GUICCIARDINI 1998:5]

(25) *By the help of this new analysis Mr. Newton found out most of the propositions in his Principia Philosophiae. But because the Ancients for making things certain admitted nothing into Geometry before it was demonstrated synthetically, he demonstrated the Propositions synthetically that the systeme of the heavens might be founded upon good Geometry. And this makes it now difficult for unskillful men to see the Analysis by which those Propositions were found out.* [Isaac Newton, *apud* GUICCIARDINI 1996:169]

(26) *Per Newton e i suoi più stretti seguaci era importante affermare i* Principia *come testo dove veniva rivelata una nuova cosmologia. Newton voleva imporsi come portatore di una nuova verità.* [...] *Leibniz, al contrario, voleva imporsi come portatore di un nuovo metodo di calcolo. Era interessato a formare a livello europeo una scuola di matematici che, colonizzando cattedre e posizioni nelle accedemie, si facessero portatori di un nuovo linguaggio matematico.* [*Apud* GUICCIARDINI 1998:7]

(27) *The Newtonian mathematical heritage was, in fact, complex and fractured. In the works left by Newton there is no easily discernible unity, nor a clear indication of the "right" mathematical method. In particular, it is simplistic to define Newton's mathematics as uniquely oriented towards "geometry." Consequently, several approaches to Newton's mathematical heritage developed, each with different readings of his works.* [GUICIARDINI 2004:223]

(28) *This most elegant system of the sun, planets, and comets could not have arisen without the design and dominion of an intelligent and powerful being.*] [Isaac Newton, *apud* GRABINER 2004:844]

(29) *But Berkeley pointed out that the same arguments apply to primary qualities. Ever since Berkeley, Locke's dualism on this point has been philosophically out of date. Nevertheless, it dominated practical*

physics until the rise of quantum theory in our own day. Not only was it assumed, explicitly ou tacitly, by physicists, but it proved fruitful as a source of many very important discoveries. The theory that the physical world consists of matter in motion was the basis of the accepted theories of sound, heat, light, and electricity. Pragmatically, the theory was useful, however mistaken it may have been theoretically. [RUSSELL 1972:605-606]

(30) *Locke may be regarded as the founder of empiricism, which is the doctrine that all our knowledge (with the possible exception of logic and mathematics) is derived from experience.* [RUSSELL 1972:609]

(31) *Geometry does not teach us to draw these lines (right lines and circles), but requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but no geometrical problems. The solutions of these problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, when so solved, is shown; and it is the glory of geometry that from those few principles brought from without, it is able to produce so many things. Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring.* [Isaac Newton, *apud* BKOUCHE 2006:5]

(32) [...] *as obedient as the planets to the law of gravitation*". [RUSSELL 1972:536]

(33) *And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments? And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?* [George Berkeley, *apud* PYCIOR 1987:284]

(34) [...] *the two brothers began to discover the treasures contained in Leibniz' pioneering venture.* [STRUIK 1987:118]

(35) *It is a great mystery that the infinitesimal calculus is a source of such depth and beauty.* [Shiing-Shen Chern, *apud* SHARPE 2000:vii]

(36) *Bei den unendlich kleinen Teilen einer Kurve kann man nicht nur die Richtung oder Neigung betrachten, wie das bisher geschehen ist, sondern auch die Änderung der Richtung oder Krümmung (flexura). Und wie die Geometer die Richtung einer Kurve durch die einfachste Linie gemessen haben, die in dem betrachteten Punkte die gleiche Richtung hat, das heiszt, durch die berührende Gerade, so messe ich die Krümmung einer Kurve durch die einfachste Linie, die in dem betrachteten Punkte nicht nur dieselbe Richtung, sondern auch dieselbe Krümmung hat, das heiszt, durch den Kreis, der die gegebene Kurve nicht nut berührt, sondern, was mehr ist, oskuliert, was ich gleich erklären werde.* [...] *Ich sage, dasz derjenige Kreis die Kurve oskuliert, der mit ihr den kleinsten Berührungswinkel bildet* [...] *derart dasz zwischen ihn und die Kurve kein anderer Kreisbogen mehr gelegt werden kann.* [Wilhelm Leibniz, *apud* GERICKE 1982:10-11; o texto em latim encontra-se na página 19.]

(37) *J'ai crû devoir appeller ces sortes de courbes, courbes à double courbure, parce qu'en les considérant de la façon qu'on vient de dire, elles participent, pour ainsi dire, toujours de la courbure de deux courbes.* [Alexis Clairaut, *apud* STRUIK 1933:100-101]

(38) [...] *in the period 1650-1750, infinitesimal analysis gradually emancipated itself as a separate mathematical discipline, independent of the geometrical imagery of coordinates, curves, quadratures, and tangents, and with its own subject matter, namely, analytical expressions and, later, functions. This process of emancipation, which might be called the de-geometrization of analysis, constituted the principal dynamics within the area of mathematical activities around the investigation of curves by means of finite and infinitesimal analysis.* [Henk BOS, *apud* GUICCIARDINI 2004:241]

(39) *Sometimes it seems to have been assumed that if one could just write down something which was symbolically coherent, the truth of the statement was guaranteed. And this assumption was not applied to finite formulas only. Finite methods were routinely extendend to infinite processes. Many important facts about infinite power series were discovered by treating the series as very long polynomials.* [GRABINER 1974:356]

(40) [...] *were not presented as blind manipulations of symbols, but rather as a meaningful language that could always be translated into the terminology of the kinematic-geometric model of Book 1.* [GUICCIARDINI 2004:239-240]

(41) *The same symbolic expression guaranteed the homogeneity and consistency of the algebraic entities represented.* [DASTON 1986:271]

(42) *Au commencement du siècle, l'idée de fonction était une notion à la foi trop restreinte et trop vague. D'une part en effet les fonctions discontinues, les fonctions dépourvues de dérivées, ou étaient inconnues ou étalent regardées comme des créations purement artificielles, indignes de l'attention du géomètre. On excluait donc de l'analyse tout un domaine qu'elle s'est depuis annexé; mais d'autre part on aurait été bien embarrassé s'il s'était agi d'énoncer, d'une manière nette et précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour conférer à une fonction le droit de cité. La frontière entre les fonctions analytiques et les autres était loin d'etre complètement tracée. En réalité, comme par un héritage due aux fondateurs du calcul infinitésimal, qui s'étaient d'abord préoccupés des applications, on se reportait inconsciemment au modèle qui nous est fourni par les fonctions considérées en mécanique et on rejetait tout ce qui s'écartait de ce modèle; on n'était pas guidé par une définition claire et rigoureuse, mais par une sorte d'intuition et d'obscur instinct. Cette définition, il fallait la donner; car l'analyse ne pouvait qu'à ce prix acquérir la parfaite rigueur.* [POINCARÉ 1898:4-5]

(43) *On appelle ici fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes.* [Johann BERNOULLI, *apud* BOS 1974:10]

(44) *Functio quantitatis ergo variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.* {Leonhard EULER, *apud* GUICCIARDINI 2004:242]

(45) *Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.* [Sylvestre Lacroix, *apud* DELACHET 1949:53]

(46) *It is evident that all the sciences have a relation, greater or less, to human nature, and that, however wide any of them may seem to run from it, they still return back by one passage or another. Even*

Mathematics, Natural Philosophy, and Natural Religion, are in some measure dependent on the science of Man, since they lie under the cognizance of men and are judged of by their powers and faculties. [David Hume (*Treatise on the Human Nature*), *apud* OLSON 1971:30-31]

(47) *Newton's theory of motion clearly belongs to the body of physics; it is a statement about how bodies move. The claim that Einstein's theory is 'simpler' than Newton's clearly belongs to the images of scientific knowledge; it is a claim about theories rather than a claim about the physical object. Gödel's theorems, on the other hand, belong to the body of mathematics; they are results obtained within a specific branch of the discipline. They may also be taken to be, however, a claim* about *(an intrinsic limitation, in this case) of mathematics, the discipline.* [CORRY 1993:106]

(48) *La certitude des Mathématiques est un avantage que ces Sciences doivent principalement à la simplicité de leur objet. ... le calcul des grandeurs, & des propriétés générales de l'étendue, c'est-à-dire l'Algèbre, la Géométrie & la Méchanique . . . Plus l'objet qu'elles embrassent est étendu, & considéré d'une manière générale & abstraite, plus aussi leurs Principes sont exempts de nuages, & faciles à saisir.* [Jean d'Alembert, *apud* FRASER 1989:329]

(49) [...] *dasz alles, war wir sehen, nur Sinneserscheinung ist; dasz es nichts auszer uns gibt, das dem, was wir zu sehen glauben, entspricht.* [FRIEDELL 1974:663]

(50) [...] *une quantité est quelque chose ou rien; si elle est quelque chose, elle n'est pas encore évanouie, si elle n'est rien, elle est évanouie tout à fait.* [Jean d'Alembert, *apud* BRUNSCHVICG 1872:246]

(51) *Allez en avant et la foi vous viendra.* [STRUIK 1987:151]

(52) *Les méthodes que j'expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine.* [Joseph-Louis Lagrange, *apud* BOUTROUX 1920:232-233]

(53) *The analytical objects of calculus did not exist in virtue of implicit or explicit definitions: they were not a creation of our mind. Despite being abstract, calculus was considered as a mirror of reality; its objects were idealisations derived from the physical world and had an intrinsic existence before and independently from their definition. Mathematical propositions were not merely hypothetical but concerned reality, and were true or false accordingly to whether or not they corresponded to the facts.* [FERRARO 2001:551]

(54) *Si igitur receptam summae notionem ita tantum immutemus, ut dicamus cuisque seriei summam esse expressionem finitam, ex cuius evolutione illa ipsa series nascatur, omnes difficultates, quae ab utraque parte sunt commotae, sponte evanescent. Primo enim ea expressio, ex cuius evolutione nascitur series convergens, eius simul summam, voce hac vulgari sensu accepta, exhibet, neque, si series fuerit divergens, questio amplius absurda reputari poterit, si eam indagemus expressionem finitam, quae secundum regulas analyticas evoluta illam ipsam seriem producat.* [Leonhard Euler, *apud* FRASER 1989:321]

(55) [...] *ich glaube aber gewisz su sein, dasz nimmer eben dieselbe series aus der Evolutionen zweier wirklich verschiedener* expressionum finitarum *entstehen könne*. [Extraído de uma carta a Goldbach, datada de 7 de agosto de 1745; *apud* FRASER 1989:322.]

(56) *From the days of Pythagoras and Plato down to those of Kant and Herbart, the mathematical sciences and, especially, geometry have played so important a part in the discussions of philosophers as models of method and patterns of certitude, that philosophy cannot but be extremely sensitive to any change or progress occurring in the views of mathematicians*. [SCHILLER 1896:173]

(57) [...] *fatal blow to the Kantian philosophy* [...] *the whole doctrine of a priori intuitions, by which Kant explained the possibility of pure mathematics, is wholly inapplicable to mathematics in its present form*. [RUSSELL, *Mysticism and* logic, *apud* CARSON 2006:370]

(58) [...] *quasi notiones imaginariae, quae ad cognitionem naturae mathematicam sufficiunt, et in ea foecundae deprehenduntur, in Philosophiam primam et naturalem utiliter inveherentur, immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent quae ad Theologiam Naturalem et Cosmologiam generalem spectant*. [*Apud* AHNERT 2004:480]

(59) *Die Mathematik erklärt niemals durch Zergliederung einen gegebenen Begriff, sondern durch willkürliche Verbindung ein Objekt, dessen Gedanke eben dadurch erst möglich wird*. [*Apud* RAGGIO 2007:232]

(60) [...] *die Seele der ganzen Mathematik*. [*Apud* SUTHERLAND 2004:164]

(61) *Quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ces deux termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois*. [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:245]

(62) [...] *décharger l'analyse infinitésimale de l'obligation de faire la preuve directe de sa propre vérité*. [BRUNSCHVICG 1972:248]

(63) [...] *geometry, throughout the seventeenth and eighteenth centuries, remained, in the war against empiricism, an impregnable fortress of the idealists. Those who held — as was generally held on the Continent — that certain knowledge, independent of experience, was possible about the real world, had only to point to geometry: none but a madman, they said, would throw doubt on its validity and none but a fool would deny its objective reference*. [RUSSELL 1897:1]

Capítulo terceiro

Breve introdução histórica ao pensamento matemático: parte B

Sumário

3.1 Antelóquio

3.2 Da álgebra à geometria das curvas

3.3 Do cálculo infinitesimal à geometria das superfícies

3.4 Apreensões distintas da mesma realidade

3.5 Um novo florescimento do pensar geométrico

3.6 Duas imagens conflitantes da matemática

3.7 A gênese do culto do rigor

3.8 A geometria intrínseca das superfícies

3.9 Os triângulos retilíneos e a emergência do modelo euclidiano

3.10 Um outro modelo do espaço físico

3.11 A geometria das pluralidades

3.12 O declínio da hegemonia do modelo euclidiano

3.13 Resumo

3.14 Fontes

3.1 Antelóquio

O estado presente de qualquer ciência é o resultado das concepções, das inquietudes, dos anseios e do labor de seus criadores.

A fim de fundamentar a prática anunciada no primeiro capítulo deste escrito, serão ora narrados os episódios que pareceram relevantes à discussão dos aspectos epistêmicos, a qual será conduzida no próximo capítulo.

3.2 Da álgebra à geometria das curvas

Desde Fermat e Descartes, se criara a possibilidade de se resolverem problemas geométricos, mediante o cálculo formal, empregado nas equações que descrevem curvas planares mas esses problemas se formulavam no domínio das curvas racionais, isto é, representáveis por equações algébricas. [LORENZO 1933:XLIII]

O método inicialmente descrito por Descartes consistia em "atribuir nomes a quantidades conhecidas e desconhecidas, obter equações, proceder a eliminações, de modo que se obtivesse uma equação em uma única incógnita, e construir essa equação mediante a interseção de curvas". Alguns matemáticos, como Isaac Newton, defendiam que "o uso de curvas em geometria consistia em que, mediante sua interseção, se resolviam problemas" [(1)]. [BOS 1984:356]

Aliás, já em 1670, Newton denunciara que a substituição do cânone euclidiano, que restringia o emprego a círculos e retas, pelo cânone cartesiano, que permitia todas as curvas racionais, significaria uma ruptura com o contexto geométrico. [BOS 1984:360]

Não quer isso dizer, porém, que Newton representasse um passo involutivo. Enquanto as construções de Descartes exibiam claramente o tipo de procedimento algébrico por ele empregado, as construções praticadas por Newton não deixam esse tipo de vestígio, sendo a álgebra totalmente subserviente à geometria. [BOS 1984:362]

Subordinado ao paradigma cartesiano, Leibniz criou o cálculo infinitesimal, inaugurando um novo instrumento, que transcendia a potência do método algébrico. Por essa vereda trilharam Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli e Leonhard Euler.

Em seguida, houve um deslocamento cognitivo, consubstanciado na evolução do problema inverso das tangentes. De fato, enquanto nas mãos de Descartes e de seus adeptos, o problema da construção se restringia às curvas racionais, o problema inverso da tangente frequentemente apresentava, como soluções, curvas transcendentes que, de algum modo teriam de ser construídas. Assim, o uso do cálculo infinitesimal conduziu a uma extensão do âmbito desses problemas, incluindo-se as curvas transcendentes. Mas a inclusão de tais curvas parece haver concorrido para um afastamento do cânone até então adotado, acerca do método de construção de soluções.

Esse cânone, inicialmente empregado na resolução de equações diferenciais, aos poucos se foi afrouxando e, embora se conservasse a nomenclatura de "construção de curvas", esse último passo era muitas vezes esquecido. Talvez se possa afirmar que, anteriormente, as equações estavam enlaçadas aos fenômenos geométricos que elas descreviam, ao passo que, posteriormente, **as equações foram consideradas como entes autônomos**.

Essa concepção parece haver caracterizado a primeira fase da história das equações diferenciais parciais de primeira ordem, corporificada nos ensaios de Jean

d'Alembert e Leonhard Euler, durante a qual era conspícua a total ausência de interpretação geométrica, tanto das equações quanto das soluções. [DEMIDOV 1982:329]

3.3 Do cálculo infinitesimal à geometria das superfícies

Euler, que desde a juventude empregara o cálculo infinitesimal na descrição dos fatos geométricos, deu também o primeiro passo no estudo da curvatura de superfícies, em 1760 (*Recherches sur la courbure des surfaces*), ao introduzir a noção de curvaturas normais de uma superfície em um ponto regular. Definindo como ponto regular q de uma superfície Δ a um ponto pelo qual passa uma reta normal à superfície Δ, Euler considerou o feixe de planos definido por essa reta normal. Todo plano desse feixe determina, sobre a superfície Δ, uma curva planar Γ (denominada uma seção normal da superfície), que passa pelo ponto q. Definiu **a curvatura normal** da superfície no ponto q, associada ao plano considerado, como a curvatura dessa seção normal.

Em seguida, Euler verificou que as curvaturas normais de uma superfície em um ponto regular variam entre dois valores extremos, correspondentes a dois planos mutuamente ortogonais, que determinam seções denominadas seções principais. Mais precisamente, Euler mostrou que o raio de curvatura de uma seção normal Γ qualquer se exprime por $2fg/\{f + g + (f - g).\cos\psi\}$, sendo f e g os valores extremos do raio de curvatura e ψ o ângulo formado pelo plano associado a uma seção principal com o plano associado à seção Γ. [STRUIK 1933:102-103; CHILOV 1975:424; DO CARMO 1987:13]

Em 1771, continuando o estudo das superfícies, Euler atribuiu-se a tarefa de encontrar todas as superfícies que se podem estender sobre um plano e, nesse contexto, pela primeira vez, descreveu uma superfície mediante dois parâmetros, introduzindo a representação de um ponto (x, y, z) de uma superfície como função de duas variáveis (t e u), hoje, indevidamente, denominadas variáveis gaussianas. O significado profundo dessa representação reside no asserto de que superfícies (no espaço R^3) se podem descrever mediante dois parâmetros (em oposição às curvas, que exigem apenas um parâmetro). (REICH 1973:296; STRUIK 1933:104)

Na linguagem de hoje, podemos dizer que Euler determinou todas as superfícies isométricas ao plano, isto é, as superfícies que se podem obter de um plano mediante deformações que lhe preservem as propriedades métricas, e provou que a família de tangentes a uma qualquer curva reversa forma uma superfície desenvolúvel. [CHILOV 1975:424; REICH 1973:296; STRUIK 1933:104]

Posteriormente, tal curva seria denominada por Gaspard Monge, **aresta de retrocesso** [*arête de rebroussement*] da superfície desenvolúvel. [STRUIK 1933:105]

Assim, a reta tangente a uma curva, parametrizada como $p:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, pode ser descrita pela equação $\{x - p_1(t)\}/p_1'(t) = \{y - p_2(t)\}/p_2'(t) = \{z - p_3(t)\}/p_3'(t)$. Pondo tais razões iguais a um novo parâmetro u, temos a equação paramétrica da correspondente superfície desenvolúvel: $x = p_1(t) + u.p_1'(t)$, $y = p_2(t) + u.p_2'(t)$ e $z = p_3(t) + u.p_3'(t)$.

3.4 Apreensões distintas da mesma realidade

Enquanto o emprego do cálculo infinitesimal à geometria e à mecânica se tornara uma prática comum entre os matemáticos do Continente (entenda-se, sobretudo da França e dos países de cultura germânica), na Grã-Bretanha os matemáticos pareciam se haver detido nos resultados descritos no segundo volume do *Treatise of fluxions* (1742) de Maclaurin.

Na verdade, como argumenta GUICCIARDINI [2004:241], o processo de degeometrização do cálculo infinitesimal ocorrido no Continente constituiu *uma revolução silenciosa*, que consistiu na mudança da linguagem, em uma distinta orientação das linhas de pesquisa e na formação de uma nova imagem da matemática, a qual se refletia nos valores atribuídos à prática da pesquisa. Na ausência de uma declaração explícita, pronunciada no início do processo de degeometrização, o seu impacto pôde ser detectado, pela verificação de que, em torno de 1750, por causa da diversidade de linguagem, estava interrompida a comunicação entre os matemáticos do Continente e os seus pares na Grã-Bretanha, que não foram partícipes nesse processo.

Esse fato seria denunciado por John Playfair, em resenha, escrita em 1808, ao *Traité de Méchanique Céleste* de Laplace: "Neste momento em que escrevemos, os tratados de Maclaurin e de Simpson são os melhores que temos sobre o cálculo das fluxões, embora, desde que foram publicados, tenha sido feita uma vasta multidão de aprimoramentos por matemáticos estrangeiros. Esses são fatos que não se podem mascarar e que chegaram ao ponto de que uma pessoa, perfeitamente instruída em todos os temas do conhecimento matemático escritos neste país, se possa ver detido na primeira página das obras de Euler e de d'Alembert. Essa pessoa será detida, não por causa da de uma notação distinta da fluxionária (uma dificuldade facilmente transposta) nem por causa da obscuridade desses autores, os quais são ambos escritores muito claros, especialmente o primeiro deles, mas pela ignorância dos princípios e dos métodos os quais eles consideram conhecidos de todos os leitores matemáticos." (2) [*Apud* GUICCIARDINI 2004:247-248]

Dentre os diversos motivos que podem ser invocados para o alheamento da comunidade britânica, referirei apenas o contexto cultural escocês, admitindo que "a Escócia oitocentista tenha sido um centro de erudição reconhecido internacionalmente, uma moderna Atenas no olhar do mundo esclarecido". (3) [GRABINER 1997:393]

Nessa época, a Escócia, com uma população equivalente a um décimo da população da Inglaterra, mantinha quatro universidades, enquanto na Inglaterra havia apenas duas dessas instituições. Esse fato parece estar associado à perda de autonomia

governamental da qual a Escócia foi destituída pelo *Act of Union* (1707) que, não obstante, lhe conservou o sistema jurídico, a religião predominante e um raro contexto educacional, no qual havia uma interação intensa e incomum entre a matemática e a epistemologia. [GRABINER 1997:395; OLSON 1971:30]

Muito resumidamente, podemos lembrar que diversos filósofos escoceses ficaram descontentes com a concepção ética que David Hume defendeu nas *Investigations on the principles of morals* (1751), segundo a qual seriam inúteis quaisquer esforços despendidos na tentativa de se provar que certos comportamentos fossem moralmente superiores a outros. [RUSSELL 1972:672-673].

Reagindo às ideias de Hume, esses pensadores convenceram-se de que, a fim de conhecerem os métodos mais eficazes de se atingir o conhecimento verdadeiro, deveriam examinar a matemática e a filosofia natural, ciências bem sucedidas, por haverem conseguido um significativo acervo de verdades. Por isso, quase todos os estudantes universitários escoceses, nas aulas de filosofia moral, assistiam a discussões acerca da natureza da matemática. Além disso, o núcleo do currículo de todos os estudantes consistia em uma sequência de cursos de Filosofia Moral que se estendia compulsoriamente por dois ou três anos. E nas aulas de Filosofia Moral se ensinava que o entendimento da atividade da mente humana fosse um requisito a todas as outras disciplinas, incluída a matemática. [OLSON 1971:29-31]

Nessa época, a filosofia da matemática sofreria, na Escócia, acentuada influência do *princípio do senso comum*, exposto por Thomas Reid, no *Inquiry into the human mind on the principle of common sense* (1764) e a maior parte dos pensadores escoceses aceitava que as ideias matemáticas se vinculassem à experiência sensual, pois somente os sentidos poderiam obter e prover dados que sugerissem os conceitos matemáticos. A atitude desses pensadores no que tange à natureza da matemática consistia em crer na realidade física como fonte primária das ideias matemáticas e em insistir que o processo de abstração eximisse o raciocínio matemático tanto da verificação empírica quanto dos procedimentos indutivos. [OLSON 1971:33-34]

Realmente, os *filósofos do senso comum*, concordando com Locke, sustentavam que todos os conceitos significativos se tipificassem em duas classes: psíquicos (referentes à mente) e somáticos (referentes ao corpo). O conhecimento acerca dos conceitos da primeira classe se obteria por introspecção e por consideração dos processos mentais enquanto o conhecimento acerca dos conceitos da segunda classe se apoiaria nos dados recolhidos do mundo exterior e fornecidos pelo sistema sensual. A esses pensadores se impunha claramente a opinião de que, se não trata de processos mentais, o conhecimento matemático é concernente a corpos e a suas relações (pois não há uma terceira classe de ideias nem uma terceira fonte de dados). [OLSON 1971:34-35]

Nesse aspecto, os *filósofos do senso comum*, estavam em consonância com Diderot, ao afirmar que "as noções procedentes do entendimento ou são quiméricas ou são aptas a, retornando pela mesma trajetória, se religarem aos seus arquétipos sensíveis. Daí decorre

uma regra importante na filosofia: É destituída de significado toda expressão que não possa encontrar um objeto externo e sensível com o qual tenha afinidade." [*Apud* OLSON 1971:35]

E opunham-se, portanto, a Hume, para quem "a álgebra e a aritmética são as únicas ciências nas quais podemos conduzir uma longa cadeia de raciocínio sem perder a certeza. A geometria não é tão certa quanto a álgebra e a aritmética, pois não temos certeza de seus axiomas." (4) [RUSSELL 1972:663-664]

Como os *filósofos do senso comum* entendessem que a certeza da matemática dimanasse, sobretudo, de sua conexão com as qualidades primárias da matéria e não somente da natureza hipotética e dedutiva do raciocínio, parecia-lhes indispensável que atuasse alguma faculdade mental distinta do mero raciocínio, a fim de impedir que ele se desviasse dos seus próprios objetos, vagueando além do âmbito que lhe fosse adequado. O filósofo Dugald Stewart apresentava como exemplo de um raciocínio mal conduzido o caso da série $1 - x + x^2 - x^3 + ...$, cuja soma era formalmente considerada igual a $1/(1 + x)$. Tomando-se $x = 1$, obtêm-se as *falsas* igualdades $(1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 = 1/2$. [OLSON 1971:37-38]

Em harmonia com *a filosofia do senso comum*, os matemáticos escoceses nutriram acentuado antagonismo contra procedimentos algébricos ou analíticos, por considerarem que a extrema generalidade do simbolismo algébrico permitisse facilmente a evasão do âmbito adequado do raciocínio matemático e o consequente incurso em erro. Isso não ocorreria no tratamento geométrico, protegido dessas antinomias pela referência constante a diagramas, que serviriam para manter o raciocínio sob controle. [OLSON 1971:38]

Talvez, naquela época, o exemplo mais provocante de uma ideia destituída de "um objeto externo e sensível com o qual tivesse afinidade" fossem os números imaginários. Essa percepção dos números imaginários ainda se conservaria nas primeiras décadas do século XIX pois, embora o próprio Playfair, que censuraria o declínio do nível dos matemáticos britânicos, houvesse justificado, na *Arithmetic of impossible quantities* (1779), o emprego de tais números, com base na analogia entre geometria da hipérbole e a geometria do círculo, seu amigo próximo John Leslie, que seria catedrático de matemática na Universidade de Edimburgo, de 1805 a 1819, jamais empregaria a análise algébrica a um problema que envolvesse números complexos. [OLSON 1971:40-41]

Essa atitude não deve ser atribuída à ignorância das obras publicadas no Continente, pois Leslie assistira aos cursos avançados de análise professados por Playfair em Edimburgo e, em seus trabalhos de filosofia natural, recorria ao cálculo como era praticado por Euler, Lagrange e Laplace. Autor de um dos poucos livros estrangeiros que seria adotado no sistema educacional francês por Gaspard Monge (*Second Supplément de la Géométrie Descriptive suivie de l'Analyse Géométrique de John Leslie*, traduit par N. P. Hachette, Paris, 1818), Leslie sustentava que a ocorrência de números complexos na solução de um problema resultasse da falência na caracterização das condições sob as quais o problema vertente pudesse ser resolvido legitimamente. Leslie tampouco aceitava a distinção que, ulteriormente, seria feita entre números *naturais* e números *inteiros*. Defendia que os números decorressem

de procedimentos de enumeração e que, portanto, não era legítimo atribuir-lhes sinais, salvo em contextos geométricos, em que os sinais apenas indicassem a orientação de curvas, ou em contextos algébricos, em que os sinais mostrassem que os números deveriam ser somados ou subtraídos. [OLSON 1971:38, 40-41]

Feitas essas considerações, concluiu OLSON [1971:30] que "as doutrinas epistemológicas associadas à filosofia do senso comum, ensinada por Thomas Reid e Dugald Stewart, não apenas reforçaram o apreço do raciocínio geométrico como também produziram um obstáculo significativo à aceitação dos métodos analíticos pelos matemáticos escoceses". (5)

Por outro lado, na Inglaterra, prevaleceram condições sociais adversas à pesquisa matemática. Na *Royal Society*, havia uma forte oposição entre os membros dedicados à matemática, por um lado, e os membros devotados à história natural, a antiguidades e a botânica, pelo outro lado. Esse último partido dominou a sociedade, desde 1727, ano no qual Hans Sloane foi eleito presidente. Além disso, em Cambridge, embora não houvesse prevenção contra a matemática, essa disciplina era considerada uma ferramenta pedagógica e, praticamente, se reduzia à geometria, por sua eficácia no industriamento do raciocínio. Nesse ambiente social, os métodos elaborados no Continente pareceram irrelevantes aos tutores, desinteressados em formar matemáticos profissionais. [GUICCIARDINI 2004:251-253]

3.5 Um novo florescimento do pensar geométrico

No início do escrito intitulado *Pensées sur l'interprétation de la nature* (1754), comentando a inclinação que os espíritos então mostravam para a ética, às belas-letras, à história da natureza e à física experimental, Denis Diderot vaticinara que, antes do transcurso de um século, não haveria sequer três geômetras em toda a Europa. "Essa ciência permanecerá no estado a que foi levada pelos Bernoulli e os Euler, os Maupertuis e os Clairaut, os Fontaine e os d'Alembert. Eles haverão fixado as colunas de Hércules, que não se poderão transpor." (6)

Talvez essa opinião se tivesse difundido entre os pensadores contemporâneos, tanto que, no último quartel do século XVIII, "havia entre os matemáticos eminentes o sentimento de que o campo da matemática estava como que exaurido" (7). [STRUIK 1987:136]

Em carta de 24 de fevereiro de 1772, dirigida a d'Alembert, Lagrange indagou se "não lhe parecia que a geometria superior estivesse declinando". (8) [STRUIK 1933:105]

E, em outra carta endereçada a d'Alembert (1781), confessou Lagrange "que começava a sentir sua força de inércia aumentar lentamente e que não afirmava estaria ainda estudando a geometria, ao cabo de uma década. Parecia-lhe também que a mina já estivesse quase muito profunda e que, se não se encontrassem novos veios, caberia abandoná-la, mais

cedo ou mais tarde. A física e a química ofereciam então riquezas mais vistosas e de exploração mais fácil; além disso, o gosto do século parecia se haver tornado inteiramente para esses temas e não seria impossível que, um dia, os cargos de geometria nas academias se convertessem no que então eram as cadeiras de língua árabe nas universidades". (9) [*Apud* QUEYSANNE & DELACHET 1955:16]

E, nos anos que se seguiram, Lagrange dedicou-se mais à mecânica, produzindo, em 1788, o *Traité de Mécanique analytique*. Por sua vez, Pierre Laplace, que se tornaria famoso como autor da *Exposition du système du monde* (1796) e da *Mécanique céleste* (1799-1825), aceitou o convite de Antoine Lavoisier, para ajudá-lo a investigar os efeitos sobre a evaporação de fluidos decorrentes de mudanças de pressão e de temperatura. Essa colaboração estendeu-se até 1784, centrando-se na experimentação acerca dos calores específicos de diversas substâncias. [ARNOLD 1983B:268-269]

Também Jean de Condorcet, em 1789, consignou na *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain* que a gometria clássica era uma antiguidade intelectual, "abandonada por quase todos os matemáticos em favor dos métodos analíticos". [DASTON 1986:279]

Não perceberam Lagrange e Laplace que, na *Mémoire sur les développées*, lida perante a *Académie des Sciences* em agosto de 1771, Monge revigorava o estudo das curvas, elaborando uma exposição de toda a geometria diferencial das curvas reversas. Foi esse o primeiro ensaio, desde Clairaut, sobre curvas reversas, considerando-as, porém, objetos autônomos. Mostrou Monge que as curvas reversas admitiam uma infinidade de evolutas, que todas elas jaziam em uma superfície desenvolúvel e que constituíam geodésicas dessa superfície. Nesse ensaio, foram definidos o **plano normal a uma curva**, **o raio da primeira curvatura** e **a esfera osculatriz** e foi mostrada a existência de dois tipos de inflexão, uma causada pelo que chamamos torção nula e outra produzida pelo que chamamos curvatura nula. [STRUIK 1933:105-106]

Essa memória foi estampada em 1785, em uma publicação (*Mémoires des savants étrangers*) que também continha um outro clássico da geometria diferencial, a *Mémoire sur la courbure des surfaces*, de Jean Meusnier, escrita sob a orientação de Monge. Consta que d'Alembert, tendo lido o trabalho antes que fosse publicado, pressentiu o novo espírito das investigações e comentou: (10) "Meusnier inicia como eu terminei." [STRUIK 1933:106-107]

Em 1780, Monge publicou um segundo ensaio (*Sur les propriétés de plusieus genres de surfaces courbes*), no qual retomou a teoria das superfícies desenvolúveis de Euler. Embora apenas desejasse simplificar as ilações de Euler, Monge conferiu à teoria uma forma inteiramente nova que "fez com que Euler parecesse um analista e não um geômetra". [STRUIK 1933:106]

Nas mãos de Monge, as fórmulas seguiam sempre a dinâmica do desenvolvimento geométrico, de modo que a integração de uma equação diferencial parcial se tornava gradualmente a construção de um sistema geométrico no espaço. A contribuição de Monge à

teoria das equações diferenciais parciais distinguiu-se, pois, por uma constante interpretação geométrica, em oposição à atitude adotada por d'Alembert e Euler.

Monge definiu **as linhas assintóticas** de uma superfície como o lugar dos pontos dessa superfície nos quais uma das curvaturas principais é nula, apontou a diferença essencial entre as superfícies retilíneas e as superfícies desenvolúveis, instituiu a relação $(\partial^2 z/\partial x^2).(\partial^2 z/\partial y^2) - (\partial^2 z/\partial x \partial y)^2 = 0$ e obteve a existência de uma relação arbitrária entre $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$, interpretada pelo asserto de que uma superfície desenvolúvel sempre é a superfície tangente a uma curva reversa.

Também nesse trabalho, encontramos a equação diferencial de terceira ordem das superfícies retilíneas, acompanhada da solução do problema de encontrar a superfície retilínea que passa por curvas reversas. [STRUIK 1933:108; CHILOV 1975:424]

Em 1781, na *Memória sobre a teoria dos aterros e dos nivelamentos* (*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*), Monge mostrou como se descrevem curvas sobre uma superfície cuja tangente, em cada ponto regular dessa superfície, seja tangente a uma das duas seções principais que passam pelo ponto considerado. Tais linhas, a que chamaria, em 1784, **linhas de curvatura da superfície**, constituem uma rede, na acepção de que, por cada ponto regular da superfície, passam duas linhas de curvatura (que são mutuamente ortogonais). [STRUIK 1933:108 e 112]

Podem existir, porém, pontos na superfície aos quais não se aplica essa descrição. De fato, Euler havia verificado que, habitualmente, as curvaturas normais de uma superfície em um ponto regular variam entre dois valores extremos distintos, correspondentes a dois planos mutuamente ortogonais. Pode ocorrer, porém, que, em um dado ponto, sejam iguais todas as curvaturas normais, deixando, portanto, indeterminadas as direções principais associadas a esse ponto. Pontos dessa natureza foram denominados **pontos umbílicos**. Um exemplo óbvio de uma superfície cujos pontos são todos umbílicos é uma esfera. Em 1813, Charles Dupin, o aluno de Monge intelectualmente mais próximo, mostraria, apenas com argumentos geométricos, que a esfera é a única superfície real constituída apenas por pontos umbílicos. [STRUIK 1933:118; HILBERT & COHN-VOSSEN 1952:187]

Em 1796, Monge publicou um estudo (*Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde*), no qual revelou haver percebido a relevância da estrutura, definida em uma superfície, pelos pontos umbílicos e pela rede de curvas principais. [SOTOMAYOR 1993:35]

Após alguns outros ensaios, Monge publicou, em 1807, o livro *Applications de l'analyse à la géométrie*, caracterizado pela interpretação geométrica das equações diferenciais parciais e pela interpretação dos fatos geométricos na linguagem das equações diferenciais parciais. Assim, por exemplo, Monge definiu **as linhas de curvatura** de uma superfície, *geometricamente*, como as curvas ao longo das quais, as retas normais à superfície considerada formam uma superfície desenvolúvel e, *analiticamente*, como as curvas ao longo das quais a curvatura normal assume valor extremo (máximo ou mínimo). [STRUIK 1933:111, 117]

Posteriormente, esses dois modos de tratamento se separariam em dois ramos distintos: o tratamento analítico conduziria à geometria diferencial e o tratamento descritivo levaria à geometria projetiva.

Talvez se possa afirmar que Monge tenha constituído a culminância de um processo cognitivo, iniciado pela colocação do problema inverso das tangentes.

3.6 Duas imagens conflitantes da matemática

Desde janeiro de 1769, Monge era docente na *École Royale du Génie*, uma academia militar em Mézières; em 1780, foi eleito geômetra adjunto da *Académie des Sciences*; e, em 1784, substituiu Étienne Bezout como examinador dos cadetes navais. No exercício dessa função, Monge empreendeu uma reforma didática (1786) que privilegiava sua concepção da matemática como uma técnica voltada também para problemas concretos da engenharia contemporânea, como o projeto e a construção de máquinas, que exigiam um tipo de geometria que contemplasse sobretudo a descrição e a decomposição de corpos sólidos. Compôs assim sua *Géometrie descriptive* (por volta de 1775, que somente seria publicada em 1799, durante sua visita à Itália), na qual introduziu a representação de corpos mediante a projeção ortogonal sobre dois planos perpendiculares. Mediante essa representação, podiam calcular-se facilmente as dimensões e as distâncias relativas das partes dos sólidos representados. [GLAS 2002:712-713]

De sorte que, iniciada a Revolução Francesa (1789), a atividade científica e pedagógica de Monge era reconhecida. A Convenção Nacional incluiu Monge na comissão que criaria a *École Centrale des Travaux Publics* (logo denominada *École Polytechnique*). Enviado à Itália em uma missão artística, travou amizade com Napoléon Bonaparte e, retornando a Paris, foi nomeado diretor da *École Polytechnique*. Também no exercício dessa função, Monge desenvolveu intensa atividade pedagógica. [O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Monge.]

Também Carnot, que fora estudante de Monge na academia militar em Mézière, movido por interesses semelhantes, escreveu o *Essai sur les machines en général* (1783), o qual constituiria o ponto de partida da tradição francesa na engenharia de máquinas, distinta tanto da mecânica analítica formal de Lagrange quanto dos estudos de caráter puramente empírico dos engenheiros contemporâneos. Esse escrito pressupunha que o leitor tivesse competência no pensamento abstrato mas fora escrito em um idioma geométrico que já não despertava o interesse dos matemáticos ou dos cientistas com formação matemática. Tampouco se destinava esse ensaio ao papel de um manual prático de projeto, construção e manutenção de máquinas. Pelo contrário, tratava de uma ciência das máquinas que considerava as novas técnicas de produção industrial, a qual dependia da permutabilidade das partes e que, portanto, considerava como fundamental o estudo dos movimentos possíveis nas configurações espaciais. [GLAS 2002:712-713]

Contrapondo-se à tendência então dominante, segundo a qual se estudavam o plano inclinado, a alavanca, a manivela e a roldana *ideais*, destituídos de atrito, Carnot considerava as máquinas como corpos materiais dotados de inércia e, partindo de seu comportamento observável, tentava encontrar princípios gerais comuns a todas as máquinas, em um estilo mais próximo da antiga análise geométrica que da análise algébrica que então prevalecia. Em vez de estruturar os argumentos na forma dedutiva, iniciando com definições e premissas matemáticas abstratas, Carnot recorria a experimentos mentais altamente idealizados, nos quais desempenhavam papel central os movimentos geométricos permitidos pelos vínculos entre as peças das máquinas. Servia-se também Carnot de um método análogo à demonstração indireta, usada desde a antiguidade. Tal método consistia em aceitar como válidas certas hipóteses cuja negação implicasse em consequências incompatíveis com os fatos empíricos já conhecidos. [GLAS 2002:714-715]

Excluída a exigência de que os fatos empíricos fossem conhecidos antecipadamente, esse método seria descrito, ulteriormente, como quasiempírico. [LAKATOS 1976:205-207]

Carnot também publicou *De la corrélation des figures de géométrie* (1801), na qual considerou as correlações diretas (entre os pontos do sistema inicial e os pontos do sistema transformado) e as correlações indiretas (no sentido inverso); e a *Géométrie de position* (1803), na qual, mediante métodos algébricos, procurou dar à geometria das transformações um caráter tão geral quanto o caráter da geometria analítica. Tentou, por exemplo, encontrar uma caracterização algébrica de curvas que fosse independente do sistema de coordenadas adotado. Nessa tarefa, usou o raio de curvatura como um tipo de coordenada intrínseca. Também usou o conceito de centro de gravidade, para analisar, de modo puramente geométrico, o movimento de sólidos no espaço. [GLAS 2002:715-716; STRUIK 1933:114-115]

Em 1794, o governo revolucionário francês cometeu a Lagrange, Laplace e Monge o ensino, na recentemente fundada *École Normale*, dos adequados métodos de pesquisa e de ensino pertinentes aos ramos do saber nos quais cada um se houvesse distinguido. Acreditavam os integrantes do governo que a matemática e as outras ciências, por mais avançadas que fossem, deveriam ser expostas de modo tão lógico e sistemático que fossem universalmente compreendidas. [GLAS 1989:116; GLAS 1993:240]

Fora desígnio dos mentores intelectuais desse governo reformar o ensino, substituindo os antigos cursos enraizados na teologia e na metafísica por cursos bafejados pelo pensamento contemporâno. A fim de se obter uma exposição que satisfizesse à exigência de compreensão universal, deveria a linguagem das ciências ser retificada, expurgando-a de todos os vestígios *metafísicos*. [GLAS 1986:249-250; GLAS 1993:240]

Em parte, atendia a esse escopo o empreendimento anterior de Lagrange, ao tentar eliminar os infinitésimos, admitidos como **ficções úteis** por Leibniz, que assim se exprimira em carta de 1715: "[...] o cálculo infinitesimal é útil, quando se trata de empregar a matemática na física. Não é esse, de forma alguma, o modo segundo o qual pretendo

explicar a natureza das coisas, pois considero as quantidades infinitesimais como ficções úteis". [*Apud* CLÉRO 1998:451]

E, antes de Lagrange, d'Alembert, descontente com a formulação por Newton das três leis do movimento, talvez por considerar que forças também fossem apenas ficções úteis, enunciou as três leis, excluindo as supostas causas, focando apenas os movimentos e "banindo assim inteiramente das ciências a concepção das forças como inerentes aos corpos em movimento. Tais forças são apenas seres metafísicos e obscuros que fazem mergulhar na escuridão uma ciência que, em si mesma, é clara. (D'Alembert substitui as leis de Newton por outras três: a lei da inércia, a lei da composição dos movimentos e a lei do equilíbrio. Também Euler sentiu desconforto com a formulação proposta por Newton e definiu as forças como os entes responsáveis pela mudança no estado dos corpos.) [MAGLO 2003:140-142]

A concepção dos membros do governo revolucionário nutrira-se na *Logique* (1980), de Étienne Condillac, que professara um sensualismo extremo, cognato da concepção filosófica que d'Alembert abraçara no *Discurso preliminar da Enciclopédia* (1751) e do sistema filosófico anteriormente propugnado por Locke.

A esse respeito, distinguem-se duas posições: a posição dos racionalistas, que sustentavam fundar seus sistemas desde alguns princípios gerais, simples e claros, que lhes forneciam a razão *a priori*; e a posição dos empiricistas, para os quais a razão procede da sensação (e para os quais, portanto, **o inteligível** sucede a**o sensível**). Os empiricistas asseveravam que os princípios adotados pelos racionalistas jamais seriam primários. Tais princípios seriam, quando muito, abstrações intuitivas, mal conduzidas, que se deveriam recusar, a fim de se atingir o conhecimento verdadeiro. De fato, Condillac preconizava que a redução do complexo ao simples fosse o método reflexivo, mediante o qual se obtinha progresso cognitivo. O erro dos racionalistas consistia em confundir o simples primitivo, que se encontra nas sensações, com a aparente simplicidade do geral elaborado pela razão, o qual supunham os racionalistas estivesse sempre na razão e o qual não reconheciam como o produto da experiência sensível. [MONNIN 2004:820-821]

No *Essai sur l'origine des connaissances humaines* (1746), Condillac considerou que as ideias integrassem uma rede, conectando-se às outras. Através dessas conexões, o conhecimento se produziria e se expandiria. [THOMAS 2003:300]

No *Traité des Sensations* (1754), Condillac declarou que "nossos sentimentos, nossos juízos e nossas ações, sobretudo todos os produtos psíquicos até as mais altas ideias são apenas efeitos ulteriores de nossas impressões sensoriais; todas as atividades psíquicas são sensações transformadas, toda a vida espiritual é a vida sensual; todas as tendências, incluídas as morais, procedem do amor próprio." (11) [FRIEDELL 1974:664]

Nesse *Traité des Sensations*, Condillac expusera que uma ideia fosse apenas a reunião de sensações no seio de uma única inteligência; que o conhecimento fosse induzido diretamente dos fenômenos; que as hipóteses, sobretudo acerca de objetos não observáveis, não encontrassem lugar nas ciências. Contudo, a composição indutiva de ideias desde

sensações e a dedução de suas consequências lógicas exigiam que esses elementos fossem representados por sinais, a fim de que pudéssemos distingui-los e exprimi-los. Portanto, a aquisição, a exposição e a comunicação (incluído o ensino) das ciências dependiam estreitamente de algum sistema de sinais, isto é, de uma **linguagem**, como um veículo de ideias. Condillac distinguiu cinco formas de linguagem: a gestual, a oral, a escrita, a cifrada e o cálculo infinitesimal; e afirmou que todo método de análise e de classificação de fenômenos é essencialmente uma linguagem. [GLAS 1986:251-252]

O conhecimento deveria ser extraído das impressões sensoriais e as ciências deveriam ser exatamente um relatório altamente sistemático e lógico de tal conhecimento, cabendo-lhes elaborar as relações dedutivas entre as ideias (as sensações compostas). O raciocínio lógico consistiria na transformação e no rearranjo das ideias, isto é, no cálculo mediante sinais, em estrito acordo com as regras sintáticas da linguagem empregada. [GLAS 1986:252]

A visão de Condillac concordava, pois, com a prática sintática adotada por Euler, com a inquietação manifestada por d'Alembert para com as leis do movimento enunciadas por Newton e com os lineamentos que Lagrange pretendia para o cálculo infinitesimal e para a mecânica, construídos independentemente de argumentos geométricos. Mas não ratificava a prática conceitual de Euler pois, se a certeza da matemática derivava da clareza distintiva de seus conceitos, como afirmara Descartes, e se a clareza de um conceito correspondia à sua proximidade da experiência sensual, então os infinitésimos e as razões evanescentes, considerados por Euler como 'seres da razão' dotados de realidade, não mereceriam confiança no âmbito de uma concepção sensualista das ciências, inspirada em Locke e em Condillac. [DASTON 1986:270-272; RICHARDS 1986:301-302]

Também a visão matemática propugnada por Monge condizia com o ideário fundado na opinião de Condillac. De fato, Monge ensinava um sistema geométrico que não se restringia aos teoremas euclidianos (então considerados meros produtos da razão humana) mas incluía um acervo de novos teoremas decorrentes da introdução de dois métodos. O primeiro deles, a descrição de corpos mediante a projeção ortogonal em dois planos perpendiculares, embora já fosse conhecida desde Albrecht Dürer, somente foi elevado à condição de uma técnica exata nas lições de Monge. O segundo método consistia em conceber superfícies como o resultado de um processo de geração: Toda superfície poderia ser gerada pelo movimento de uma curva que, durante o movimento, poderia modificar continuamente a própria forma. Disso decorre que toda superfície poderia ser completamente descrita pela especificação de duas curvas geratrizes que se intersecassem em um qualquer ponto da superfície vertente. Monge substituiu a antiga classificação das superfícies, baseada no grau e no tipo da correspondente expressão analítica, por uma classificação genética, apoiada no modo de geração, a qual se mostrou mais eficaz no estudo teórico das superfícies. No emprego desse segundo método, Monge servia-se tanto de técnicas geométricas quanto de técnicas analíticas, o que lhe permitiu traduzir as propriedades dos planos tangentes a diversas famílias de superfícies na linguagem das equações diferenciais parciais. [GLAS 1986:256-257; GLAS 2002:713-714]

Mas, embora fossem essas duas concepções (a de Lagrange, por um lado, e a de Monge, pelo outro) compatíveis com a concepção sensualista de Condillac, ambas divergiam fortemente entre si.

Consoante Lagrange e Laplace, a matemática seria uma linguagem formal, um sistema de sinais ordenados de acordo com regras sintáticas especificadas; o raciocínio válido nessa linguagem deveria ser inteiramente independente de significações ou interpretações, como as imagens geométricas. As regras seriam empregadas *mecanicamente*, isto é, sem recurso à imaginação humana. (Desse modo, excluir-se-ia o raciocínio humano, capaz de incorrer em erros.) Tais regras seriam escolhidas de modo que fossem consistentes e fossem adequadas ao objeto geral da matemática: a edificação e a exposição da mecânica analítica e da mecânica racional. Nesse edifício teórico, a geometria seria apenas um recurso gráfico usado por pessoas não iniciadas na análise. [GLAS 1989:117; GLAS 1986:253-256; GLAS 1993:240]

Segundo Monge, a matemática não seria um dispositivo lógico autônomo mas uma ciência quase empírica, que trataria de todas as transformações de configurações no espaço. A análise seria apenas a ementa do 'espetáculo geométrico móvel', enquanto a geometria proveria métodos apropriados de investigação e de demonstração. Monge já não considerava a geometria apenas como o estudo das congruências e das medidas mas também incluía em seu objeto os movimentos mediante os quais as configurações espaciais se transformavam e as relações estruturais entre as configurações assim transformadas. Enfim, "Monge mostrou, desde os primeiros trabalhos, que a união entre a geometria e a análise é útil e fecunda; e que talvez essa aliança seja uma condição de bom êxito de ambas." [DARBOUX 1905:518-519; GLAS 1989:117-119; GLAS 1986:253-256; GLAS 1993:240-241]

Afirmou, outrora, Henri Lebesgue que, "segundo seu modo de ver, o matemático enquanto matemático não se deve preocupar com a filosofia, opinião essa compartilhada por muitos filósofos. Seus esforços de reflexão e de compreensão devem ser, de algum modo, interiores à matemática em vez de incidirem sobre as relações dessa disciplina com a filosofia." (12) [LEBESGUE 1975:179]

Embora não considere essa opinião como prescritiva, reconheço que ela pode ser descritiva. Condiz com o episódio que está sendo examinado pois o próprio Lagrange, em uma memória dedicada às equações diferenciais de primeira ordem, *Sur les intégrales particulières des équations différentielles* (1776), considerando a equação $f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y) = 0$, definiu uma solução como completa, se ela dependesse de duas constantes arbitrárias e justificou a nomenclatura, mostrando que, variando-se essas constantes, se obtêm todas as outras soluções. Em seguida, Lagrange revelou o significado geométrico dos termos usados. Uma solução completa define uma família de soluções com dois parâmetros, enquanto a solução geral corresponde à totalidade das envoltórias de uma subfamília com um parâmetro, arbitrariamente escolhida, da família de superfícies contidas na solução completa. Finalmente, uma solução singular determina a envoltória de toda a família de superfícies, com dois parâmetros, incluída na solução completa. [DEMIDOV 1982:331]

Essa memória demonstra que, pelo menos em uma fase de sua prática matemática, Lagrange não se pejava de buscar interpretações geométricas, embora depois se houvesse pronunciado a respeito da análise como uma teoria não interpretada. Tampouco desdenhava da capacidade interpretativa de seus pares pois, referindo-se a Monge, dissera: "Com sua geometria, este demônio de homem far-se-á imortal." (13) [DARBOUX 1905:518]

Segundo DARBOUX (*ibidem*), comentava-se ter Lagrange invejado Monge, por esse haver efetuado a elegante integração da equação diferencial das linhas de curvatura do elipsoide.

3.7 A gênese do culto do rigor

> "Ninguém, de sã consciência, sustentaria que o rigor não é histórico. Com efeito, um simples exame da Lógica e da Matemática gregas mostra que o rigor de hoje está muito longe daquele dos gregos. Mesmo os conceitos de rigor implícitos na matemática do século XIX, antes e após a criação da teoria dos conjuntos, divergem muito. E o padrão de rigor que se exige em nossos dias provavelmente não será aceito como razoável no século XXI. Em vista do significado do rigor para a Lógica e a Matemática, não existe argumento positivos algum que nos habilite a negar a historicidade dessas ciências." [DA COSTA 1994:232]

> "[...] podemos dizer, com fidelidade razoável aos fatos, que o século XVIII foi gasto, em grande parte, na exploração dos novos e poderosos métodos de cálculo, que o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente [...]". [EVES 1997:462-463]

Embora tenha pretendido apenas resumir uma narrativa feita nos parágrafos anteriores de seu livro, o autor desse segundo excerto incidiu em dois pecados veniais.

O primeiro pecado consiste em atribuir homogeneidade à obra matemática produzida em um mesmo século, denunciando um vestígio subconsciente de uma concepção escatológica do tempo. [WHITROW 1993: 48, 68-69] Sabemos que séculos são meros intervalos temporais baseados em duas convenções: A escolha da base dez para representar os números naturais e a escolha de uma certa data como a origem da era vulgar. Supor uma distinção entre as práticas adotadas nos séculos XVIII e XIX equivale a supor que a mera passagem do ano 1800 para o ano 1801 implicasse uma mudança nos cânones conceituais e

discursivos que fossem dominantes em cada fase do conhecimento matemático, suposição essa que, acredito, Howard Eves jamais subscreveria.

O segundo pecado resume-se, não no asserto, mas na sugestão de que não houvesse, no século XVIII, nenhum esforço voltado para a fundação do cálculo. Já discutimos o cuidado com que d'Alembert e Lagrange trataram o quesito dos fundamentos.

Surgiram, porém, condições sociais que suscitaram um maior interesse por quesitos de rigor, dentre elas as diversas mudanças, algumas decorrentes do ideário que acompanhou a Revolução Francesa. Associadas a essas mudanças, foram criadas práticas laborativas distintas para a comunidade dos matemáticos.

No curso do século XVIII, antes dessa revolução, a maior parte da comunidade matemática consistia em eruditos [*scholars*] e em profissionais liberais [*practitioners*]. Os dois grupos eram totalmente separados mas ainda existiam conexões. Alguns matemáticos estavam vinculados a cortes reais e sua tarefa consistia em produzir matemática, fomentando assim a glória e a edificação de seu mecenas. Leonhard Euler, por exemplo, esteve, durante a maior parte da vida, vinculada à Academia de São Petersburgo. A base institucional da comunidade dos matemáticos eram as academias e as sociedades científicas. As academias uniam a produção da matemática aos seus campos de aplicação, sendo tarefa de seus membros a busca da verdade e a produção de saber útil. Por isso, os matemáticos também estavam interessados em matemática *aplicada*, interesse manifesto, por exemplo, na obra de Monge e de Carnot, que acentuavam o emprego da matemática na engenharia. [GRABINER 1974:360; MEHRTENS 1976:314]

Mas, durante e depois da Revolução Francesa, uma nova classe social tornou-se dominante. O sistema de educação foi modificado e fortalecido. A Revolução Francesa conduziu ao estabelecimento da *École Polytechnique* e da *École Normale*, que tiveram enorme significado na história da matemática. Quase todos os matemáticos tornaram-se empregados em universidade e em escolas técnicas. A França, centro da matemática e da ciência na virada do século XVIII para o século XIX, era o modelo para eruditos de outros países. [MEHRTENS 1976:314; STRUIK 1987:142]

Ocorreu uma surpreendente proximidade entre o interstício durante o qual se estendeu o reinado de Napoléon Bonaparte (1799 - 1814) e o interstício no qual o movimento romântico alemão exibiu maior vigor. Em 1794, foi publicada a primeira edição da *Fundação de teoria total do conhecimento como testamento para o seu público* [*Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre als Handschrift für seine Zuhörer),* de Johann Fichte, que influiu intensamente no clima cultural alemão. As opiniões de Fichte representavam uma reação alemã aos recentes acontecimentos na França e o ápice da fama desse autor foi alcançado nos anos 1807 e 1808, nos quais proferiu diversos *Discursos à nação alemã* [*Reden an die deutsche Nation*], destinados a concitar a resistência contra a ocupação da Alemanha pelo exército de Bonaparte. O núcleo de ambos os escritos era uma filosofia da educação que colimava a formação de uma identidade interna germânica. No seio dessa identidade, criou-se um clima cultural que conformaria o desenvolvimento das ciências na Alemanha. [JAHNKE 1993:266]

Havia, nesse clima cultural, um amplo consenso acerca da natureza do relacionamento entre as ciências puras e as práticas científicas. Consoante essa opinião, as ciências seriam perseguidas, não por causa de seus empregos técnicos ou comerciais, mas porque as ciências poderiam contribuir para uma consciência dos problemas vitais, como a compreensão da sociedade e de sua finalidade e como a formação [*Bildung*] individual. Resumidamente, as ciências nutririam o entendimento da natureza e da sociedade. "Exatamente como a filosofia e as artes produzem interpretações da realidade, também assim a ciência foi então vista como parte desse esforço interpretativo." (16) [JAHNKE 1993:267]

Para se descrever essa atmosfera cultural, tem sido usada a locução *cultura hermenêutica*. Nessa cultura hermenêutica, Fichte advogava um programa educacional que envolvesse a matemática pura, porque a habilidade de pensar abstratamente era a precondição decisiva para se cogitarem alternativas na elaboração de um projeto para o futuro. Mas a inserção da matemática nessa cultura hermenêutica implicaria em mudança na sua metodologia, já que a matemática não se restringiria a elaborar procedimentos algorítmicos para o cálculo de grandezas e que, portanto, a ênfase no ensino se faria sobre o entendimento das relações que vigorassem entre os diversos objetos matemáticos. O entendimento de tais relações sugeriria, frequentemente, que os conceitos fossem estendidos, a fim de serem contemplados abstratamente. No âmbito desse programa, era oportuna a aproximação entre as ciências e as artes pois "a ciência genuína deve estar imbuída e animada de um pressentimento de um poder fundamental cuja essência se reflete em uma ideia original, como em um espelho, e deve conectar-se com a totalidade dos fenômenos", como explicava Wilhelm von Humboldt, na obra *Das condições sob as quais a ciência e a arte prosperam em uma nação. Com deferência especial à Alemanha e ao tempo hodierno* (1814). (17) [JAHNKE 1993:267] Na verdade, desde então, os *matemáticos puros* têm acolhido com carinho as analogias entre a matemática e as artes.

Para melhor mostrar que essa atmosfera cultural fosse nova, cabe lembrar que, na *Crítica do julgamento* (1790) [*Kritik der Urteilskraft*], Kant havia acentuado a distinção entre o espírito da ciência e o gênio da arte. O artista poderia ser um gênio pois, do mesmo modo que a Natureza, produz inconscientemente, enquanto o cientista não poderia sê-lo, já que progride metódica e racionalmente. Pretendendo estender o projeto crítico de Kant, Fichte concebeu uma teoria do conhecimento [*Wissenschaftslehre*], submetendo a uma ulterior interrogação crítica as condições que seu mestre julgara serem necessárias à cognição. No curso dessa tarefa, Fichte opôs-se às categorias postuladas por Kant como condições da consciência de si mesmo. De fato, Kant atribuíra à atividade inconsciente da imaginação transcendental a síntese na intuição de tais categorias. Fichte tentou estudar os fatos [*die Tatsache*] da consciência, examinado a atividade de pensamento que os produz, a que chamou a ação do ato [*die Tathandlung*]. Em vez de admitir que o *cogito* estivesse presente em todos os estados de consciência, Fichte pedia aos interlocutores que atentassem a toda a atividade do pensamento e a toda a dinâmica da razão envolvidas no pensar o ego. [JAHNKE 1991:289; STEIGERWALD 2003:121-122]

Nos *Fundamentos de toda a teoria do conhecimento* (1794) [*Grundlagen der gesamten Wissenschaftslehre*], Fichte introduziu a noção de 'se colocar' [*sich setzen*], a fim de impedir o efeito alienante da reflexão infinita: "A colocação do ego através de si mesmo constitui assim sua própria atividade pura. — O ego coloca-se e, em virtude desse mero asserto de si mesmo, o ego é. E, reciprocamente, o ego é e se coloca o seu ser [Sein] em virtude de seu mero ser. Simultaneamente, o ego é o agente [*der Handelnde*] e o produto de sua ação [*Handlung*]; o ativo [*der Tätige*] e o produto de sua atividade [*die Tätigkeit*]. A ação [*die Handlung*] e o ato [*der Tat*] são a mesma coisa. Logo, *sou* [*ich bin*] exprime a ação do ato [*die Tathandlung*]. [STEIGERWALD 2003:122]

De certa forma, Fichte considerava o ego como princípio universal, independente de toda experiência e constituinte da experiência. Essa ideia é cognata com a ênfase que o romanticismo atribuía à autonomia do indivíduo criativo. Assim, por exemplo, um pintor não seria compelido a praticar uma arte representativa da realidade mas estaria livre de adotar um sistema de representação coerente e fechado, independente da realidade empírica. Nesse sistema, poderia criar uma realidade subjetiva, livre de todas as restrições da realidade física. De acordo com Novalis (pseudônimo do poeta romanticista Friedrich von Hardenberg), a matemática se coadunava exemplarmente a essa concepção, por admitir entes fantásticos, como os *números imaginários*. [JAHNKE 1991:289-291]

A reforma da universidade alemã, que começou com a fundação da universidade de Berlin em 1809, mesclou traços do modelo francês com diversas ideias filosóficas especificamente alemãs, entre as quais a incipiente reação à doutrina, esposada por Kant, de que a matemática construísse os conceitos mediante a intuição pura do espaço e do tempo. Ainda que essa doutrina fosse aceita por alguns matemáticos, ela era refutada pela prática matemática ao longo da segunda metade do século XVIII, cujo paradigma fora a *Introductio in analysin infinitorum* (1748), de Euler, na qual se pretendia que o cálculo infinitesimal *não* se fundasse na geometria. A discordância entre a doutrina kantiana e a prática contemporânea dos matemáticos fora denunciada por Johann Herder, na obra *Razão e linguagem. Uma metacrítica à Crítica da Razão Pura* (1799) [*Vernunft und Sprache. Eine Metakritik zur Kritik der reinen Vernunft*], como "um profundo erro conceitual de que a construção visível devesse exaurir a essência da matemática". [JAHNKE 1993:267-268; MEHRTENS 1976:314]

Também Bernard Bolzano, nas *Contribuições a uma representação mais bem fundada da matemática* (1810) [*Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*], prefigurando a doutrina que exporá ulteriormente, criticou a visão de Kant como insuficiente para descrever a aritmética e a álgebra e repudiou a doutrina de que a matemática consistisse na construção de conceitos na intuição pura. Recusou que a matemática fosse uma teoria das grandezas [*Gröszenlehre*] ou que se ocupasse com a prova da existência das coisas e afirmou que ela apenas tratasse das condições da possibilidade de tal existência. (18) [JAHNKE 1991:280]

Afirmou ainda que a *methodus mathematica* não se distinguisse, essencialmente, do método adotado em qualquer exposição científica, que, portanto, seu método fosse baseado apenas na Lógica e que o seu fundamento fosse independente de considerações de ordem

psicológica. Assim, propôs que a matemática fosse construída sem se invocar a intuição. [BEHBOUD 2006:356; BELL 2006:362-363; JAHNKE 1993:268]

A reforma da universidade alemã configurou-se em uma tentativa de assentar a autonomia dos eruditos sem violar os limites impostos pelo estado político dos países alemães. Embora os cientistas não houvessem participado da reforma, ela se revelou muito favorável ao desenvolvimento da matemática e das ciências naturais. A característica principal dessa reforma consistia em ser o ensino dirigido a estudantes que podiam permanecer na universidade, a fim de se tornarem docentes. No caso da matemática, o suporte institucional era suprido pelo instituto [*Institute*] e pelos seminários [*Seminare*] que seriam fundados durante o século XIX. Assim, os matemáticos podiam ensinar os ramos da matemática em que eles próprios estavam trabalhando, ascendendo prontamente o ensino ao nível da pesquisa efetiva. Por outro lado, os matemáticos voltaram seu interesse profissional às matérias que estavam ensinando, ficando mais envolvidos com as partes elementares de suas disciplinas. Além disso, a separação entre escolas técnicas [*technische Hochschulen*] e universidades favoreceu o afastamento entre a matemática e a tecnologia. [MEHRTENS 1976:314-315]

O primeiro desses seminários foi fundado na Universidade de Königsberg (1834) pelo físico Franz Neumann e pelo matemático Carl Jacobi e consistia em duas divisões, uma dedicada à matemática (na qual se incluíam a mecânica e a astronomia física) e outra devotada à física ensinada com formação matemática. Quatro características distinguiram o funcionamento desse seminário. Primeira: Após completar os estudos (isto é, ser aprovado nos exames), muitos estudantes trabalhavam como docentes em escolas secundárias (*Gymnasium*), elevando significativamente o nível do ensino. Segunda: Jovens pesquisadores transferiam as ideias educacionais básicas inerentes ao seminário para outras universidades, nas quais eram adaptadas e amadurecidas. Terceira: No contexto da matemática e da física, o seminário influiu fortemente no desenvolvimento tanto de áreas quanto da metodologia de pesquisa. Quarta: Pela influência de Franz Neumann (exercida por mais de quatro décadas), foi criada uma nova disciplina, a física matemática (ou física teórica). [SCHWERMER 2010:357-358]

Como houvesse uma condição social firme para os matemáticos e sua principal tarefa fosse o recrutamento da nova geração, ocorreu uma concentração progressiva na matemática pura. Esse fato aliado aos efeitos e às necessidades do novo estilo de ensino universitário converteu o rigor em um valor de alta prioridade. [MEHRTENS 1976:315]

Não posso, porém, eximir-me de afirmar o caráter histórico do rigor. Isso se verifica, facilmente, considerando-se a primeira prova, dada por Carl Gauss, do *teorema fundamental da álgebra*. O argumento proposto por Gauss foi admirado, durante mais de um século, como a primeira prova verdadeira desse teorema, apenas vislumbrado por Albert Girard (1629) e demonstrado deficientemente por d'Alembert (1746), por Euler (1751) e por Lagrange (1772). [BALTUS 2004:415; STRUIK 1987:142]

Nessa primeira prova, que figurou na sua *Dissertação* (1799), Gauss recorreu ao lema, que lhe parecia evidente, de que, se um ramo de uma curva polinomial real $F(x,y) = 0$ entrar em uma região planar, esse ramo abandonará essa região. Gauss acrescentou que, **tanto quanto ele soubesse, a ninguém ocorreria duvidar desse fato**. Posteriormente, Gauss propôs três outras provas e, na última, publicada depois de meio século (em 1849), novamente se amparou no citado lema. Esse lema, contudo, somente seria provado em torno de 1920. [HIRSCH 1994:187-188]

Ao indicar a historicidade do rigor, pretendo acentuar que o rigor não seja uma qualidade da matemática mas apenas uma de suas técnicas, a qual, assim como toda essa ciência, evolve e se aperfeiçoa no curso do tempo. "Podemos seguramente dizer que nenhuma prova dada pelo menos até 1800, em qualquer área da matemática, exceto possivelmente na teoria dos números, seria considerada satisfatória consoante os cânones de 1900. E que os cânones de 1900 já não são aceitáveis hoje em dia." [KLINE 1976:78-79]

Descritas as condições sociais sob as quais medrou o culto do rigor, resta examinar os fautores internos à própria matemática. (Essas descrições não pretendem instituir relações causais entre os fatos históricos mas tão somente figurar certas circunstâncias que antecederam esses fatos e que lhes podem haver favorecido a ocorrência.) Considerarei três circunstâncias:

A primeira circunstância foi a comparação com a geometria, que desde a Antiguidade era considerada o protótipo de uma teoria organicamente rigorosa. Se se pretendia que o cálculo se configurasse em uma teoria autônoma (isto é, independente da geometria), cumpriria dotá-lo de fundação tão sólida quanto a geometria. Essa emulação foi acerbada pela emergência da geometria descritiva, na obra de Monge.

A segunda circunstância foi a percepção de que o progresso do cálculo já não era tão rápido quanto outrora. Lembremo-nos, a esse respeito, da confidência epistolar de Lagrange a d'Alembert. O enfraquecimento no ritmo de descobrimento de novas técnicas permitiu que os matemáticos refletissem com maior esmero sobre a coerência de toda a obra edificada.

A terceira circunstância foi a necessidade de procedimentos seguros, que prevenissem a ocorrência de antinomias, que permitissem a exploração serena de novos objetos (como as funções de variável complexa e as funções de diversas variáveis reais), e que consentissem o tratamento cômodo de técnicas que se mostraram indispensáveis (como as séries de funções circulares). [GRABINER 1974:358]

Talvez o maior impedimento ao uso coerente das séries fosse o quesito de sua convergência, problema que impendia resolver satisfatoriamente, por constituírem as séries ferramenta eficaz na resolução de diversos tipos de equações diferenciais.

Uma das faces desse problema era "a representação das potências do seno e do cosseno mediante múltiplos de seus arcos" [(19)]. As fórmulas disponíveis às vezes conduziam a antinomias que eram consideradas carentes de interpretação. O próprio Euler, em um escrito

sobre séries de funções circulares destinadas a representar tais potências, escreveu as relações seguintes, afirmando merecerem elevada atenção [JAHNKE 1987:111]:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots = (1/\sqrt{2}).\cos(\pi/4) = 1/2$$

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - \ldots = (1/2)\cos(\pi/2) = 0$$

$$1 - 6 + 15 - 28 + 45 - 66 + 91 - \ldots = (1/\sqrt{8})\cos(3\pi/4) = -(1/4).$$

Como não se soubesse, então, detectar o erro, a comunidade se contentara parcialmente de afirmar que a fórmula fosse *geralmente* correta mas não se aplicasse a certos casos. Não se deve julgar tal atitude da perspectiva hodierna, separada por dois séculos daquele contexto histórico pois, ainda em 1821, o protagonista do culto do rigor, Augustin Cauchy, publicaria um teorema (sobre a convergência de séries de funções contínuas) que admitia exceções, como observaria Niels Abel, em uma nota de rodapé a um escrito de 1826. [JAHNKE 1987:104]

Entre as tarefas que Lagrange se arrogou encontrava-se a demonstração de uma fórmula proposta por Euler para exprimir $(2.\cos x)^m$. Na undécima de suas *Leçons sur le calcul des fonctions* (1806), informou Lagrange "qu'un des principaux avantages des fonctions dérivées est de pouvoir faire disparaître dans les équations les puissances et les radicaux". Assim, derivando a expressão $y = \cos^m x$ e divindindo a derivada pela função dada, Lagrange obteve a equação diferencial $(y'/y) = -m.\tan x$ ou, equivalentemente, $m.y.\sin x + y'.\cos x = 0$ cuja, solução, expandida em série, demonstrava a fórmula desejada, para qualquer valor de m (positivo, negativo, racional ou irracional). Pouco depois (1811), porém, Siméon-Denis Poisson mostrou que, para $x = \pi$ e $m = (1/3)$, a fórmula era falsa. [JAHNKE 1987:107,114-115]

Foi decisiva a intervenção de Poisson, por evidenciar um novo fenômeno (depois denominado paradoxo de Poisson): Para algumas escolhas de m e de x, a série correspondente à expansão formal $(2.\cos x)^m$ é convergente mas converge a valores *falsos*, isto é, distintos dos valores que se obtêm, quando se fazem as mesmas escolhas na função $(2.\cos x)^m$. [SOERENSEN 2005:457]

Em 1817, Bolzano publicou um ensaio, no qual oferecia uma prova puramente analítica [*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dasz zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*] do teorema segundo o qual existe uma raiz de uma função polinomial entre dois pontos de seu domínio nos quais essa função assume valores de sinais distintos. Na prefação a esse escrito, Bolzano propôs a definição de função contínua que se tornou aceita até hoje, dizendo que "uma função f(x) varia de acordo com a lei da continuidade para todos os valores de x", quando "dado um tal x, a diferença f(x + h) - f(x) se torna menor que qualquer quantidade dada, desde que se tome h tão pequeno quanto se queira". Também nesse ensaio, Bolzano introduziu e provou a existência de um elemento que, ulteriormente, seria definido como o supremo de um conjunto limitado

superiormente. Por isso, presentemente, chamamos teorema de Bolzano-Weierstrass ao asserto de que "toda sequência limitada de números reais admite uma subsequência convergente". [DESANTI 1962:186; FREUDENTHAL 1971:379; GRATTAN-GUINNESS 1970:374, 377, 395]

Nos comentários preliminares, Bolzano manifestou seu descontentamento com o modo segundo o qual seus contemporâneos demonstravam o teorema descrito no título do ensaio e expunham toda a análise; e preconizou o emprego das provas puramente analíticas, não por que duvidasse da validade dos métodos usuais de perscrutação ou da veracidade das ilações mas por pretender, mediante provas puramente analíticas, explicar as razões objetivas do teorema demonstrado. [KITCHER 1975:229-231, 236]

Em 1823 e em 1825 apareceram dois trabalhos independentes, nos quais se davam as expansões corretas da função $(2.\cos x)^m$, o primeiro assinado por Louis Poinsot e o outro firmado por Martin Ohm. Finalmente, em 1826, após uma estada em Berlin (1825-1826), durante a qual lera alguns escritos de Bolzano, Abel publicou um artigo sobre a série binomial, no fim do qual apresentou a fórmula correta da soma da citada série de funções circulares e de outras séries semelhantes. Esse ensaio de Abel foi vazado nos princípios e no estilo que Cauchy começara a imprimir a seu curso de análise, cuja primeira parte fora editada em 1821, no qual retomou a reforma do cálculo infinitesimal iniciada por Lagrange. [JAHNKE 1987:104; SCHUBRING 1993:45]

Na *Introduction* ao *Cours d'analyse algébrique* (1821), Cauchy advertiu da inadequação do formalismo praticado, desde que se esvaziaram os conceitos da análise infinitesimal de seu conteúdo geométrico, insistindo em que não se deveria "jamais recorrer às razões extraídas da generalidade da álgebra. As razões dessa espécie, embora admitidas com bastante frequência, sobretudo na passagem das séries convergentes às séries divergentes e na transição das quantidades reais às expressões imaginárias, não podem ser consideradas [...] senão como induções às vezes adequadas a fazer pressentir a verdade mas que pouco se acordam com a exatidão da matemática. Deve notar-se que tais induções tendem a fazer com que se atribuam às fórmulas algébricas um extensão indefinida, enquanto, na verdade, a maior parte dessas fórmulas subsistem apenas sob certas condições e para certos valores das variáveis envolvidas". (20) [*Apud* BRUNSCHVICG 1872:330-331]

E concluiu: "Determinando-se essas condições e esses valores e fixando-se com precisão o significado das notações de que me sirvo, faço com que se extinga toda a incerteza." (21) [*Apud* FREUDENTHAL 1971:376]

O curso de análise de Cauchy foi um dos primeiros textos nos quais a matemática era apresentada como **um sistema conceitual**, contrariando a ideia, então dominante, da **autonomia das fórmulas**.

Entrementes, em sua *Théorie mathématique de la chaleur* (1811), Joseph Fourier havia representado diversas funções mediante séries de funções circulares e afirmado que toda função admitiria esse tipo de representação (presentemente designada como *série de Fourier*). Foi corrigido por Lejeune Dirichlet (1829), que mostrou não ser toda função representável

por séries de Fourier e explicitou um critério para a validade de uma tal representação. [FIGUEIREDO 1977:42]

As condições exigidas nesse critério eram tão tênues, que Dirichlet foi levado às fronteiras do que se poderia conceber como função e, enfatizando a correspondência unívoca entre os valores da variável independente e os valores da variável dependente, foi induzido a recusar que a definição de uma função impusesse sua expressão através de uma fórmula ou de um procedimento de cálculo. [DESANTI 1962:181-182; EDWARDS 1992:7]

Nesse aspecto, Dirichlet foi precedido por Condorcet e por Delacroix. É oportuno referir que, no interstício de 1822 a 1826, Dirichlet seguira cursos de Lacroix, em Paris. [TATON 1954:172]

Condorcet começara a redação de um *traité du calcul intégral* em 1778, cuja impressão foi iniciada em 1786 mas foi interrompida pelo advento da Revolução Francesa. Nesse texto, Condorcet teve o cuidado de acentuar que uma função é uma relação que associa os valores de F às variáveis x, y, z: "Ainda que eu não soubesse o modo de exprimir F em x,y,z nem a forma da equação entre F e x,y,z, eu saberia que F é função de x,y,z." (22) [*Apud* DHOMBRES 1986:155]

Condorcet distinguiu três tipos de funções:

(a) As funções cuja forma é conhecida. (Hoje dizemos *funções definidas explicitamente*.)

(b) As funções introduzidas por equações não resolvidas nas figuram F e as variáveis x,y,z. (Hoje dizemos *funções definidas implicitamente*.)

(c) Funções dadas somente por certas condições (por exemplo, por equações diferenciais).

Condorcet forneceu exemplos mecânicos, para ilustrar o terceiro tipo, acrescentando que pertencem a essa classe "funções que apenas são conhecidas, por se saber, em geral, que uma certa quantidade será determinada, quando outras o forem". [*Apud* YOUSCHKEVITCH 1976:75-76]

E Lacroix narrou, *didaticamente*, a evolução do conceito: "Os antigos analistas compreendiam, geralmente, sob o nome de funções de uma quantidade, todas as potências dessa quantidade. Em seguida, estenderam os analistas o significado desse vocábulo, aplicando-o aos resultados das diversas operações algébricas. Assim, chamou-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão algébrica que encerrasse, em qualquer forma, somas, produtos, quocientes, potências e raízes dessas quantidades." (23) [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:334]

Concluiu Lacroix, propondo a conceituação adequada: "Enfim, novas ideias, trazidas pelos progressos da análise, ocasionaram a definição seguinte de funções. Toda quantidade cujo valor depende de uma ou de diversas outras quantidades é dita função

dessas últimas, quer se saiba, quer não se saiba quais operações devam ser efetuadas, a fim de reportar essas últimas à primeira quantidade." (24) [*Apud* DHOMBRES 1986:154]

Mas Lacroix (em 1797) ainda não hesitava em considerar evidente que toda função fosse derivável: "A propriedade, comum a todas as funções, de admitir limite a razão entre os incrementos da função e os correspondentes incrementos da variável das quais elas dependem, limite esse diferente para cada função, porém constantemente o mesmo para uma mesma função e sempre independentes dos valores absolutos dos incrementos, é um fato analítico bem verificado." (25) [DHOMBRES 1986:157]

Habituados ao tratamento apresentado nos textos didáticos atuais, parece-nos difícil crer que matemáticos tão lúcidos não percebessem estarem incorrendo em erro. Na verdade, como aponta LAUGWITZ [2000:272], Ampère (que também ensinara matemática e mecânica na *École Polytechnique*) propusera uma prova de que toda função contínua fosse diferenciável e essa proposição, que se tornou conhecida pelo nome de teorema de Ampère, figurou em quase todos os textos relevantes anteriores à divulgação do exemplo de Weierstrass, como a terceira edição (1874) dos *Éléments de calcul infinitésimal*, de Duhamel. Mas, em vez de depor contra a faculdade perceptiva dos pesquisadores contemporâneos, esse episódio admite outra leitura: Podemos advertir nesse episódio que o próprio conceito de função contínua ainda se encontrava em franco processo de evolução.

De fato, explica LAUGWITZ (*ibidem*) que De Morgan distinguira entre a continuidade de *forma* e a continuidade de *valor*; e que o conceito que hoje temos de continuidade corresponde grosseiramente à continuidade de valor de De Morgan, enquanto Ampère se referia à continuidade de forma, equivalente à definição dada por Euler na *Introductio in analysin infinitorum* (1748): "Uma função é uma expressão analítica formada de constantes e variáveis, por meio de operações, tais quais as operações racionais, a radiciação e a exponenciação."

Acrescenta LAUGWITZ [2000:272-273] que as funções assim obtidas são contínuas e diferenciáveis, salvo em pontos insulados. Esse fato se preserva, quando consideramos também as séries de potências mas ocorre colapso, se considerarmos séries de funções circulares. Em uma resenha do curso de Duhamel (publicada em 1876), apoiando-se nos estudos contemporâneos, Darboux censurou a inclusão do teorema de Ampère.

De fato, Dirichlet (1828) dera um exemplo de uma função cujo gráfico não pode ser desenhado. Em seguida, Bolzano (1830) apresentou um primeiro exemplo de uma função contínua, representável por uma curva que não admite reta tangente em nenhum de seus pontos. Outros exemplos foram dados por Bernhard Riemann (1854) e por Karl Weierstrass (1872). [DAVIS & HERSH 1985:298; PASTOR et alii 1958:357; STRUIK 1967:158]

É pertinente citar a resenha, temporalmente próxima, feita por Henri Poincaré: "Há cem anos, uma tal função teria sido considerada uma ofensa ao senso comum. Dir-se-ia,

então, que uma função contínua, por sua própria essência, é susceptível de ser representada por uma curva e, evidentemente, uma curva sempre tem tangente." (26) [POINCARÉ 1898:5]

Esses três exemplos (de Bolzano, de Riemann e de Weierstrass), construídos formalmente (isto é, prescindindo da intuição geométrica), continham uma aparente antinomia: Concebido inicialmente como instrumento de construção de retas tangentes a curvas, o cálculo infinitesimal propiciou a construção de curvas que não admitem tangente por nenhum de seus pontos. Configurou-se, de certo modo, o enredo da balada *Der Zauberlehrling* de Goethe. (27)

3.8 A geometria intrínseca das superfícies

Em 1732, perante a Academia Francesa de Ciências, Pierre de Maupertuis leu a memória *Sur les lois de l'attraction*, na qual examinou a hipótese dos vórtices, que implicava ser a Terra alongada nos polos, e defendeu a teoria de Newton, que acarreava ser a Terra achatada nos polos. Maupertuis retomou essa discussão em outra memória, *Sur la figure de la Terre* (1733) e em uma terceira memória, *Sur la figure des corps célestes* (1735), também ambas apresentadas àquela Academia. [BASSALO 1996:125-126]

A conclusão de que a Terra fosse achatada nos polos era consequência do princípio das forças centrífugas. Um outro fato relevante, observado desde 1672, era o atraso dos relógios de pêndulo, na proximidade do círculo equatorial. Mas as medidas de arcos dos meridianos terrestres, tomados em diversos locais, não pareciam confirmar a previsão da teoria newtoniana. [CASINI 1995:64-65]

Por proposta do acadêmico d'Anville, seriam conduzidas duas expedições, para efetuar medições na proximidade do polo norte e na proximidade do círculo equatorial. Uma dessas expedições, na qual participaram Maupertuis e Clairaut, iniciada em 1736, foi feita à Lapônia, situada no extremo norte da Suécia, sendo efetuada a medição do grau de arco do meridiano entre Tornea, no golfo de Botnia, e Kittis, no mesmo meridiano, além do círculo polar ártico. A outra expedição, que durou de 1735 a 1744, foi feita ao Peru, vice-reinado espanhol então dotado de área muito maior que a área da hodierna nação. (Essa foi uma das primeiras missões geodéticas de natureza internacional, cuja efetuação exigiu acordos entre a França e a Espanha, por um lado, e entre a Suécia e a Rússia, pelo outro.) Das medidas obtidas nessa expedição se concluiu que a Terra era achatada nos polos. [BASSALO 1996:126-127; CASINI 1995:65, 78; LERMA, p. 20; STRUIK 1987: 127]

Isso foi motivo da irrisão de Maupertuis por François Voltaire, que lhe dirigira esse dístico: "Confirmastes em lugares muito entediantes o que Newton já sabia, sem sair de casa." (28) [CASINI 1995:65]

Mas Voltaire também reconheceu que "o grande achatador havia achatado a Terra e os Cassini", pois três gerações dos Cassini estiveram envolvidas na defesa de um globo achatado no círculo equatorial. [LERMA 20]

Desde então, a Terra foi considerada aproximadamente como um elipsoide de revolução, cabendo determinar-lhe o comprimento dos eixos. Foram efetuadas medidas de longitude em diversos locais, tanto no Velho quanto no Novo Mundo mas todas elas estavam sujeitas a controvérsias, já que não estava assegurada uma estrita coerência nas técnicas de mensuração e tampouco se usavam padrões confiáveis. Ora, nessa época havia, na França, uma total liberdade na escolha das unidades de medida. [LERMA 20-21]

Outro tanto acontecia na Alemanha, que então consistia em alguns principados politicamente inexpressivos, dos quais somente a Prússia, sob o reinado de Frederico II (1740-1786), adquirira projeção internacional. [RUSSELL 1972:720]

Anteriormente, o astrônomo Jean Picard (em 1671) e o físico Christiaan Huygens (em 1673) propuseram como unidade de comprimento o comprimento de um pêndulo que, ao nível do mar e a 45º de latitude, exibisse um período de 1s. [EVES 1997:493] Essa medida caracteriza-se por fazer depender a unidade de comprimento de uma medida angular e de uma unidade temporal.

Em 1791, a *comissão geral de pesos e medidas*, criada pela Assembleia Constituinte francesa, instituiu o sistema métrico decimal, no qual, como unidade de medida de comprimento, figurava o metro, definido como 10^{-7} da distância entre o círculo equatorial e o polo norte. Esse padrão difere da proposta de Picard e Huygens em aproximadamente 6mm. [BREITENBERGER 1984:275; EVES 1997:493-494; LERMA, p. 21]

Como ainda não se conhecesse suficientemente a figura da Terra, para implantar o novo padrão de comprimento, Jean-Baptiste Delambre e Pierre Méchain mediram, de 1792 a 1798, o arco do meridiano de Dunkerque (na França) a Barcelona (na Espanha). Finalmente, em 1799, o padrão do metro foi construído e depositado em Sèvres. [BASSALO 1992:1087; BREITENBERGER 1984:275; LERMA, p. 21; LAROUSSE 1968:1289, 1523]

Carl Gauss envolveu-se, desde 1802, com medidas geodéticas, em torno de Hannover e Braunschweig, cidades da Baixa Saxônia. Mas essas medidas não constituíam uma atividade continuada, pois era uma fase turbulenta da história dessa região: Em 1806 (na batalha de Jena), a Prússia caíra sob o jugo de Napoleão, cujas tropas somente foram definitivamente expulsas, depois da batalha de Waterloo, em 1815. Os engenheiros que acompanharam o exército francês efetuavam medidas geodéticas por toda parte, não somente por motivos técnicos mas também (e, talvez, sobretudo) por razões militares. Por isso mesmo, os dados assim obtidos não eram divulgados. Desde 1816, porém, assegurado o fim da beligerância, o governo da Prússia determinou uma extensa triangulação que pretendia vincular a França, a Bavária [Bayern] e a Áustria. Simultaneamente, por interesse de Frederico VI, rei da Dinamarca, foi iniciada a completa triangulação dessa nação. Hanover, por sua situação geográfica, vinculava os dois empreendimentos. Além disso, os dinamarqueses desejavam efetuar uma medida de meridiano, sendo-lhes conveniente es-

tender essa mensuração até Göttingen, no extremo meridional de Hannover, cidade situada no mesmo meridiano que a ponta da Jutland, sendo superior a 6º a diferença de latitude entre os dois lugares. [BREITENBERGER 1984:276-277; FRIEDELL 1974:1536]

Gauss esteve vinculado a esse trabalho de campo, sob a supervisão de Heinrich Schumacher, com o qual manteria duradoura amizade. (A correspondência epistolar entre Gauss e Schumacher seria publicada, na Alemanha, entre 1860 e 1863, e traduzida ao francês, por Jules Houël, parcialmente em 1866 e integralmente em 1895.) [BONOLA 1955:123, 152; BREITENBERGER 1984:276]

A triangulação foi criada por Gemma Frisius, em 1533. Sua primeira execução precisa foi efetuada por Snellius, em 1615, ao medir um arco entre Bergen (ou Mons) e Alkammar, nos Países Baixos, por meio de sextantes. A triangulação por meio de instrumentos mais refinados foi a técnica dominante de mensuração geodética, até o advento dos satélites artificiais. [COTTERET, p. 98; LERMA, p. 18]

Para resolver um problema de cartografia, proposto pela Academia em Copenhagen, Gauss publicou, em 1822, suas investigações sobre a reprodução parcial de uma superfície em uma outra, de modo que, localmente [*in den kleinsten Teilen*], o objeto copiado [*der Abgebildete*] e sua imagem [*die Abbildung*] fossem semelhantes. Isso o levou a uma teoria geral das superfícies, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828), que constituiu um acentuado afastamento da visão descrita por Monge e seus discípulos. [BREITENBERGER 1984:281; STRUIK 1934:162]

Gauss elaborou dois estudos acerca das superfícies curvas. O primeiro, escrito em 1825, teve publicação póstuma em 1901 (no oitavo volume das *opera omnia*). O segundo, de 1827, trouxe o título *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828). Nesses escritos, o autor não se ocupou das propriedades decorrentes da imersão de superfícies no espaço tridimensional mas centrou sua análise nas propriedades que dependem apenas do elemento de comprimento, inaugurando uma novo modo de pensar sobre superfícies.

No início desse estudo, introduziu a ferramenta a que hoje chamamos *indicatriz normal*, afirmando que "as disquisições, nas quais se consideram as direções de diversas linhas retas no espaço, atingem um alto grau de clareza e de simplicidade, se empregarmos, como auxílio, uma esfera de raio unitário centrada em um ponto arbitrário, e se supusermos que pontos distintos da esfera representem as direções das linhas retas, paralelas ao raios da esfera que terminem nesses pontos." [GAUSS 1827:3; cf. também GAUSS 1825:45, 81.] Segundo PESIC [2005:51, nota 1], Gauss obteve essa ideia da astronomia.

Para descrever superfícies, Gauss recorreu à parametrização introduzida por Euler, associando a cada ponto (u,v) de uma região planar (aberta e simplesmente conexa) um ponto B(u,v) da superfície Δ. Aos pontos regulares da superfície Δ (pontos nos quais são linearmente independentes os vetores $\partial B/\partial u$ e $\partial B/\partial v$), se associa um plano tangente, cujos elementos se exprimirão como combinação linear desses vetores: $\omega = h.\partial B/\partial u + k.\partial B/\partial v$. Logo, pondo $E = (\partial B/\partial u) \bullet (\partial B/\partial u)$, $F = (\partial B/\partial u) \bullet (\partial B/\partial v)$ e $G = (\partial B/\partial v \bullet \partial B/\partial v)$,

temos que $|\omega|^2 = hE + 2hkF + kG$, expressão conhecida como primeira forma fundamental [NOVIKOV et alii 1982:79]. (Nessa narrativa foi usada a linguagem hodierna. Esses assertos foram expressos por Gauss na forma escalar, pois ainda não se usava a linguagem vetorial.)

A cada ponto regular $q = B(u,v)$ da citada superfície Δ se associa um versor $N(u,v) = |(\partial B/\partial u) \times (\partial B/\partial v)|^{-1} \{(\partial B/\partial u) \times (\partial B/\partial v)\} = (EG - F^2)^{(-1/2)}.\{(\partial B/\partial u) \times (\partial B/\partial v)\}$. Note-se que, como $(\partial B/\partial u)$ e $(\partial B/\partial v)$ definem um paralelogramo, sobre o plano tangente à superfície Ω, no ponto q, a norma de seu produto, $|(\partial B/\partial u) \times (\partial B/\partial v)|$, que se pode exprimir como $(EG - F^2)^{(1/2)}$, representa a área desse paralelogramo.

Em analogia com a curvatura de curvas planares, Gauss pôde pensar na curvatura de uma superfície Δ em um ponto regular P como a medida da variação angular da reta normal à superfície Δ, ao longo de uma curva fechada Γ, situada na superfície Δ em torno do ponto vertente, relativa à área da região circunscrita por essa curva Γ. Para efetuar essa medida, Gauss recorreu à indicatriz normal, associando a cada ponto da curva Γ o correspondente vetor normal à superfície, aplicado ao centro da esfera auxiliar. Desse modo, a cada curva fechada Γ sobre a superfície Δ, em torno do ponto regular P, Gauss associou uma curva fechada Λ, sobre a esfera auxiliar. Em seguida, definiu *a curvatura da superfície* Δ no ponto regular P como o limite da razão entre a área da região circunscrita por Λ sobre a esfera auxiliar e a área da região circunscrita por Γ sobre a superfície Δ, quando essa curva Γ se contrai ao ponto P. [DO CARMO 1976:167; HILBERT & COHN-VOSSEN 1952:193-194; STRUIK 1934:163; STRUIK 1988:157] Hoje é habitual chamar-se a essa medida *curvatura intrínseca* ou *curvatura gaussiana*.

Depois, Gauss forneceu um outro procedimento, para se calcularem as curvaturas normais, associando a cada vetor $\omega = h.\partial B/\partial u + k.\partial B/\partial v$, do plano tangente em P a uma superfície Δ, o produto escalar $p''(t_0)\bullet N[p(t_0)]$, sendo p(t) uma curva regular, situada na superfície Δ, que atende às condições $p(t_0) = P$ e $p'(t_0) = \omega$, e sendo N o versor normal à superfície Δ, no ponto P.

Verificou que esse produto escalar se exprimia como $h^2(\partial^2B/\partial u^2)\bullet N + 2hk(\partial^2B/\partial u\partial v)\bullet N + k^2(\partial^2B/\partial v^2)\bullet N$ e que, portanto, não dependia da escolha da curva p(t).

É usual pôr-se $e = (\partial^2B/\partial u^2)\bullet N$, $f = (\partial^2B/\partial u\partial v)\bullet N$ e $g = (\partial^2B/\partial v^2)\bullet N$, obtendo-se $p''(t_0)\bullet N[p(t_0)] = h^2e + 2hkf + k^2g$, expressão conhecida como *segunda forma fundamental* [NOVIKOV 1982:87; DO CARMO 1976:141].

Em seguida, Gauss definiu a função *curvatura normal* da superfície Δ no ponto P como a função que associa a cada vetor ω do plano tangente a Δ em P a razão $\kappa(\omega)$ entre a segunda e a primeira formas quadráticas em P. Também verificou que a razão $\kappa(\omega)$ entre a segunda e a primeira formas quadráticas em P é igual à curvatura normal da superfície Δ no

ponto P, na direção de ω, isto é, é igual à curvatura de uma seção da superfície operada pelo plano que passa por P e é ortogonal à direção de $\omega \times N$.

Gauss mostrou, finalmente, que a curvatura no ponto q da superfície Δ é o produto das duas curvaturas principais dessa superfície no ponto q. [GAUSS 2005:15] Impende referir que, na época na qual Gauss escrevera essas disquisições, não se sabia qual operação se deveria efetuar sobre as curvaturas principais, a fim de se obter uma caracterização adequada da curvatura de uma superfície. [DO CARMO 1988:36]

Chamemos triângulo geodésico sobre uma superfície a uma figura delimitada, nessa superfície, por três curvas geodésicas. Adotando-se como base local no ponto q da superfície Δ o terno ($\partial B/\partial u$, $\partial B/\partial v$, N) e recorrendo à igualdade entre as derivadas mistas de segunda e de terceira ordem (fato já reconhecido por Nikolaus Bernoulli, em 1721, e por d'Alembert [STRUIK 1987:128; PATY 2005:123], podemos mostrar que a curvatura total [isto é, $\int_T \kappa dS$, sendo κ a curvatura intrínseca e T o triângulo geodésico] depende apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas de primeira e de segunda ordem. Disso decorre a notável proposição, denominada por Gauss *theorema egregium*, de que duas superfícies isométricas apresentam a mesma curvatura intrínseca nos pontos correspondentes. [STRUIK 1933:163]

Comenta-se que parte dos conceitos usados por Gauss já havia sido considerada por Euler e pelos discípulos de Monge mas, a despeito de meio século de cogitação acerca deles, somente Gauss desvelou o seu aspecto intrínseco, na acepção de que alguns desses conceitos, como a curvatura de uma superfície, embora se exprimissem inicialmente mediante a segunda forma fundamental, dependiam apenas da primeira dessas formas, isto é, do modo de se medirem comprimentos na superfície considerada. [STRUIK 1933:163-164; DO CARMO 1988:36]

Em seguida, Gauss estendeu um teorema de Girard, enunciado para triângulos esféricos. [STRUIK 1934:163]

Um triângulo esférico é a figura propriamente contida em algum hemisfério e delimitada por três arcos de círculos máximos distintos. Albert Girard demonstrou, em 1629, que a soma dos ângulos internos α_1, α_2 e α_3 de um triângulo esférico (medidos em radianos) satisfazem à condição $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A/R^2$, sendo A a área desse triângulo e R o raio da esfera considerada. [LIMA 1987:117]

Se chamarmos excesso angular do triângulo T ao número $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$, obteremos a interpretação do teorema de Girard, dada por Legendre, em 1787, de que, sobre uma mesma esfera, os excessos angulares de triângulos esféricos são proporcionais às respectivas áreas. [STRUIK 1934:163]

Vimos, há pouco, que Gauss provou que o excesso angular de um triângulo geodésico sobre uma superfície é igual à integral da curvatura dessa superfície sobre o triângulo considerado: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \int_T \kappa . dS$. Gauss apontou que esse teorema deve

ser enumerada entre os mais elegantes da teoria das superfícies curvas. [GAUSS 1827:30] Para facilitar a referência, chamarei a essa proposição teorema do triângulo geodésico.

Note-se que, em superfícies de curvatura constante, o membro direito da equação anterior é igual ao produto dessa curvatura pela área do triângulo considerado. Se lembrarmos que a curvatura de uma superfície em um ponto é igual ao produto de suas curvaturas principais nesse ponto; que um ponto de uma superfície é umbílico, quando nesse ponto coincidem as curvaturas principais; e, finalmente, que, no caso de uma esfera, todos os pontos são umbílicos, apresentando curvaturas principais iguais ao inverso do raio, deduziremos o teorema de Girard do teorema do triângulo geodésico.

A fim de podermos estimar o significado do teorema do triângulo geodésico, exporei sucintamente a formação da atmosfera intelectual em que ele foi formulado.

3.9 Os triângulos retilíneos e a emergência do modelo euclidiano

O teorema do triângulo geodésico, que vincula o excesso angular de um triângulo geodésico a sua área e à curvatura da superfície na qual ela está situado, concorreu decisivamente para se esclarecer a natureza do conhecimento geométrico.

O quesito da natureza do conhecimento geométrico foi colocado por Platão, no diálogo Menão, no qual narra o procedimento adotado por Sócrates para suscitar a lembrança na mente de um jovem escravo. Segundo a narrativa composta por Platão, Sócrates propõe ao jovem diversas perguntas acerca de um quadrado (da congruência dos lados, da congruência das medianas, da possibilidade de um quadrado apresentar qualquer área etc.). Embora seja interpretado como prova de que o aprendizado consiste apenas na evocação de lembranças, esse excerto constitui notável exemplo da maiêutica socrática. [PLATÃO 1986:207-212]

Esse quesito da natureza do conhecimento geométrico foi retomado diversas vezes, após a sistematização do saber geométrico, por Euclides de Alexandria, na obra *Elementos* (Στοιχεια), compostos no século III a.C.

Comenta-se que Euclides não definiu coerentemente todos os termos que empregou. As duas definições iniciais dos *Elementos* são "o ponto é aquilo que não tem parte" e "a linha é comprimento sem espessura". Essas definições não são logicamente operativas. Constituem apenas elucidações vagas, nas quais termos usados na enunciação dos postulados e dos teoremas são parcialmente explicados mediante apelo a termos que não pertencem ao sistema.

Alguns críticos supõem que definições desse tipo se devam interpretar como a declaração de que, na exposição desses *Elementos*, não seria adotada a concepção atômica esposada por Demócrito de Abderos. [BARKER 1976:36; KUTUZOV 1960: 448-449, 465]

Eis os postulados:

(1) [É possível] traçar-se uma linha reta de um qualquer ponto a qualquer ponto.

(2) [É possível] prolongar-se ilimitadamente um segmento de reta.

(3) [É possível] traçar-se um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

(4) Dois quaisquer ângulos retos são iguais.

(5) Se uma reta, ao intersecar duas outras, formar do mesmo lado, ângulos internos menores que dois ângulos retos, então essas duas retas, em sendo ilimitadamente prolongadas, se encontrarão nesse mesmo lado.

Outros críticos entendem que os *Elementos* contêm uma descrição de nossa percepção espacial. O quarto postulado, por exemplo, indicaria o grau de mobilidade do plano, na acepção de que, mediante movimentos rígidos do plano, podem superpor-se dois quaisquer ângulos retos. Desse modo, estaria implícita a possibilidade dos movimentos rígidos, sem recurso ao conceito de movimento, que poderia evocar as discussões, por Aristóteles, das aporias de Zenão de Élea. [YAGLOM 1988:159-160]

Essa opinião é defensível, pois o sétimo axioma institui que "coisas que coincidem são iguais" ou, segundo outra versão, "coisas que podem ser levadas a sobrepor-se uma à outra são iguais". Esse axioma é bastante discutido, por invocar, implicitamente, a noção de movimento ou de congruência como recurso à verificação de igualdade. Na verdade, Euclides usou o conceito de movimento apenas em duas proposições, a quarta e a oitava, ambas pertinentes à discussão da congruência de triângulos. (Essas duas proposições constituem, respectivamente, os hodiernos critérios de congruência lado-ângulo-lado e ângulo-lado-ângulo.) [KAGÁN 1986:108; KUTUZOV 1960:450-451; LOMBARDO-RADICE 1955:18]

Também Felix Klein indica que, por considerações filosóficas, uma formulação que evitasse consistentemente a noção de movimento era preferida na Antiguidade. Temia-se que a introdução do conceito de movimento trouxesse à geometria elementos que lhe fossem estranhos, como a noção de tempo. [KLEIN 2004:174]

No pensamento do Estagirita, o termo movimento significava 'a entelequia do ser em potência' ou 'toda passagem da potência ao ato, enquanto em potência' [*actus entis in potentia, quátenus in potentia*], que compreende (a) o movimento espacial, (b) a mudança qualitativa, (c) a mudança quantitativa e (d) a geração e a corrupção. Ora, Platão já tinha escrito, no livro VII da República, que "a geometria nos interressará, se nos obrigar a contemplar a essência; mas se se ativer ao movimento, não nos convirá". [CUVILLIER 1961:105; JOLIVET 1966:131; PLATÃO 1997:239-240]

Ainda outros críticos sustentam que, desde o início, Euclides tornara claro não se referir a objetos sensíveis mas a objetos inacessíveis aos sentidos, o que seria patente nas duas definições e nos dois postulados iniciais. [DIEUDONNÉ 1990:51-52]

De qualquer modo, enfatiza-se que um dos méritos principais dos *Elementos* foi haver formulado o quesito da estrutura lógica da ciência geométrica. [KUTUZOV 1960:465]

A esse respeito, porém, cabe lembrar que, contrariamente ao que, às vezes, se afirmou, os *Elementos* não constituem um exemplo de ciência consoante o cânone preconizado por Aristóteles (cf. a primeira seção do capítulo sétimo desta tese). Pelo contrário, estudos recentes têm conduzido à opinião de que fossem intuitivas e dependentes da percepção visual as provas praticadas por Euclides. [MUELLER 1969:308]

Aponta-se que Euclides estava plenamente consciente do papel que o quinto postulado desempenhava na sua formulação da geometria. Efetivamente, o quinto postulado não fora usado, até se concluir a demonstração da proposição vigésima oitava, segundo a qual, *são paralelas duas retas que, intersecadas por uma terceira reta, formarem, de um mesmo lado dessa terceira reta, ângulos internos suplementares*. Euclides perdera uma ocasião excelente de usar o quinto postulado (após a proposição décima sétima) e, se o houvesse feito, haveria abreviado e tornado mais penetrantes muitos dos argumentos posteriores. Isso sugere que Euclides, deliberadamente, demonstrou o máximo que pôde, sem recorrer ao citado postulado, ainda que isso implicasse um percurso mais longo. [AABOE 1984:63; HALSTED 1900:124; KUTUZOV 1960:451-453; LOMBARDO-RADICE 1955:18-19; SEIDENBERG 1975:271-272]

Euclides invocou o seu quinto postulado, na demonstração da proposição seguinte, a proposição vigésima nona: *Uma reta que interseca duas retas paralelas forma, de um mesmo lado, ângulos internos cuja soma é igual a dois ângulos retos*. [AABOE 1984:63-64]

Ao quinto postulado seguem a proposição trigésima (se duas retas forem paralelas a uma terceira reta, elas serão mutuamente paralelas) e a proposição trigésima primeira (por um ponto dado, exterior a uma dada reta, só se pode traçar uma paralela à reta considerada).

Essa última proposição permite a prova rápida de que seja igual a dois retos a soma dos ângulos internos de um triângulo (retilíneo), prova essa discutida por Kant na *Kritik der reinen Vernunft* (cf. o capítulo anterior desta tese).

O quinto postulado causou prolongado desconforto entre os matemáticos que sucederam a Euclides. Apontam-se, pelo menos, dois motivos para esse desagrado.

Por um lado, havia uma certa relutância em aceitá-lo, por ele não gozar da mesma evidência que os outro quatro postulados. De fato, os geômetras gregos conheciam curvas que, embora não intersecassem certas retas em nenhuma região finita do plano, delas se aproximavam arbitrariamente. É o caso de uma hipérbola que admite o próprio eixo como reta assintótica. [O termo 'assíntoto' provém de um qualificativo grego que significa 'sem interseção'.] Assim, o próprio conceito de reta paralela não era suficientemente evidente.

Além disso, o quinto postulado descrevia o comportamento de retas em regiões infinitamente afastadas. [NAGEL & NEWMAN 1958:9-10; SOMMERVILLE 1958:10]

O outro motivo tinha caráter lógico. Proclo de Constantinópole, no século V d.C., notara que a proposição vigésima oitava (*são paralelas duas retas que, intersecadas por uma terceira reta, forma, de um mesmo lado dessa terceira reta, ângulos internos suplementares*) era a recíproca do quinto postulado. Perplexo, Proclo indagava sobre a legitimidade de uma proposição ser um teorema e a sua recíproca ser um postulado. [COOLIDGE 1940:68]

Acreditando que se tratasse de um postulado redundante, isto é, de um teorema, muitos pensadores tentaram a sua demonstração mas os argumentos por eles propostos repousavam na admissão (tácita ou expressa) de outros postulados. [BONOLA 1955: passim; DIEUDONNÉ 1990: 215-216]

Segundo uma avaliação recente, somente a busca da pedra filosofal e as tentativas de se criar um movimento perpétuo (de primeira espécie) exigiram tanto esforço, quanto a demonstração do quinto postulado de Euclides. [VLADIMIROV et alii 1987:21]

Pode apontar-se nessas tentativas a tendência a reduzir-se o *corpus* das proposições geométricas que dependiam de evidência empírica. Com o fluir do tempo, foi esquecida a origem empírica dos postulados e eles foram considerados verdades da razão. [SMOGORZHEVSKI 1976:13]

Alguns autores sustentam que a descrição das propriedades do mundo físico não fosse a meta primordial de Euclides e enxergam que esse afastamento da origem empírica foi deliberada: "Uma longa habituação parece haver enfraquecido nos geômetras a consciência da coragem que representa a passagem do mundo dos objetos **sensíveis** ao mundo dos objetos **inteligíveis**. Enquanto essa consciência é muito visível em Platão e em Aristóteles, ficamos surpreendidos por ver pensadores tão profundos quanto Descartes e Pascal — esses que não hesitam em atacar de frente a escolástica — proclamar a 'verdade evidente' dos axiomas da geometria." [DIEUDONNÉ 1990:53]

É escusado indicar que, na sentença anterior, Jean Dieudonné está admitindo, implicitamente, a oposição entre os sentidos e o intelecto, oposição essa que também pode ser contestada.

A fase na qual se empreenderam tentativas de demonstração do quinto postulado ou, melhor, tentativas de reduzi-lo à condição de teorema durou do século II a.C. ao século XIX. Dentre os geômetras incluídos nessa fase, cabe referir Adrien-Marie Legendre, que demonstrou, sem recorrer ao quinto postulado de Euclides, que soma dos ângulos internos de um triângulo *não é maior* que dois ângulos retos. Em seu argumento foi implicitamente admitido o segundo postulado de Euclides. [GODEAUX 1960:105-107; SHENITZER 1994:465; STRUIK 1988:151]

3.10 Um outro modelo do espaço físico

> "Somente a experimentação poderá confirmar a hipótese de que seja menor que um ângulo raso a soma dos ângulos internos de um triângulo retilíneo." [Nikolai Lobachevski, 1855. *Apud* KAGÁN 1986:284]

Podemos considerar que a história da geometria hiperbólica começou, quando uns poucos geômetras examinaram as consequências de se admitir a negação do quinto postulado de Euclides, na presença dos quatro outros postulados. Dentre os pensadores que enveredaram por esse caminho, foi Nikolai Lobachevski quem obteve os melhores êxitos. [LOMBARDO-RADICE 1955:19; SMOGORZHEVSKI 1976:13-14]

Na sua primeira obra (apresentada, em 1823, à Universidade de Kazán mas não publicada, por causa de um parecer negativo), Lobachevski reuniu, nos cinco capítulos iniciais, todos os teoremas admitidos por Euclides que decorriam apenas dos quatro primeiros postulados, teoremas esses que comporiam a teoria que depois seria denominada *geometria absoluta*. Em seguida, Lobachevski admitiu como postulado a negação da trigésima proposição dos *Elementos* de Euclides: "Por um ponto C, não situado na reta r determinada pelos pontos A e B, passam ao menos duas retas, situadas no plano determinado pelos pontos A, B e C, que não intersecam a reta r." Os teoremas resultantes desses cinco postulados constituíram uma nova teoria a que chamou *geometria imaginária* mas que, posteriormente, foi renomeada *geometria hiperbólica* por Felix Klein. No curso de seus estudos a esse respeito, os quais não teve a audácia de publicar, Gauss denominou essa teoria, sucessivamente, como *anti-euclidiana*, *astral* e *não-euclidiana*. [BONOLA 1955:67; KAGÁN 1986: 87-88, 139-141; KUTUZOV 1960:492]

Lobachevski insistiu em seu projeto, produzindo, entre 1829 e 1838, quatro obras em língua russa, que lhe valeram críticas violentas. Finalmente, em 1840, divulgou seu trabalho a um público mais amplo, editando em Berlin, as *Disquisições geométricas sobre a teoria das retas paralelas* (*geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*). [KAGÁN 1986:144]

Lobachevski iniciou suas *Disquisições* por uma brevíssima referência ao trabalho de Legendre e, "a fim de não fatigar o leitor com uma multidão de teoremas cujas provas não oferecem dificuldade", enunciou apenas quinze proposições, cuja aceitação considerou necessária ao seu desígnio.

Em seguida, propôs a seguinte definição: "Todas as linhas retas que, em um plano, passam por um ponto podem ser classificadas, segundo uma mesma reta desse plano, em *secantes* e *não secantes*. Às retas que separam a classe das secantes da classe das não secantes são denominadas *paralelas à reta considerada*." [LOBACHEVSKI 1955:11-13]

É possível que, inicialmente, ao obter uma cadeia de teoremas que se afastavam do modelo euclidiano e que se não guiavam por analogias com esse modelo, Lobachevski duvidasse da consistência (ou não contradição) de sua teoria mas, durante um quarto de

século, ele se ocupou mais em estender sua geometria que em fundá-la. [BACHELARD 1978:28-29; KAGÁN 1986:284]

De fato, para mostrar a consistência de sua teoria, seria necessário mostrar que dois quaisquer de seus teoremas não se contradizem. Contudo, Lobachevski parece se haver satisfeito em verificar que sempre concordavam os resultados obtidos, no âmbito de sua teoria, por vias distintas; e que coincidiam os valores obtidos pela integração de expressões distintas, formuladas de acordo com sua teoria. [KAGÁN 1986: 190-192, 319] Cabe apontar que, desse modo, além de sugerir a coerência interna da teoria, Lobachevski comprovava que a validade do cálculo integral não dependia de interpretação geométrica.

E, ainda mais, Lobachevski percebeu que a trigonometria no plano hiperbólico coincide com a trigonometria na superfície de uma esfera de raio imaginário. [KAGÁN 1986:192; LOMBARDO-RADICE 1955:43]

Por seu significado na prova da consistência relativa da teoria hiperbólica, cabe referir um fato surpreendente, descrito por Lobachevski. Trata-se do comportamento de certas curvas sobre *uma horosfera*, superfície obtida como o limite de uma esfera tangente a um plano em um ponto fixo, quando o seu raio cresce ilimitadamente. Sobre tal superfície existem curvas, denominadas *horociclos*, que se comportam como retas do plano euclidiano. [LOBACHEVSKI 1955:256-257; LOMBARDO-RADICE 1955:43; SMOGORZHEVSKI 1976:69; YAGLOM 1988:166, n. 119]

Aparentemente, Lobachevski esteve menos interessado no aspecto puramente lógico de sua teoria e mais interessado na adequação de sua teoria como descrição do espaço estudado na astronomia, isto é, mais interessado em interpretar as leis naturais que são percebidas pelos seres humanos. Em uma expressão menos precisa, Lobachevski esteve mais interessado na física que na axiomática ou, na formulação de SCANLAN [1988:15], mais interessado na veracidade que na consistência. [LOMBARDO-RADICE, p. 40-41; SMOGORZHEVSKI 1976:19]

Notando que era insignificante a distância entre a Terra e as estrelas fixas, ao ser comparada à distância entre as galáxias tais, quais Andrômeda e Capricorno, Lobachevski pretendeu verificar experimentalmente, se a descrição euclidiana era apropriada a medir os ângulos internos do triângulo cujos vértices fossem a Terra, o Sol e uma das estrelas fixas (Sírio). Embora os toscos dados experimentais (como os valores das paralaxes então disponíveis) não permitissem extrair uma conclusão decisiva, se nota uma atitude distinta do empreendimento perseguido ao longo de toda a pré-história da geometria hiperbólica, qual seja, elaborar uma demonstração puramente lógica do quinto postulado de Euclides. [ALEXANDROV 1976:129-130; KAGÁN 1986:172-173; PERMINOV 1997:12]

Alguns autores da mais alta reputação [JAMMER 1970:189; PATY 1993:240] atribuíram a Gauss uma tentativa semelhante, entre 1821 e 1825, que consistiria na mensuração dos ângulos internos de um triângulo óptico cujos vértices eram instrumentos colocados no alto dos montes Brocken, Inselsberg e Hohenhagen. Segundo WALTER [1997:111], essa era uma lenda vigente em Göttingen, no início do século XX. Consoante a

cuidadosa argumentação de BREITENBERGER (1984), o desígnio de Gauss era tão somente conectar a triangulação de Hannover com a triangulação das regiões contíguas. O resultado dessa triangulação figura em GAUSS [1827:43]. Segundo a opinião prudente de KNEEBONE [2001:183], não há suficiente evidência para se concluir acerca do escopo de Gauss. A argumentação conduzida recentemente por SCHOLZ [2004] permite concluir que a tarefa de triangulação não exclui a possibilidade de as medidas então efetuadas por Gauss haverem sido usadas para verificar a natureza euclidiana no espaço físico.

Em sua *Pangeometria*, sumário dado a lume em 1855 (do qual seria publicada a versão francesa no ano seguinte), Lobachevski enfatizara três proposições demonstradas em suas *Investigações geométricas da teoria das retas paralelas* (*geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*). [KUTUZOV 1960: 492-493]

(a) A proposição XXVII, segundo a qual a razão entre a área de um triângulo construído sobre uma esfera e a área dessa esfera tem o mesmo valor, quer na sua teoria geométrica, quer na teoria euclidiana. Portanto, esse teorema não depende do quinto postulado de Euclides.

(b) A proposição XIX, segundo a qual a soma dos ângulos internos de um triângulo retilíneo não é maior que dois ângulos retos.

(c) E a proposição XX, segundo a qual, se for igual a dois ângulos retos a soma dos ângulos internos de um dado triângulo retilíneo, tal soma terá esse valor para qualquer triângulo retilíneo.

Esses assertos se explicam à luz do citado teorema do triângulo geodésico (que vincula o excesso angular de um triângulo geodésico a sua área e à curvatura intrínseca da superfície na qual ela está situado).

De fato, se aplicarmos a uma esfera (cuja curvatura é $1/R^2$) a expressão $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \int_T \kappa . dS$, obteremos o teorema de Girard e a proposição XXVII de Lobachevski.

Se supusermos que seja nula a curvatura intrínseca da superfície vertente (o que ocorre com o plano euclidiano), o segundo membro se anulará e reencontraremos o asserto de que seja igual a π a soma dos ângulos internos de um triângulo, comprovando a proposição XIX de Lobachevski.

Se, por outro lado, supusermos que a curvatura intrínseca da superfície vertente seja constante e negativa, isto é, $\kappa = -K$, então $\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = K.\{\text{área do triângulo}\}$. Logo, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$, desigualdade que vigora na teoria geométrica de Lobachevski. [DO CARMO 1987:31]

Também à luz do citado teorema, se explica a coincidência entre o comportamento de horociclos sobre a horosfera com o comportamento de retas sobre o

plano euclidiano. De fato, a horosfera admite uma métrica que lhe confere uma curvatura intrínseca identicamente nula. [DO CARMO 1987:47]

Concomitantemente com Lobachevski, também János Bolyai conduziu estudos aprofundados da *geometria absoluta*, que foram parcialmente publicados, em 1832, sob o título de *ciência verdadeira do espaço exibida absolutamente* [*appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*], como apêndice (de vinte e oito páginas na versão na língua latina) a um livro de seu pai, Farkas Bolyai. [BONOLA 1955:99; HALSTED 1896:2-3]

O pai remeteu cópia do apêndice a Gauss, de quem fora colega, quando estudaram em Göttingen, dizendo que "Johann confiava mais na sua revisão que na opinião de toda a Europa". [YAGLOM 1988:58]

Gauss recebeu a cópia e, em 14 de fevereiro de 1832, ainda sob o efeito da primeira impressão, escreveu privadamente a seu aluno e amigo Christian Gerling acerca do ensaio de "um jovem geômetra a quem considerava um gênio da primeira grandeza" no qual "encontrou as próprias ideias e os próprios resultados elaborados com elevada elegância" (29) [*Apud* BONOLA 1955:122]

Porém, Gauss nunca se pronunciou publicamente acerca desse estudo de Bolyai e, em resposta a Farkas Bolyai (6 de março de 1832), se declarou impedido de tecer elogios ao trabalho de János Bolyai pois, se o fizesse, estaria elogiando a si próprio: "Com efeito, todo o conteúdo da obra, a trajetória percorrida por teu filho e os resultados a que ele chega coincidem quase inteiramente com as meditações que me têm ocupado a mente pelos últimos trinta ou trinta e cinco anos. No que tange ao meu labor, do qual até agora pouco foi exarado em papel [...] era meu intento transcrevê-lo todo, posteriormente, de sorte que, pelo menos, não perecesse comigo. É portanto uma agradável surpresa que eu seja poupado dessa tarefa e estou muito feliz em que seja justamente o filho de meu velho amigo que se antecipa a mim de modo tão notável." [*Apud* BONOLA 1955:100]

Contrariamente ao que escreveu nessa carta, os apontamentos de Gauss não sugerem que ele houvesse meditado sobre todos os teoremas expostos no *Appendix* de Bolyai, como o asserto de que, na geometria hiperbólica, fosse solúvel o problema da quadratura do círculo. [YAGLOM 1988:58]

Por outro lado, distintamente da tendência empiricista de Lobachevski, Bolyai parecia estar mais preocupado com a estrutura lógica da *geometria absoluta* e lhe causava desconforto a ausência de uma prova completa de que a geometria hiperbólica fosse consistente. Como desejasse obter teoremas válidos tanto na geometria hiperbólica quanto na geometria euclidiana (ou parabólica), Bolyai formulava conceitos que se pudessem empregar em ambas as teorias. Assim, por exemplo, iniciou seu ensaio: "Se o raio AM não for cortado pelo raio BN mas o for por todos os raios BP compreendidos no ângulo ABN, diremos que o raio BN é paralelo ao raio AM." [BOLYAI 1896:5; YAGLOM 1988:55-56] É patente a semelhança entre essa conceituação e a proposta por Lobachevski.

Informa HALSTED [1899:171] que, no pequeno apêndice, Bolyai tratou de temas que não se encontram na obra de Lobachevski, como o traçado, por um dado ponto, de uma paralela a uma reta dada.

Na ausência de fontes escritas (além da correspondência epistolar e de poucos apontamentos encontrados em seus papéis), é discutível a extensão do avanço de Gauss nesse domínio da matemática. Na opinião de FREUDENTHAL [1961:4], foi inteiramente injustificado o receio do príncipe dos matemáticos em despertar "o clamor dos beócios".

Tal receio pode haver sido nutrido pela percepção de que "o uso por Newton do formalismo da geometria euclidiana conjugado ao sucesso preponderante de seu tratamento da física e da astronomia baseado no modelo do espaço euclidiano entesourou a geometria euclidiana e a revestiu de uma certeza e de uma inevitabilidade que converteu qualquer questionamento desse sistema em um indício de instabilidade mental." (30) [OSSERMAN 2005:1030]

Confirmando essa opinião, KAGÁN [1986:372] atribui ao notável físico Ludwig Boltzmann, criador da Mecânica Estatística, o julgamento de que a pangeometria de Lobachevski fosse "o delírio de um louco". Contudo, essa atribuição parece equivocada. Estudando as anotações de um curso sobre *Filosofia da Natureza e Metodologia das Ciências Naturais*, professado por Boltzmann, em 1903-1904, na Universidade de Viena, TANAKA [1999:218-219] infere que Boltzmann também se interessou pelo aspecto empírico das teorias não-euclidianas do espaço (o que o aproxima de Lobachevski) e cita o excerto seguinte: "Temos apenas uma geometria euclidiana mas existem diversas geometrias não-euclidianas. Se supusermos um espaço não-euclidiano esférico de pequeno raio, então não encontraremos fatos compatíveis com nossa experiência; mas se o raio da esfera for extraordinariamente grande e se duas paralelas se encontrarem a uma enorme distância, obteremos que a mesma observação estará acorde com nossa experiência. Isso significa que figuras situadas em um espaço esférico de dimensões enormes terão a mesma aparência que no espaço euclidiano."

A aceitação da obra de Lobachevski foi bastante lenta. Morto Gauss em 1855, começou a ser divulgada a sua correspondência epistolar. As cartas entre Gauss e Schumacher foram publicadas entre 1860 e 1865. No quinto tomo, apareceu uma carta de Gauss a Schumacher, datada de 28 de novembro de 1846, na qual se lia: "Recentemente, tornei a folhear o livro de Lobachevski (*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*), que contém os princípios da geometria que deveria vigorar e que seria rigorosamente consequente, se a geometria euclidiana não fosse verdadeira. Um tal Schweikart deu a esse sistema geométrico o nome de geometria astral; o próprio Lobachevski lhe chama geometria imaginária. Sabes que, há cinquenta e quatro anos (desde 1792), tenho a mesma convicção (que recentemente se revigorou um pouco mas não quero deter-me sobre isso). Quanto à obra de Lobachevski, nada encontrei que fosse novidade para mim. Em sua redação, porém, o autor segue uma via diferente da que adotei, demonstrando uma arte consumada e um

espírito puramente geométrico. Considero meu dever chamar tua atenção para esse livro que, certamente, te agradará muito." [KAGÁN 1986:289]

A divulgação dessa missiva e de mais duas outras de Gauss, uma endereçada a I. F. Encke (de 1º de fevereiro de 1841) e outra dirigida ao astrônomo V. Struve (de 11 de dezembro de 1846) despertaram na comunidade matemática o interesse pela obra de Lobachevski. [KAGÁN 1986:289-290]

Somente em 1866, apareceu uma versão francesa das *Geometrische Untersuchungen*, elaborada por Jules Houël, autor de um então bem conhecido *Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire* [BONOLA 1955:123]

E, ainda em 1868, o matemático Joseph Bertrand, intentando defender o quinto postulado de Euclides, publicou uma escancarada estultície, no que foi prontamente censurado por Joseph Liouville. [GRAY 1999:165; HALSTED 1902:62]

3.11 A geometria das pluralidades

> "Posso agora escolher um complexo de casos da totalidade de casos: Posso, por exemplo, colocar a equação linear $ax + by + c = 0$ e reunir aqueles casos nos quais x e y satisfazem a essa equação; poderia chamar de reta a esse complexo de casos. Dessa definição de reta obteria todos os teoremas da geometria que dizem respeito às retas. É claro que, desse modo, poderíamos prosseguir, sem nos acudirmos de nenhum recurso à mínima intuição espacial." (31) [RIEMANN: *Nachlasznotiz zu Mannigfaltigkeiten und den Grundlagen der Geometrie*.]

Tradicionalmente, a matemática era considerada a ciência das grandezas, sendo grandezas aqueles objetos dos quais podemos predicar relações de comparação (menor que, igual a ou maior que).

Desde Gauss, a maior parte dos matemáticos aceitava "uma separação radical entre a aritmética e a geometria. A primeira exibiria uma veracidade do tipo lógico, derivada do pensamento abstrato; a segunda, uma veracidade do tipo físico, apoiada na experiência. A primeira pertenceria à classe da matemática pura; a segunda enquadrar-se-ia na classe da matemática aplicada." (32) [BRUNSCHVICG 1972:497]

Gauss se manifestara a esse respeito em carta a Bessel (de 9 de abril de 1830): "Devemos admitir humildemente que, se o número é apenas produto de nosso espírito, o espaço tenha uma realidade também externa a nosso espírito, cujas leis, *a priori*, não podemos prescrever inteiramente." (33) [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:497]

Também se considerava que as grandezas se apresentavam em dois tipos, as grandezas discretas e as grandezas contínuas. Ao estudo das grandezas discretas chamava-se aritmética e o estudo das grandezas contínuas denominava-se geometria. [COHEN 1911:533; FERREIRÓS 1996:21]

Foi esse o entendimento de Riemann, na sua famosa alocução [*Habilitationsvorlesung*] de 1854, na qual assim se pronunciou:

> "Apenas são possíveis conceitos de grandeza, onde existe um conceito geral que admita diversos modos de determinação. Consoante se verifique uma transição contínua de um a outro dentre esses modos de determinação, comporão eles uma pluralidade contínua; no caso contrário, formarão uma pluralidade discreta. Os modos individuais de determinação chamar-se-ão pontos dessa pluralidade, no primeiro caso, e elementos dessa pluralidade, no segundo caso." (34) [RIEMANN 1923:3]

Ao longo da presente seção, o termo 'Mannigfaltigkeit' será vertido por 'pluralidade' e não por 'variedade' ou 'diversidade', como sugerem os dicionários. [WILHELM 1963:379; MESSINGER 1967:383; SCHAU 1986:637] A escolha do termo 'pluralidade' decorre de o conteúdo semântico presentemente associado ao termo 'variedade' sugerir uma estrutura contínua ou diferenciável. Como se viu na citação anterior, Riemann considerou pluralidades discretas. E, no curso da presente discussão, ficará evidenciado que, nessa época e até um pouco depois, o termo *Mannigfaltigkeit* significava o que hoje entendemos por 'agregado' ou 'conjunto'. Para corroborar esse juízo, FERREIRÓS [1996:27] refere uma carta a Cantor, datada de 1879, na qual Dedekind propõe substituir o termo desgracioso 'Mannigfaltigkeit' por 'Gebiet' [domínio] "que também é riemanniano". Finalmente, vale lembrar que o vocábulo 'Mannigfaltigkeit' também fora empregado por Immanuel Kant, nos *Pensamentos acerca da estimação verdadeira das forças vivas* (1747) e na *Crítica da razão pura* (1787). [PESIC 2007:3-4]

De passagem, pode citar-se que, consoante Dedekind [cf. BOTTAZZINI & TAZZIOLI 1995:26; FERREIRÓS 2000:14-15; PESIC 2007:2], em junho de 1854, Riemann se habilitou como *Privatdozent*, título que lhe conferiria '*venia legendi*'. Para obter essa *vênia de ensinar*, teria que apresentar três temas para dissertação pública, dos quais a junta de exame escolheria um. Contrariando a prática habitual, Gauss, que integrava a junta de exame, escolheu o terceiro tema, as hipóteses que fundamentam a geometria [*über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*]. Conforme Riemann escreveria a seu irmão, à época da *habilitação*, estavam prontas as dissertações relativas aos dois outros temas mas a terceira dissertação ainda se encontrava '*in statu nascendi*', pois Riemann estivera muito absorvido na investigação dos vínculos entre as leis básicas da física. Não obstante, a conferência excedera a expectativa de Gauss que, ao sair da seção, demonstrando raro empolgamento, dissera a Wilhelm Weber, em termos encomiásticos, da profundidade das ideias de Riemann.

Acrescenta FERREIRÓS [2000:15] que tal depoimento se pode reconhecer como fidedigno, pois Dedekind mantinha "um contacto estreito" com Weber. (Cabe distinguir

entre *Wilhelm* Weber, que fora docente de Riemann e de Dedekind, e *Heinrich* Weber, com quem Dedekind, em 1882, escreveria um trabalho no qual aplicaria a teoria dos ideais à teoria das superfícies de Riemann.)

Essa conferência de Riemann (que somente seria publicada postumamente, em 1868, por Dedekind) [VOLKERT 1993:308; PESIC 2007:6; YAGLOM 1988:62] exerceria uma influência duradoura sobre as concepções do espaço. O autor a iniciou, lembrando "ser conhecido que a geometria pressupõe tanto o conceito de espaço quanto os primeiros conceitos fundamentais para as construções no espaço". (35) [RIEMANN 1923:1]

E acrescentou que a geometria "fornece desses conceitos apenas definições nominais, enquanto as determinações essenciais aparecem na forma de axiomas. Além disso, a relação entre esses pressupostos permanece obscura; não se examina se e em que medida o vínculo entre eles é necessário, ou *a priori*, ou possível." (36) [RIEMANN 1923:1]

Nota-se no início desse excerto que o autor distinguiu entre "o conceito de espaço" e "os primeiros conceitos fundamentais para as construções no espaço". Logo adiante, no começo do primeiro capítulo, pedindo indulgência (da parte dos leitores), Riemann declinou sua pouca erudição nos trabalhos de natureza filosófica, nos quais as dificuldades residem mais nos conceitos e menos na construção. (37) [RIEMANN 1923:2]

Essa distinção entre o conceito e sua construção nos remete ao pensamento de Immanuel Kant, quando afirma (na *Crítica da Razão Pura*) ser "uma condição lógica necessária que um conceito do possível não contenha contradição alguma. Porém isso não é, de modo algum, suficiente para determinar a realidade objetiva do conceito, isto é, a possibilidade de um tal objeto como é pensado através do conceito. Assim, não existe contradição no conceito de uma figura delimitada por duas retas, já que os conceitos de reta e de interseção de retas não contêm negação de uma figura. A impossibilidade decorre não do conceito em si mas do conceito em conexão com sua construção no espaço, isto é, das condições do espaço e de sua determinação". [WINTERBOURNE 1981:35]

Riemann atribuiu a obscuridade de que se revestia a relação entre os prejuízos da geometria à "ausência da elaboração de um conceito geral de grandeza multiplamente extensa, que inclua as grandezas espaciais". (38) [RIEMANN 1923:1]

E avocou a si, primeiramente, "a tarefa de construir o conceito de uma grandeza multiplamente extensa mediante conceitos gerais de grandeza". (39) [RIEMANN 1923:1]

Mas, em seguida, Riemann se afastou de Kant, ao asseverar que "uma grandeza multiplamente extensa é apta a diversas relações de medida e que o espaço apenas constitui um caso especial de uma grandeza triplamente extensa. Disso decorre, porém, uma consequência necessária, que as sentenças da geometria não derivem dos conceitos gerais de grandeza. Pelo contrário, aquelas propriedades, mediante as quais o espaço se distingue das outras grandezas triplamente extensas, somente se podem apreender pela experiência." (40) [RIEMANN 1923:1-2]

Esse asserto de Riemann é notável e me parece que deva ser bem acentuado. Primeiro, ele defendeu que "**o espaço apenas constituia um caso especial de uma grandeza triplamente extensa**" e mediante essa constatação tornou evidente que "**as sentenças da geometria não derivassem dos conceitos gerais de grandeza**". E coroou o argumento, revelando-se profitente do mesmo empiricismo geométrico de Lobachevski e Gauss: "**As propriedades, mediante as quais o espaço se distingue das outras grandezas triplamente extensas, somente se podem apreender pela experiência**."

A fim de contextuar a época na qual Riemann proferiu alocução "*sobre as hipóteses que fundamentam a geometria*", cabe lembrar que o paradigma mecânico-molecular concebido por Laplace para descrever todos os fenômenos físicos contemplava especificamente quatro campos de pesquisa: o calor, a capilaridade, a luz e a elasticidade. Esse paradigma, que fora tão penetrante e difundido durante a era de Napoléon Bonaparte, começou a ser contestado, principalmente pelos trabalhos de Joseph Fourier (sobre a propagação do calor nos corpos sólidos, desde 1807) e de Augustin Fresnel (que interpretava experimentos por ele conduzidos mediante a conjectura de que a luz se propagasse através do éter). [ARNOLD 1983B:278, 282; ARNOLD 1983E:322-323]

Também se descobriram novos fenômenos eletromagnéticos, que vieram juntar-se à verificação por Coulomb, em 1785, recorrendo a uma balança de torsão, da lei da interação elétrica proposta por Priestley em 1767. Em 1829, Oersted descobriu a ação de um condutor sobre a agulha magnética. Ampère decompôs idealmente os circuitos elétricos em elementos infinitesimais de corrente caracterizados pela intensidade da corrente e pela direção espacial e enunciou a lei de que dois quaisquer desses elementos de corrente interatuam com uma força dirigida ao longo da reta determinada pelos elementos considerados e proporcional ao produto das respectivas intensidades de corrente por uma função da direção da citada reta e pelo inverso do quadrado da distância entre os citados elementos de corrente. Ampère apontava a analogia entre essa lei e a lei da gravitação e elaborou uma teoria que previa tanto o efeito Oersted quanto a atração ou a repulsão mútua entre condutores. Em 1831, Faraday descobriu a indução eletromagnética. [TORRETTI 1996:35-36]

Além disso, no interstício entre esses trabalhos de Fresnel e a prolação da citada conferência por Riemann, sucedeu um vivo debate acerca da capacidade de a teoria ondulatória da luz explicar os fenômenos ópticos descobertos recentemente. David Brewster, por exemplo, estudando a absorção local da luz causada pela interferência, havia descoberto um tipo de fenômeno que não era explicado pela teoria ondulatória: As bandas apareciam apenas, quando se cobria a extremidade violeta do espectro visível com uma placa delgada. Se se cobrisse a extremidade vermelha do espectro, as bandas desapareciam. Brewster atribuiu esse fenômeno a uma espécie de assimetria luminosa. A fim de provar que não se tratava de luz polarizada, substituiu a placa delgada por um pedaço de cristal de dupla refração. Nesse caso, observou que, coberta a extremidade violeta do espectro, ocorriam dois sistemas de bandas escuras; coberta a extremidade vermelha do espectro, ambas as bandas desapareciam. Mediante esse experimento, Brewster mostrou que não estavam polarizados nem os raios de luz atrasados nem os raios com velocidade inalterada. James

MacCullagh, professor de matemática no Trinity College, em Dublin, admitiu que os *ondulacionistas* quase nada sabiam da teoria ondulatória e, em carta a John Herschel (datada de 1846), declarou "estar persuadido de que a constituição do éter, se algum dia fosse descoberta, seria completamente distinta de tudo o que habitualmente se concebia e que, ainda assim, seria muito simples e muito bela". [CHEN 1997:377-378]

Nasceu, portanto, a citada alocução em um ambiente no qual eram frequentes as discussões acerca do papel do éter na propagação de tensões. Segundo a concepção corrente, o éter era um fluido que permeava todo o universo e que transmitia os fenômenos físicos através do espaço mediante deformações elásticas. Supunha-se que fosse capaz de armazenar energia e era uma hipótese plausível na descrição da propagação das ondas transversais da luz. (O nome fora usado por Descartes para denotar a matéria imponderável.) [PALLADINO & TAZZIOLI 1996:330; TORRETTI 1996:37]

Existe alguma evidência de que diversos escritos de Riemann foram compostos durante suas tentativas de encontrar uma explicação unificada para vários fenômenos físicos (como a gravitação, a eletricidade e a luz), baseada em seu modelo do éter. Esses escritos foram, em sua maior parte, reunidos nas *obras completas* sob a rubrica de 'filosofia da natureza [*Naturphilosophie*] e, à sua luz, se podem reunir outros escritos em um programa de pesquisa de amplo alcance. [BOTTAZZINI & TAZZIOLI, 1995:3]

Informa Luciano BOI [1994:195-196] que em um manuscrito datado de 1853, intitulado *Novos princípios matemáticos da filosofia natural* [extraído dos *Fragmente philosophischen Inhalts*, 1876], Riemann referiu expressamente "ser necessária a hipótese da existência de um meio que elucidasse todas as forças fundamentais da Natureza" (41).

Acrescenta BOI [1994:196] que Riemann tipificava os efeitos da matéria sobre a matéria em duas classes: (1) As forças gravitativas e eletrostáticas, proporcionais ao inverso do quadrado da distância. (2) A luz e a radiação térmica. Consoante o próprio Riemann: "Ambas as classes de fenômenos se podem esclarecer, quando admitimos que uma substância homogênea preenche todo o espaço infinito e que cada partícula material atua diretamente apenas sobre sua vizinhança." (42)

A despeito desses indícios, não parece haver consenso acerca do lugar apropriado, na obra de Riemann, à conferência sobre as pluralidades, que ora examinamos. Hermann Weyl, no antelóquio a sua edição dessa conferência, negou a existência de conexão entre a conferência vertente e os estudos de *Naturphilosophie*, afirmando que "ainda assim, é certo que era desconhecida de Riemann qualquer relação entre as consequências de sua teoria do espaço e a gravitação; por isso, sua própria tentativa em perquirir a conexão entre a luz, a eletricidade, o magnetismo e a gravitação, que coincidiu temporalmente com sua preleção probatória, não guarda efetivamente nenhum vínculo com sua teoria do espaço. (43)

Acrescentou Weyl que, na citada carta a seu irmão, Riemann narrara, "depois do término de seu trabalho de *Habilitation*, se haver ocupado novamente com a investigação sobre a conexão entre as leis fundamentais da física e se ter absorvido nisso a tal ponto, que,

quando lhe foi apresentado o tema da preleção probatória, não conseguira desenvencilhar-se dessa pesquisa." (44)

Concluiu Weyl: "Ambos os temas, que então se incomodavam na mente de Riemann, hoje em dia estão ligados contígua e intimamente." (45)

Sustentam quase o contrário BOTTAZZINI & TAZZIOLI [1995:27], sugerindo que, na *Habilitationsvorlesung*, Riemann procurava prolongar a pluralidades multidimensionais as ideias aduzidas em seu ensaio de 1853, sobre *Naturphilosophie*, estendendo a investigação *local* de partículas do éter à análise *global* do espaço. E apontam, em favor dessa interpretação, a completa ausência de qualquer citação, na *Habilitationsvorlesung*, aos estudos de Lobachevski, que publicara, em 1837, um ensaio no Jornal de Crelle e (conforme vimos na seção *Um outro modelo do espaço físico*), em 1840, as *Geometrische Untersuchen*. Argumentam esses autores que citações desse tipo seriam normais em um estudo acerca dos fundamentos da geometria.

BOTTAZZINI & TAZZIOLI [1995:27] também indicam que o fascículo do Jornal de Crelle que contém esse ensaio de Lobachevski é o mesmo que estampa um ensaio, de 1837, de Lejeune Dirichlet, no qual se discute a representação de funções arbitrárias, mediante séries de polinômios de Legendre, tema afim ao de outro ensaio de Riemann, sobre a representabilidade de funções mediante séries de funções circulares [*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*], de 1854, sugerindo que Riemann teve acesso ao citado fascículo.

Finalmente, BOTTAZZINI & TAZZIOLI [1995:27] apontam que, na primeira página de seu citado artigo, Lobachevski escrevera: "[...] nada nos pode autorizar a supor que, em um triângulo formado por linhas retas, a soma de seus ângulos internos seja igual a dois ângulos retos, salvo medidas diretas, e a admitir que não seja possível a existência, se não em a natureza, pelo menos na análise, de uma teoria geométrica na qual tais ângulos exibam soma inferior a dois retos". E que, após resumir os teoremas acerca das propriedades desses triângulos, Lobachevski escrevera: "A hipótese de a soma dos ângulos de um triângulo ser menor que dois ângulos retos somente pode ter aplicações na análise, pois as medidas diretas não nos mostram o menor desvio na soma dos ângulos de um triângulo."

BOTTAZZINI & TAZZIOLI [1995:28] enxergam na afinidade entre esse excerto de Lobachevski e o fim da próxima citação de Riemann uma evidência em favor da opinião de que Riemann lera o ensaio de Lobachevski: "Disso decorre a tarefa de investigar os fatos mais simples dos quais se possam determinar as relações de medida do espaço — uma tarefa que, segundo a natureza das coisas, não está completamente determinada. Pois se podem nomear diversos sistemas de fatos simples que sejam suficientes à determinação das relações de medida do espaço, sendo o sistema oferecido por Euclides o mais importante para a finalidade contemporânea. Como todos os fatos, também esses não são necessários mas apenas apresentam certeza empírica, são hipóteses, cuja probabilidade podemos investigar, a despeito de seu elevado valor dentro dos limites da observação. E também podemos proferir um juízo sobre se é admissível estendê-las além de ambos os lados dos

limites da observação, tanto do lado do imensuravelmente grande quanto do lado do imensuravelmente pequeno." (46) [RIEMANN 1923:2]

Curiosamente (em um artigo que figura na bibliografia de BOTTAZZINI & TAZZIOLI 1995:38), SCHOLZ [1982:220] assinala que, efetivamente, existe, na Biblioteca da Universidade de Göttingen, o registro de uma tomada por Riemann do citado fascículo do *Jornal de Crelle*, com a data de 15 de fevereiro de 1854. Mas adverte que, no ensaio constante do citado fascículo do *Jornal de Crelle*, Lobachevski apenas remete a construções básicas examinadas em seu ensaio de 1829 (*Sobre os fundamentos da geometria*) e aprimora provas não completas que nele figuravam. Assim, o artigo contém exclusivamente uma série de fórmulas da geometria não euclidiana, sem apresentar uma discussão explícita dos fundamentos conceituais. Nesse ensaio, Lobachevski começou pelas fórmulas da trigonometria e delas extraiu diversas proposições de sua teoria geométrica. Não permite, pois, a um leitor desavisado apreender a amplitude de programa de Lobachevski.

SCHOLZ cita ainda a opinião, esposada por Friedrich Engel, de que, constrariamente ao seu desígnio declarado, esse artigo de Lobachevski não é adequado para difundir suas ideias. O parecer de Engel merece consideração, pois, para penetrar na obra de Lobachevski, estudara russo e dispusera do auxílio de Alexander Vasilyev, um matemático de Kazan. Verteu, em 1898, para o alemão e editou dois estudos de Lobachevski: *Sobre os fundamentos da geometria* (de 1829) e *Novos fundamentos da geometria* (de 1835). Esse parecer figura nos *Documentos para a história da geometria não euclidiana* [*Urkunde zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie*], livro que escreveu, juntamente com Paul Stäckel. (Engel fora assessor de Sophus Lie e teve papel relevante na exposição das ideias de seu preceptor.) [SCHOLZ 1982:220, 231; YAGLOM 1988:51, 162-163)

SCHOLZ [1982:220] lembra, além disso, que a data do citado empréstimo foi muito próxima da data da alocução, proferida em 10 de junho do mesmo ano, segundo Weyl. [RIEMANN 1923:III]. E nota que da lista de empréstimos da biblioteca da Universidade de Göttingen não consta nenhuma retirada, entre os anos 1850 e 1855, por Riemann ou por outro qualquer matemático, quer das *Disquisições geométricas sobre a teoria das retas paralelas* (*geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*), de Lobachevski, quer do texto escrito por János Bolyai (publicado em 1832 como apêndice ao livro de seu pai, Farkas Bolyai). Nesse apêndice, János Bolyai, independentemente de Lobachevski, apresentou uma introdução à geometria absoluta (isto é, da teoria geométrica que se pode construir sem o recurso ao quinto postulado de Euclides).

SCHOLZ [1982:214] refere que, até recentemente, não havia documentos que permitissem decidir peremptoriamente acerca de um suposto vínculo entre a alocução de Riemann e os trabalhos sobre geometria hiperbólica de Lobachevski e de Bolyai mas que a situação se modificou, após a liberação de alguns fragmentos de seu espólio pela Universidade de Göttingen. Dentre esses fragmentos avultam dois conjuntos:

(a) Notícias sobre a introdução e a elucidação do conceito de pluralidade. [*Notizen zur Einführung und Erklärung des Mannigfaltigkeitsbegriffs*.]

(b) Notícias sobre o esclarecimento de quesitos de fundação da geometria com a ajuda do conceito de pluralidade. [*Notiz zur Klärung der Grundlagenfragen der Geometrie mit Hilfe des Mannigfaltigkeitskonzeptes*.]

Desse último conjunto de fragmentos, SCHOLZ [1982:218-219] extrai um excerto, no qual Riemann referiu a infecundidade das pesquisas nas direções tradicionais: "Ainda que seja interessante, reconhecer a possibilidade desse tratamento da geometria, a efetivação do mesmo seria extremamente infecunda, pois desse modo não poderíamos encontrar nenhum teorema novo; e aquilo que aparenta ser simples e claro pelo desenvolvimento no espaço, se revelaria apenas complicado e difícil." (47) Comenta SCHOLZ que, se soubesse dos teoremas obtidos por Lobachevski e Bolyai, Riemann não haveria considerado tais investigações inférteis ou improdutivas.

Por outro lado, no parágrafo introdutivo da primeira seção de sua *Habilitationsvorlesung*, após anunciar seu desígnio de estender o conceito de grandeza multiplamente extensa, Riemann refere "não haver podido recorrer a nenhum trabalho anterior, salvo a algumas breves indicações feitas por Gauss" e "a algumas pesquisas filosóficas de Johann Herbart". (48)

Esse asserto sugere que, se conhecesse os teoremas de Lobachevski, Riemann não os usaria, por estar voltado para um outro tipo de tratamento do problema de fundar a geometria, tratamento esse mais próximo dos estudos de Gauss, no âmbito da geometria intrínseca de superfícies, que do método adotado desde Euclides por diversos estudiosos.

O ensaio de Riemann consiste em um plano de investigação [*Plan der Untersuchung*] e em três partes. A primeira parte é devotada ao "conceito de uma quantidade multiplamente extensa" [*Begriff einer n-fach ausgedehnter Grösze*], a segunda parte é dedicada "às relações métricas das quais uma pluralidade é susceptível" [*Maszverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist*] e a última parte trata do "emprego ao espaço" [*Anwendung auf den Raum*].

Na primeira parte, Riemann recorre ao plural neutro do vocábulo *quantum*, para designar determinadas partes de uma pluralidade, que se distinguem por um característica ou por uma fronteira e esclarece que sua comparação, segundo a quantidade, se opera pela enumeração, no caso de grandezas discretas, ou pela medida, no caso das grandezas contínuas. (49)

Riemann considera que a medida consiste na superposição das grandezas comparandas e que, por isso, exige o uso de uma das grandezas como referente da medida da outra. Na ausência dessa escala, duas grandezas poderão ser comparadas, somente se uma delas contiver a outra e, ainda assim, poderemos decidir apenas qual será a maior mas não poderemos determinar quantas vezes ela será maior. (50) [RIEMANN 1923:3]

"Nesse caso, os estudos que se podem conduzir acerca das grandezas constituem uma seção geral da teoria das grandezas, independente da determinação das grandezas, na qual as grandezas não são consideradas como existentes independentemente da posição ou

como exprimíveis mediante uma unidade, mas como regiões em uma pluralidade." (51) [RIEMANN 1923:3-4]

"Tais estudos se tornaram necessários a diversos ramos da matemática, especialmente ao tratamento das funções analíticas multiformes, e talvez a sua carência seja a causa principal de, até agora, haverem permanecido infecundos o renomado teorema de Abel e a obra de Lagrange, Pfaff e Jacobi relativa à teoria geral das equações diferenciais." (52) [RIEMANN 1854:3-4]

Nesse excerto se revela que Riemann percebera claramente a deficiência de certos ramos da matemática como o resultado da ausência de um conceito adequado de pluralidade. Beneficiados pela evolução da matemática, reconhecemos a pertinência dessa percepção pois, ao longo das últimas oito décadas do século XX, as principais teorias se conformariam à descrição de objetos situados em *pluralidades* adequadas. Como exemplo desse fato, pode citar-se o estudo de equações com derivadas parciais reduzido ao estudo dos núcleos de operadores lineares auto-adjuntos em um espaço de Hilbert. [Confronte-se, por exemplo, THAYER 1987.]

A segunda parte da *Habilitationsvorlesung* foi dedicada às "relações métricas das quais uma pluralidade n-dimensional fosse susceptível, sob a hipótese de que, independentemente da posição, as linhas tivessem um comprimento e que, portanto, toda linha pudesse ser medida por outra". (53) [RIEMANN 1854:6]

Nessa parte, Riemann estendeu o teorema, exposto por Gauss nas *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828), acerca da distância, medida sobre uma superfície, entre dois pontos infinitamente próximos. Gauss descreveu essa distância mediante a expressão $(\Sigma g_{hk} x_h x_k)^{(1/2)}$, sendo $1 \leq h \leq 3$ e $1 \leq k \leq 3$.

Riemann inicialmente postulou a independência da posição: "As determinações de medidas exigem que as grandezas sejam independentes do lugar, o que pode ocorrer de vários modos. A suposição que primeiramente se oferece, a qual adotarei, consiste em que o comprimento das linhas seja independente da posição. Logo, toda linha será mensurável por outra qualquer linha." (54) [RIEMANN 1923:7]

Em seguida, Riemann descreveu como se parametrizará uma curva situada em uma pluralidade: "Se a determinação da posição estiver associada à determinação de grandezas e, desse modo, o local de um ponto na dada pluralidade extensa de dimensão n estiver expressa mediante n diversas grandezas $x_1 \ldots x_n$, então a determinação de uma linha sobre essa pluralidade se reduz a definir as *n* grandezas x_h como funções de uma variável." (55) [RIEMANN 1923:7]

Depois, Riemann assinalou como se exprimirão os comprimentos: "Assim, a tarefa consiste em fornecer uma fórmula matemática do comprimento das linhas, para o que as grandezas x_h devem ser consideradas susceptíveis de se exprimirem como unidades." (56) [RIEMANN 1923:7]

Riemann logo explicitou as condições que serão admitidas: "Cuidarei dessa tarefa apenas sob certas condições e cingir-me-ei primeiramente àquelas linhas nas quais as razões entre as grandezas dx_h — as modificações concomitantes das grandezas x_h — variam continuamente. Então podemos considerar as linhas decompostas em elementos ao longo dos quais as razões dos incrementos dx_h podem ser consideradas constantes. E então a tarefa se converte em instituir uma fórmula geral do elemento de arco que dimana de cada ponto, contendo tal fórmula também as grandezas x_h e dx_h." (57) [RIEMANN 1923:7-8]

Riemann aduziu uma segunda hipótese: "Em segundo lugar, pressuponho que, abstraindo as grandezas de segunda ordem, o comprimento do elemento de arco permaneça invariável, quando a totalidade de seus pontos sofrer o mesmo deslocamento infinitamente pequeno; ou, equivalentemente, quando a totalidade das grandezas dx_h crescer na mesma razão, do mesmo modo o elemento de arco se modificará nessa razão." (58) [RIEMANN 1923:8]

Riemann deduziu uma consequência imediata das hipóteses admitidas: "Sob essas condições, o elemento de arco se converte em uma função homogênea, do primeiro grau, das grandezas dx_h, a qual permanece constante, quando a totalidade das grandezas dx_h trocam de sinal e na qual as constantes arbitrárias são funções contínuas das grandezas x_h." (59) [RIEMANN 1923:8]

Riemann esclareceu quais eram os casos mais simples: "Para encontrar os casos mais simples, primeiro procurarei uma fórmula para as pluralidades extensas de dimensão n-1 que permanecem igualmente afastadas da origem do elemento de arco. Dito de outro modo, procurarei uma função contínua da posição que distingue tais pluralidades uma da outra. Tais funções devem ou diminuir ou aumentar, da origem para todos os lados. Admitirei que elas cresçam em todas as direções e que assumam um valor mínimo na origem. Se forem finitas as respectivas derivadas de primeira e de segunda ordem, então as diferenciais de primeira ordem se anularão e as diferenciais de segunda ordem não assumirão jamais valores negativos. Admitirei que essas diferenciais de segunda ordem permaneçam sempre positivas." (60) [RIEMANN 1923:8]

Admitidas essas hipóteses, Riemann obteve a conclusão desejada: "Portanto, essa expressão diferencial de segunda ordem permanece constante, quando ds permanece constante; e cresce em razão quadrática, quando ambas as grandezas dx e, também assim, ds variam conjuntamente na mesma razão. Logo, essa expressão diferencial é o produto de uma constante por ds^2. Daí decorre que ds seja igual à raiz quadrada de uma função de segundo grau, inteiramente homogênea, das grandezas dx_h, que permanece sempre positiva, em cuja expressão os coeficientes são funções contínuas das grandezas x_h. Se exprimirmos a posição dos pontos mediante coordenadas ortogonais, obteremos para o espaço a diferencial $ds = \sqrt{\Sigma(dx_h)^2}$. Logo, o espaço se enquadra nesse caso simples." (61) [RIEMANN 1923:8-9]

Riemann exclui outras alternativas, como as expressões de quarto grau: "O caso simples mais próximo compreende as pluralidades, nas quais o elemento de arco se exprime

mediante a raiz quarta de uma expressão diferencial de quarto grau. A pesquisa dessa espécie mais geral não exigirá, na verdade, princípios essencialmente distintos mas despenderá tempo significativo e, proporcionalmente, lançará pouca iluminação na teoria do espaço, tanto mais que os resultatos não poderão exprimir-se geometricamente. Restringir-me-ei, por isso, às pluralidades nas quais o elemento de arco se exprime mediante a raiz quadrada de uma expressão diferencial de segundo grau." (62) [RIEMANN 1923:9]

Cabe advertir que, ao contrário do que se pode imaginar, essa alocução de Riemann somente foi publicada em 1868, após a morte prematura do autor, e, nesse ínterim, permaneceu pouco lida. Note-se que, mesmo após 1868, ao ensejo da discussão, na França, acerca a legitimidade dos sistemas geométricos não-euclidianos, Eugenio Beltrami citou Gauss (e não Riemann, como poderíamos supor), a fim de refutar a opinião de Angelo Genocchi de que toda superfície estivesse imersa em um espaço tridimensional. E, em carta (de 9 de junho do mesmo ano) escrita a Genocchi, Beltrami referiu haver vertido ao italiano "a memória póstuma de Riemann, muitíssimo interessante pela extrema importância e pela vastidão do tema, cuja brevidade era pouco adequada". [GRAY 1999:165; HALSTED 1902:60-61; PESIC 2007:6]

Somente após a maturação silenciosa do cálculo tensorial, que constituiria sua ferramenta inicial, ocorreram dois fatos que se mostraram decisivos no impulso ulteriormente dado à teoria das variedades. Por um lado, faltava a essa teoria um conceito análogo ao paralelismo, que desempenhara papel dominante na teoria euclidiana. Essa falta seria suprida por Tullio Levi-Civita, ao introduzir (em 1916) a noção de transporte paralelo. O segundo fato alargou fortemente o âmbito dessa teoria, concebida por Riemann para tratar de variedades nas quais o elemento de arco se exprimia através da fórmula $ds = \sqrt{\Sigma(dx_h)^2}$. A invenção da teoria restrita da relatividade, por Albert Einstein, seria interpretada por Hermann Minkowski e Henri Poincaré através de uma variedade quadridimensional dotada de uma forma quadrática *indefinida*. A pesquisa dos grupos que preservam a invariância da forma de Lorentz constituiu um filão que ainda não se esgotou. [REICH 1992:79; ROMERO & DAHIA 2005:20; DO CARMO 1988:37]

3.12 O declínio da hegemonia do modelo euclidiano

> "A geometria não-euclidiana não encerra em si nada de contraditório, embora, à primeira vista, muitos de seus resultados aparentem ser paradoxais. Essas contradições aparentes devem ser enxergadas como o efeito de uma ilusão, devido ao hábito que adquirimos, desde cedo, de considerar a geometria euclidiana como rigorosa." Carl Friedrich Gauss, carta a Schumacher, em 28 de novembro de 1846. (63)

Lobachevski, Bolyai e Gauss haviam percebido claramente a possibilidade de um sistema geométrico no qual não vigorasse a unicidade de paralelas exigida pelo quinto postulado de Euclides, a geometria absoluta. Destituída do quinto postulado, tal teoria seria mais geral porém mais pobre que a euclidiana. Um modo alternativo de reforçá-la seria admitir a existência de diversas retas paralelas a uma reta, por um ponto que lhe não pertencesse. Mas, enquanto Bolyai se voltara mais para o quesito lógico, Lobachevski e Gauss e ocuparam sobretudo da concordância entre os dados experimentais e os teoremas construídos na geometria hiperbólica. Resumidamente, Lobachevski e Gauss estavam mais interessados na veracidade que na consistência da teoria hiperbólica. [SCANLAN 1988:15; YAGLOM 1988:56]

À medida que se tornavam conhecidos os estudos de Lobachevski acerca da geometria hiperbólica, disseminou-se o receio de que, no futuro, se obtivessem, no âmbito dessa teoria, dois teoremas mutuamente contraditórios. Não se dispunha, então, de nenhuma ferramenta lógica que permitisse decidir a esse respeito, isto é, não havia recursos para a construção de uma prova *absoluta* de consistência. Deve enfatizar-se que, em linhas gerais, a suspeita de inconsistência nunca atingiu a formulação euclidiana da geometria. Pelo contrário, como já foi enfatizado, a teoria euclidiana gozava de incontestável credibilidade desde a Antiguidade e tal credibilidade fora reforçada pelos inúmeros bons êxitos obtidos mediante seu emprego à mecânica, de Newton a Lagrange. Assim, até então, questionamentos acerca de consistência se restringiram ao cálculo infinitesimal.

Surgiu, então, a possibilidade de se construírem provas *relativas* de consistência que, no caso da teoria hiperbólica, consistia simplesmente em exibir-se, na teoria euclidiana, alguma superfície que apresentasse propriedades idênticas ao plano hiperbólico. A consistência (absoluta) da teoria euclidiana certificaria a consistência (relativa) da teoria hiperbólica. Essa prova relativa de consistência da teoria hiperbólica foi conseguida por Eugenio Beltrami, que não a estava buscando.

No *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (1868), Beltrami quis mostrar que, em uma superfície dotada de curvatura constante e negativa, fosse válida a unicidade da reta que passa por dois quaisquer pontos. (Esse desígnio é declarado textualmente por Beltrami.)

Para obter essa ilação, Beltrami considerou uma tractriz Γ, curva planar definida por Leibniz, que goza da propriedade seguinte: Escolhida, no plano da curva Γ, uma reta A que lhe seja assintótica, é constante (igual a C) o comprimento do segmento da reta tangente, por um qualquer dos pontos dessa curva Γ, cujas extremidades são o ponto de tangência e a interseção da reta tangente com a reta A. Tomando-se a reta A como eixo das ordenadas e tomando a abscissa como variável independente, obtemos a equação cartesiana da tractriz, $(dy/dx)^2 = (C^2 - x^2)/x^2$.

Em seguida, Beltrami definiu a pseudosfera de raio C como a superfície gerada pela revolução da tractriz em torno do eixo das ordenadas, de equação $y = t - \tan t$, $\sqrt{(z^2 + x^2)} = 2/(e^t + e^{-t})$. O emprego da técnica elaborada por Gauss permite deduzir que a

curvatura intrínseca dessa superfície é constante e igual a $-1/C^2$. [KAGÁN 1986:323-324; SMOGORZHEVSKI 1976:69; STRUIK 1988:149; YAGLOM 1988:181]

E, depois, Beltrami mostrou que a pseudosfera admite um sistema de coordenadas análogo ao sistema de coordenadas cartesianas do plano euclidiano. Para isso, designando pontos arbitrários pelas coordenadas u e v, Beltrami mostrou que as condições u = constante e v = constante definiam duas famílias de geodésicas que gozavam das duas propriedades seguintes: (a) Dois quaisquer membros de uma mesma família não se intersecam. (b) Os membros definidos pelas condições u = 0 e v = 0 (a que Beltrami chamou eixos fundamentais) intersecam *ortogonalmente* todos os membros da outra família. Os ângulos segundo os quais se intersecam outras geodésicas variam de ponto a ponto, refletindo a curvatura das geodésicas. [SCANLAN 1988:23]

Beltrami obteve (da expressão da curvatura de superfícies) fórmulas que fornecem o cosseno e o seno do ângulo de interseção das geodésicas em um ponto arbitrário da pseudosfera. Tais fórmulas fornecem valores reais não negativos para θ, enquanto vigorar a condição $u^2 + v^2 \leq a^2$, para um certo valor a. (Se $u^2 + v^2 = a^2$, então $\theta = 0$.) Assim, Beltrami construiu um sistema de coordenadas na região delimitada pela curva fechada Λ, definida pela equação $u^2 + v^2 = a^2$. Assim, a cada par de valores reais (u,v) que satisfaçam à condição $u^2 + v^2 < a^2$ está associado um ponto da superfície situado na região circunscrita pela curva Λ, região essa que representaremos por Ω. Reciprocamente, a cada ponto dessa região Ω está associado um par de valores reais que atende à condição $u^2 + v^2 < a^2$. Essa correspondência bijetiva foi assinalada por Beltrami, ao afirmar que a região da superfície circunscrita pela curva Λ estivesse representada no disco (aberto) Δ do plano, circunscrito pelo círculo de raio a centrado na origem do sistema de coordenadas do plano. A tal círculo Beltrami chamou *círculo delimitante*. Notou ainda Beltrami que, consoante essa correspondência, a geodésicas sobre a região Ω correspondiam cordas no círculo delimitante e, ainda, que a geodésicas que fossem membros da família de curvas coordenadas correspondiam segmentos de retas paralelas aos eixos coordenados. [SCANLAN 1988:23-24]

Recorrendo à fórmula (diferencial) do elemento de arco de geodésicas, Beltrami mostrou que o comprimento L de um arco de geodésica, na superfície Ω, cujas extremidades fossem os pontos (0, 0) e (u, v), se exprimiria pela fórmula $L = (R/2)\log\{(a + \sqrt{(u^2 + v^2)})/ (a - \sqrt{(u^2 + v^2)})\}$, na qual R denota o inverso da curvatura da pseudosfera. Dessa fórmula decorre que, quando o ponto do disco Δ se aproxima (ao longo de uma reta pela origem) do círculo delimitante, o comprimento da correspondente geodésica *tende ao infinito*. Beltrami interpretou esse fato, dizendo que a curva Λ constituía um círculo geodésico de raio *infinito* e que, além da curva Λ, havia apenas regiões imaginárias ou ideais da superfície. Assim, a região Ω, circunscrita por Λ, compreendia a totalidade dos pontos reais da superfície, que se estendia indefinida e continuamente em todas as direções. [SCANLAN 1988:24-25]

A fim de se evitarem *anacronismos*, cumpre notarem-se dois aspectos no estudo conduzido por Beltrami. Primeiramente, Beltrami apresentou o cálculo da distância apenas entre a origem e um ponto qualquer da região Ω. (Não definiu, portanto, uma função distância associada a um par qualquer de pontos dessa região.) Em segundo lugar, ele não pretendeu *definir* a distância entre dois pontos na superfície Ω. Pelo contrário, Beltrami intentou *descobrir* uma fórmula de distância, recorrendo à geometria diferencial. Tal métrica não seria, pois, arbitrariamente, atribuída à superfície Ω, no modo inaugurado por Maurice Fréchet, ao introduzir axiomaticamente a noção de distância. Pelo contrário, Beltrami parecia considerar que tal *métrica* fosse inerente à superfície. Diante disso, constitui um anacronismo simplório afirmar que Beltrami propôs, nesse ensaio, um modelo euclidiano do plano hiperbólico. Nas palavras do próprio Beltrami, "as linhas geodésicas da superfície são representadas, em seu desenvolvimento total, pelas cordas no círculo delimitante, enquanto as extensões dessas cordas, na região exterior a esse círculo, não admitem representação. Por outro lado, dois pontos reais da superfície são representados por dois pontos, igualmente reais, no interior do círculo delimitante, que determinam uma corda desse círculo. Vemos, assim, que dois pontos reais da superfície, escolhidos de qualquer modo, determinam sempre uma única linha geodésica, representada, no plano auxiliar, pela corda que passa pelos dois pontos correspondentes. Assim, existem superfícies de curvatura negativa constante que não estão sujeitas às exceções verificadas nas superfícies de curvatura positiva constante e a elas podemos aplicar os teoremas da planimetria não-euclidiana." [*Apud* SCANLAN 1988:26]

As *exceções* referidas por Beltrami são a falência do postulado de que dois pontos determinem univocamente uma reta, postulado esse que não se verifica, por exemplo, na superfície de uma esfera, na qual dois quaisquer círculos máximos *distintos* se intersecam em dois pontos *antípodas*. Talvez Beltrami julgasse que essa falência fosse característica das geometrias de curvatura constante positiva. Felix Klein (1871) e Simon Newcomb (1877) mostrariam, independentemente, ser possível a existência de uma geometria de curvatura constante positiva, na qual vigorasse "o postulado da reta", como Beltrami o chamava. Em 1878, Wilhelm Killing mostraria a existência de *exatamente* quatro geometrias de curvatura constante: a euclidiana, a de Lobachevski-Bolyai, a esférica e a de Klein-Newcomb. (Comenta Moritz Epple que a leitura do artigo de Newcomb induziu Killing a entrar em cena.) [EPPLE 2003:939; HAWKINS 1980:298]

Assim, comete-se um anacronismo, quando se atribui a Beltrami o intuito de construir modelos geométricos, na acepção que hoje damos a essa locução. De fato, o surgimento de modelos, no âmbito das discussões acerca da legitimidade de teorias geométricas distintas da euclidiana, seria um dos impulsos à emancipação da lógica do quadro da axiomática material, ao qual se vinculava desde sua sistematização pelo Estagirita. Cabe lembrar que, em 1868, ainda não se impusera a distinção entre os aspectos sintáticos e semânticos de uma teoria. Nessa época, pelo contrário, a interpretação de uma teoria era inseparável da teoria considerada. [SCANLAN 1988:14]

A conclusão a que Beltrami chegou não foi amplamente aceita. Genocchi sustentou que não havia sido demonstrado que a equação diferencial parcial usada por Beltrami para caracterizar a pseudosfera admitia pelo menos uma integral que satisfizesse a

todas as condições impostas, a fim de que efetivamente representasse essa superfície. Não se encontrou traço de uma resposta de Beltrami, nem mesmo na correspondência epistolar com Genocchi. [HALSTED 1902:62]

Por outro lado, Jules Houël, em uma palestra proferida (em 1869) e publicada (em 1870) sob o título "*Nota sobre a impossibilidade de se demonstrar, por uma construção planar, a unicidade das paralelas, dito postulado de Euclides*" [*Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane l'unicité des paralleles dit Postulatum d'Euclide*], extraiu das memórias de Beltrami a conclusão de que o postulado das paralelas fosse independente da *geometria absoluta* e que, portanto, a geometria hiperbólica fosse consistente. Note-se que esse quesito não fora o escopo principal de Lobachevski, embora esse geômetra houvesse estado próximo de resolvê-lo, faltando-lhe apenas recorrer a um sistema de coordenadas no plano hiperbólico, presentemente denominadas coordenadas de Beltrami. [SCANLAN 1988:28; YAGLOM 1979:VI; YAGLOM 1988:56 e 182, n. 170]

Em outro ensaio do mesmo ano de 1868, intitulado "*Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*", Beltrami considerou também uma correspondência entre o plano hiperbólico e o interior de um disco (de raio igual a 1) no plano euclidiano. A cada ponto P do plano hiperbólico se associa um par de coordenadas x e y tais, que $x^2 + y^2 < 1$. Tal correspondência fornece um outro modelo do plano hiperbólico que, nos anos seguintes seria exaustivamente explorado. [KAGÁN 1986:331; MUMFORD et alii 2002:378-380; SCANLAN 1988:23-25]

Ironicamente, o modelo da pseudosfera, que, talvez por recorrer a uma superfície de revolução, tenha constituído um argumento suficientemente forte para convencer espíritos mais incrédulos da legitimidade lógica da geometria hiperbólica, continha um defeito irremovível, que seria apontado por David Hilbert, em um ensaio de 1901 (*Über Flachen von konstanter Krümmung*). É que, na superfície da pseudosfera, ao contrário do que acontece no plano hiperbólico, algumas geodésicas não podem ser prolongadas indefinidamente (propriedade que se exige de uma reta, consoante o segundo postulado de Euclides). Hilbert mostraria ser impossível instituir uma correspondência biunívoca entre *todos* os pontos do plano hiperbólico e os pontos da pseudosfera, asserto que se estenderia a todas as superfícies de curvatura constante e negativa, *imersas no espaço euclidiano tridimensional*. [HILBERT & COHN-VOSSEN 1952:242-243; SCANLAN 1988:26; STRUIK 1988:153; YAGLOM 1988:68]

Também há uma distinção de caráter topológico entre a pseudosfera e o plano hiperbólico: Há curvas fechadas na pseudosfera que não se podem contrair a um ponto, mediante uma transformação contínua definida nessa superfície. [HADAMARD 1999:18]

Esse fato constitui um ilustrativo exemplo, interessante à epistemologia, de que um erro pode ser fecundo, pois a suposta correção do modelo da pseudosfera concorreria decisivamente para a adoção da teoria hiperbólica, até então (1968) considerada, por amplos segmentos intelectuais, como uma simples lucubração matemática. [YAGLOM 1988:67-68].

Também foi indicado que na pseudosfera existem curvas fechadas que não se podem reduzir a um ponto mediante transformações contínuas sobre essa superfície. Assim, a pseudosfera é topologicamente equivalente ao plano hiperbólico apenas *localmente* (mas não o é globalmente). [HADAMARD 1999:18]

Também se deve consignar que apenas fora vencida a resistência à teoria hiperbólica *bidimensional*. Ainda em 1868, Luigi Cremona e o próprio Beltrami duvidavam da legitimidade da teoria hiperbólica *tridimensional*. [GRAY 1999:165]

Porém, após a leitura atenta da alocução de Riemann *Sobre as hipóteses* ..., Beltrami redigiu um outro artigo sobre um espaço pseudosférico n-dimensional. Nesse escrito, construiu um modelo, identificando os pontos de um espaço não euclidiano n-dimensional com certos pontos interiores a um hemisfério do espaço euclidiano de dimensão n+1, dotado de uma métrica adequada (na acepção proposta por Riemann no ensaio citado). Verificou, além disso, que esse modelo era simplesmente conexo. [MILNOR 1982:11]

Ao reconhecer o papel desempenhado pela noção de curvatura intrínseca, formulada por Gauss, alguns autores, como DO CARMO [1987:33], não se receiam de admitir que Gauss conhecesse tanto o exemplo da pseudosfera, formulado por Beltrami, quanto o defeito por ele apresentado.

Gauss podia, realmente, conhecer esse exemplo, pois a pseudosfera já fora descrita, em 1839, por Ferdinand Minding, em um estudo das superfícies de curvatura constante e negativa. Minding também notou que, substituindo-se, nas fórmulas da trigonometria esférica, o raio da esfera por $1/\sqrt{K}$, onde K denota a curvatura intrínseca de uma superfície Ω de curvatura constante, se obtêm as fórmulas das relações *trigonométricas* para os triângulos geodésicos na superfície Ω. Esse estudo de Minding fora publicado no volume XIX do *Journal de Crelle* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*). [ALEXANDROV 1976:143; RUSSELL 1897:25; YAGLOM 1988:181]

O Journal de Crelle era o primeiro veículo importante de divulgação da pesquisa matemática. Esse mesmo periódico estampara, no volume XVII (1837:295-320), um artigo de Lobachevski, *Géométrie imaginaire*, no qual esse geômetra percorreu o caminho oposto à via trilhada nos escritos anteriores. Em vez de iniciar com os postulados e deles deduzir fórmulas da trigonometria, começou pelas fórmulas da trigonometria e delas extraiu diversas proposições de sua teoria geométrica. [EVES 1997:533, 565; KAGÁN, 1986:211-213]

Felix Klein surpreendeu-se de que se despendessem trinta anos, a fim de se instituir a conexão entre os estudos de Lobachevski e os de Minding. [RUSSELL 1897:26]

Não existe, porém, prova documental de que Gauss também soubesse da restrição a que essas superfícies de curvatura constante e negativa se sujeitassem, por estarem imersas no espaço euclidiano tridimensional. Parece-me, pois, que a opinião esposada por DO CARMO [1987:33] se possa qualificar como hagiográfica.

Nesse resumo da evolução das ideias sobre a geometria, foram ignorados outros fatores culturais que, consoante a visão social da história, desempenharam papel ponderável. Joan Richards, por exemplo, sustenta que a existência de uma comunidade intelectual receptiva foi determinante na aceitação da teoria hiperbólica. [DAVIS & HERSH 1988:227]

3.13 Resumo

Mediante a narrativa de alguns episódios, foi indicada a origem de diversos quesitos que participam, de algum modo, do núcleo de problemas epistêmicos da matemática. Entre eles, citaram-se:

- A invenção da geometria das superfícies, no abordamento extrínseco (por Monge) e no abordamento intrínseco (por Gauss).
- A diversidade entre as concepções insular e continental acerca da natureza do cálculo infinitesimal.
- O impacto de doutrinas filosóficas (como as ideias de Locke e as de Condillac) sobre a cultura matemática, no interstício de 1780 a 1820, na qual se opunham a concepção *sintática* de Lagrange e a concepção *quase empírica* de Monge.
- O fortalecimento do culto do rigor, que se converteria em uma exigência permanente, determinada pela expansão do conhecimento matemático.
- Um outro modelo (de Lobachevski) do espaço físico, o declínio do modelo euclidiano e o questionamento (proposto por Riemann) sobre a fundamentação da geometria.

3.14 Fontes

(1) [...] *the use of curves in geometry is that by their intersection problems can be solved.* [BOS 1984:356]

(2) *At the moment when we now write, the treatises of Maclaurin and Simpson are the best which we have in the fluxionary calculus, though such a vast multitude of improvements have been made by the foreign mathematicians, since the time of their first publication. These are facts, which it is impossible to disguise; and they are of such extent, that a man may be perfectly acquainted with every thing on mathematical learning that has been written in this country, and may yet find himself stopped at the first page of the works of Euler and D'Alembert. He will be stopped, not from the difference of the fluxionary notation (a difficulty easily overcome), nor from the obscurity of these authors, who are both very clear writers, especially the first of them, but from want of knowing the principles and the methods which they take for granted as known to every mathematical reader.* [*Apud* GUICCIARDINI 2004:247-248]

(3) [...] *eighteenth-century Scotland was an internationally-recognized center of knowledge, a modern Athens in the eyes of an enlightened world.* [GRABINER 1997:393]

(4) *Algebra and arithmetic are the only sciences in which we can carry on a long chain of reasoning without losing certainty. Geometry is not so certain as algebra and arithmetic, because we cannot be sure of the truth of its axioms.* [RUSSELL 1972:663-664]

(5) [...] *the epistemological doctrines associated with the Common Sense Philosophy of Thomas Reid and Dugald Stewart not only reinforced an appreciation of geometrical reasoning, but also provided a significant obstacle to the acceptance of analytical methods by Scottish mathematicians.*] [OLSON 1971:30]

(6) *Nous touchons au moment d'une grande révolution dans les sciences. Au penchant que les esprits me paraissent avoir à la morale, aux belles-lettres, à l'histoire de la nature, et à la physique expérimentale, j'oserais presque assurer qu'avant qu'il soit cent ans, on ne comptera pas trois grands géomètres en Europe. Cette science s'arrêtera tout court où l'auront laissée les Bernoulli, les Euler, les Maupertuis, les Clairaut, les Fontaine et les d'Alembert. Ils auront posé les colonnes d'Hercule. On n'ira point au-delà. Leurs ouvrages subsisteront dans les siècles à venir, comme ces pyramides d'Égypte dont les masses chargées d'hiéroglyphes réveillent en nous une idée effrayante de la puissance et des ressources des hommes qui les ont élevées.* [DIDEROT 1754:5]

(7) [...} *toward the end of the century some of the leading mathematicians expressed the feeling that the field of mathematics was somehow exhausted.* [STRUIK 1987:136]

(8) *Ne vous semble-t-il pas que la haute géométrie va un peu en décadence?* [STRUIK 1933:105]

(9) [...] *je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne réponds que je fasse encore de la géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'à moins qu'on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner. La Physique et la Chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile; aussi le goût du siècle paraît-il entièrement tourné de ce côté-là et il n'est pas impossible que les places de Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités.* [*Apud* QUEYSANNE & DELACHET 1955:16]

(10) *Meusnier commence comme je finis.* [STRUIK 1933:106-107]

(11) *Nach ihm sind unsere Gefühle, Urteile und Handlungen, überhaupt alle seelischen Produkte bis hinauf zu den höchsten Ideen nichts als Nachwirkungen unserer Sinneseindrücke; alle psychischen Tätigkeiten sind umgeformte Empfindungen, alles Geistesleben ist Sinnesleben; alle Neigungen, auch dis sittlichsten, stammen aus de Selbstliebe.* [FRIEDELL 1974:664]

(12) *A mon avis, le mathématicien, en tant que mathématicien, n'a pas à se préoccuper de philosophie; opinion qui, d'ailleurs, a été formulée par bien des philosophes. Ses efforts de réflexion, de compréhension doivent être en quelque sorte intérieurs aux mathématiques au lieu de porter sur les rapports de celles-ci avec la philosophie.* [LEBESGUE 1975:179]

(13) *With his geometry this devil of a man will make himself immortal.* [DARBOUX 1905:518]

(14) *It might be imagined that no significant properties of a figure could be found if we do without measurement of distances and angles and that only vague statements could be made. And indeed research was confined to the metrical side of geometry for a long time and questions of the kind we shall discuss in this chapter arose only later, when the phenomena underlying perspective painting were being studied scientifically. Thus, if a plane figure is projected from a point onto another plane, distances and angles are changed, and in addition, parallel lines may be changed into lines that are not parallel; but certain essential properties must nevertheless remain intact, since we could not otherwise recognize the projection as being a true picture of the original figure.* [HILBERT & COHN-VOSSEN 1952:94]

(15) *Il serait difficile et peut-être téméraire d'analyser les chances que l'avenir offre à l'avancement des mathématiques; dans presque toutes les parties, on est arrêté par des difficultés insurmontables; des perfectionnements de détail semblent la seule chose qui reste à faire. Toutes ce difficultés semblent annoncer que la puissance de notre analyse est à peu près épuisée, comme celle de l'algèbre ordinaire l'était par rapport à la géométrie transcendente au temps de Leibniz et de Newton.* [*Apud* BOUTROUX 1920:155-156]

(16) *Just as philosophy and art generate interpretations of reality, so science was now seen as part of an interpretive effort.* [JAHNKE 1993:267]

(17) *Ueber die Bedingungen unter denen Wissenschaft und Kunst in einem Volke gedeihen. Mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und die gegenwartige Zeit.* [JAHNKE 1993:267]

(18) *Die Mathematik beschäftige sich nicht mit dem Beweis des Daseins der Dinge, sondern nur ganz allein mit den Bedingungen ihrer Moglichkeit.* [JAHNKE 1991:280]

(19) *Die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus durch die Vielfachen ihrer Bögen.* [JAHNKE 1987:111]

(20) [...] *ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considerées ... que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment.* [*Apud* BRUNSCHVICG 1872:330-331]

(21) *En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière precise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude.* [*Apud* FREUDENTHAL 1971:376]

(22) [...] *quand même je ne connaitrais ni la manière d'exprimer F en x, y, z, ni la forme de l'équation entre F et x, y, z; je saurai que F est fonction de x, y, z.* [DHOMBRES 1986:155]

(23) *Les anciens analystes comprenaient, en général, sous la dénomination de fonctions d'une quantité, toutes les puissances de cette quantité. Dans la suite, on a étendu le sens de ce mot, en l'appliquant aux*

résultats des diverses opérations algébriques: ainsi on a encore appelé fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression algébrique renfermant, d'une manière quelconque, des sommes, des produits, des quotients, des puissances, et des racines de ces quantités. [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:334]

(24) Enfin, de nouvelles idées, amenées par les progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions. *Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.* [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:334; *apud* DHOMBRES 1986:154]

(25) *La propriété commune à toutes les fonctions d'admettre une limite, dans le rapport de leurs accroissements à ceux de la variable dont elles dépendent, limite différente pour chaque fonction, mais constamment la même pour une même fonction et toujours indépendante des valeurs absolues des accroissements, est un fait analytique bien constaté.* [DHOMBRES 1986:157]

(26) *I1 y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun. Une fonction continue, aurait-on dit, est par essence susceptible d'être représentée par une courbe et une courbe a évidemment toujours une tangente.* [POINCARÉ 1898:5]

(27) Nessa balada, Goethe narrou os dissabores de um aprendiz de feiticeiro que, tendo proferido uma palavra mágica, incitou as potências transcendentes mas que não sabia dominá-las. Constituiu o tema do poema sinfônico *L'apprenti sorcier*, de Paul Dukas (1897). Cf. *Meyers Handbuch über die Musik*, p. 556. Meyers Lexikonverlag, 1971.

(28) *Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui, ce que Newton connut sans sortir de chez lui.* [CASINI 1995:65]

(29) *Ich halte diesen jungen Geometer von Bolyai für eine Genie erster Grösze* [...] *worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde mit groszer Eleganz entwickelt.* [*Apud* BONOLA 1955:122]

(30) [...] *the use made by Newton of the formalism of Euclidean geometry, together with the overwhelming success of his approach to physics and astronomy based on the model of Euclidean space, enshrined Euclidean geometry and cloaked it in a certainty and inevitability that made questioning it appear to be a sign of mental instability.* [OSSERMAN 2005:1030]

(31) *Ich kann nun aus der Gesammtheit der Fälle einen Komplex von Fällen herausgreifen, ich kann z.B. die lineare Gleichung* $ax + by + c = 0$ *aufstellen und nun alle diejenigen Fälle zusammenfassen, wo* x *und* y *dieser Gleichung genügen; ich könnte diesen Komplex von Fallen eine Gerade nennen. Aus dieser Definition der Geraden würde ich alle Sätze ableiten können, welche in der Geometrie über die Gerade stattfinden. Es ist klar, dasz man auf diese Weise fortfahren könnte, ohne die mindeste räumliche Anschauung zu Hülfe zu nehmen.* [RIEMANN: *Nachlasznotiz zu Mannigfaltigkeiten und den Grundlagen der Geometrie. Apud* SCHOLZ 1982:229]

(32) [...] *la plupart des mathématiciens du XIX*^{e} *siècle ont établi une séparation radicale entre l'arithmétique et la géométrie. La première aurait une vérité du type logique, dérivant de la pensée*

abstraite; la seconde une vérité du type physique, qui s'appuie sur l'expérience. La première appartiendrait au groupe des mathématiques pures; la seconde au groupe des mathématiques appliquées. [BRUNSCHVICG 1972:497]

(33) *Wir müssen in Demuth zugeben, dasz, wenn die Zahl blosz unsers Geistes Produkt ist, der Raum auch auszer unserm Geiste eine Realität hat, der wir* a priori *ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.* [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:497]

(34) *Größenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zuläßt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Übergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder diskrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heißen im erstern Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit.* [RIEMANN 1923:3]

(35) *Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für Konstruktionen im Raume als etwas Gegebenes voraus.* [RIEMANN 1923:1]

(36) *Sie gibt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältnis dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und inwieweit ihre Verbindung notwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.* [RIEMANN 1923:1]

(37) [...] *glaube ich um so mehr auf eine nachsichtige Beurteilung Anspruch machen zu dürfen, da ich in dergleichen Arbeiten philosophischer Natur, wo die Schwierigkeiten mehr in den Begriffen, als in der Konstruktion liegen, wenig geübt bin* [...]. [RIEMANN 1923:2]

(38) *Es hatte dies seinen Grund wohl darin, daß der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Größen, unter welchem die Raumgrößen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb.* [RIEMANN 1923:1]

(39) *Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe aus allgemeinen Größenbegriffen zu konstruieren.* [RIEMANN 1923:1]

(40) *Es wird daraus hervorgehen, daß eine mehrfach ausgedehnte Größe verschiedener Maßverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Größe bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, daß die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Größenbegriffen ableiten lassen, sondern daß diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Größen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können.* [RIEMANN 1923:1-2]

(41) [...] *dasz die Hypothese der Existenz eines Mediums zur Erklärung aller grundlegender Naturkräfte notwendig ist.* [RIEMANN 1853, *apud* BOI 1994:195-196]

(42) *Beide Klassen von Erscheinungen lassen sich erklären, wenn man annimmt, dasz den ganzen unendlichen Raum ein gleichartiger Stoff erfüllt, und jedes Stoffteilchen unmitelbar nur auf seine Umgebung einwirkt.* [RIEMANN 1853, *apud* BOI 1994:196]

(43) *Immerhin steht fest, daß von dieser Beziehung zur Gravitation* RIEMANN *nichts bekannt war; denn seine eigenen Versuche 'den Zusammenhang von Licht, Elektrizität, Magnetismus und Gravitation' zu ergründen, die zeitlich mit der Probevorlesung zusammenfallen, stehen sachlich in keiner Verbindung mit ihr.* [RIEMANN 1923:IV]

(44) *Darauf beschäftigte ich mich wieder mit meiner Untersuchung über den Zusammenhang der physikalischen Grundgesetze und vertiefte mich so darin, daß ich, als mir das Thema zur Probevorlesung beim Colloquium gestellt war, nicht gleich wieder davon loskommen konnte.* [RIEMANN 1923:IV]

(45) *Die beiden Dinge, die damals in seinem Gerhirn sich störten, sind jetzt aufs engste miteinander verwachsen.* [WEYL, in RIEMANN 1923:IV]

(46) *Hieraus ensteht die Aufgabe, die einfachsten Tatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Maßverhältnisse des Raumes bestimmen lassen — eine Aufgabe, die der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt ist; denn es lassen sich mehrere Systeme einfacher Tatsachen angeben, welche zur Bestimmung der Maßverhältnisse des Raumes hinreichen; am wichtigsten ist für den gegenwärtigen Zweck das von* EUKLID *zugrunde gelegte. Diese Tatsachen sind wie alle Tatsachen nicht notwendig, sondern nur von empirischer Gewiszheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Warscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr groß ist, untersuchen und hiernach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung sowohl nach der Seite des Unmeßbargroßen, als nach der Seite des Unmeßbarkleinen urteilen.* [RIEMANN 1923:2]

(47) *Wenn es aber auch interessant ist, die Möglichkeit dieser Behandlung der Geometrie einzusehen, so würde doch die Ausführung derselben äusserst unfruchtbar sein; denn wir würden dadurch keine neuen Sätze finden können, und das, was bei der Darstellung im Raume einfach und übersichtlich erscheint, würde dadurch nur verwickelt und schwierig werden.* [RIEMANN, *apud* SCHOLZ 1982:218-219]

(48) [...] *auszer einigen ganz kurzen Andeutungen, welche Herr Geheimer Hofrat* GAUSS *in der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste, in dem Göttingenschen gelehrten Anzeigen und in seiner Jubiläumsschrift darüber gegeben hat, und einigen philosophischen Untersuchungen* HERBARTS, *durchaus keine Vorarbeiten benutzen konnte.* [RIEMANN 1923:2]

(49) *Bestimmte, durch ein Merkmal oder eine Grenze unterschiedene Teile einer Mannigfaltigkeit heißen Quanta. Ihre Vergleichung der Quantität nach geschieht bei den diskreten Größen durch Zählung, bei den stetigen durch Messung.* [RIEMANN 1923:3]

(50) *Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichende Größen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Größe als Maßstab für die andere forzutragen. Fehl dieses, so kann man zwei Größen nur vergleichen, wenn die eine ein Teil der andern ist, und auch dann nur als Mehr oder Minder, nicht das Wieviel entscheiden.* [RIEMANN 1923:3]

(51) *Die Untersuchungen, welche sich in diesem Falle über sie anstellen lassen, bilden einen allgemeinen von Maßbestimmungen unabhängigen Teil der Größenlehre, wo die Größen nicht als unabhängig von der*

Lage existierend und nicht als durch eine Einheit ausdrückbar, sondern als Gebiete in einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden. [RIEMANN 1923:3-4]

(52) *Solche Untersuchungen sind für mehrere Teile der Mathematik, namentlich für die Behandlung der mehrwertigen analytischen Funktionen ein Bedürfnis geworden, und der Mangel derselben ist wohl ein Hauptursache, daß der berühmte Abelsche Satz und die Leistungen von Lagrange, Pfaff, Jacobi für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen solange unfruchtbar geblieben sind.* [RIEMANN 1854:3-4]

(53) *Maszverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzungen, dasz die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede meszbar ist.* [RIEMANN 1854:6]

(54) *Maßbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Größen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, daß die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede meßbar sei.* [RIEMANN 1923:7]

(55) *Wird die Ortsbestimmung auf Größenbestimmungen zurückgeführt, also die Lage eines Punktes in der gegegeben n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit durch n veränderliche Größen* x_1, x_2, x_3 *und so fort bis* x_n *ausgedrückt, so wird dir Bestimmung einer Linie darauf hinauskommen, daß die Größen x als Funktionen einer Veränderlichen gegeben werden.* [RIEMANN 1923:7]

(56) *Die Aufgabe ist dann, für die Länge der Linien einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, zu welchem Zwecke die Größen x als in Einheiten ausdrückbar betrachtet werden müssen.* [RIEMANN 1923:7]

(57) *Ich werde diese Aufgabe nur unter gewissen Beschränkungen behandeln und beschränke mich erstlich auf solche Linien, in welchen die Verhältnisse zwischen den Größen dx — den zusammengehörigen Änderungen der Größen x — sich stetig ändern; man kann dann die Linien in Elemente zerlegt denken, innerhalb deren die Verhältnisse der Größen dx als konstant betrachtet werden dürfen, und die Aufgabe kommt dann darauf zurück, für jeden Punkt einen allgemeinen Ausdruck des von ihm ausgehenden Linienelements ds aufzustellen, welcher also die Größen x und die Größen dx enthalten wird.* [RIEMANN 1923:7-8]

(58) *Ich nehme nun zweitens an, daß die Länge des Linienelements, von Größen zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn sämtliche Punkte desselben dieselbe unendlich kleine Ortänderung erleiden, worin zugleich enthalten ist, daß, wenn sämtliche Größen dx im demselben Verhältnisse wachsen, das Linienelement sich ebenfalls in diesem Verhältnisse ändert.* [RIEMANN 1923:8]

(59) *Unter diesen Annahmen wird das Linienelement eine beliebige homogene Funktion ersten Grades der Größen dx sein können, welche ungeändert bleibt, wenn sämtliche Größen dx ihr Zeichen ändern, und worin die willkürlichen Konstanten stetige Funktionen der Größen x sind.* [RIEMANN 1923:8]

(60) *Um die einfachsten Fälle zu finden, suche ich zunächst einen Ausdruck für die (n-1)-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, welche vom Anfangspunkte des Linienelements überall gleich weit abstehen, d.h. ich*

suche eine stetige Funktion des Orts, welche sie voneinander unterscheidet. Diese wird vom Anfangspunkt aus nach allen Seiten entweder ab- oder zunehmen müssen; ich will annehmen, daß sie nach allen Seiten zunimmt und also in dem Punkte ein Minimum hat. Es muß dann, wenn ihre ersten und zweiten Differentialquotienten endlich sind, das Differential erster Ordnung verschwinden und das zweiter Ordnung darf nie negativ werden; ich nehme an, daß es immer positiv bleibt. [RIEMANN 1923:8]

(61) *Dieser Differentialausdruck zweiter Ordnung bleibt alsdann konstannt, wenn ds konstant bleibt, und wächst im quadratischen Verhältnisse, wenn die Größen dx und also auch ds sich sämtlich in demselben Verhältnisse ändern; er ist also gleich* $\mathrm{const}\cdot ds^2$, *und folglich ist ds gleich der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Funktion zweiten Grades der Größen dx, in welcher die Koeffizienten stetige Funktionen der Größen x sind. Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Koordinaten ausdrückt,* $ds = \sqrt{\Sigma(dx)^2}$; *der Raum ist also unter diesem einfachsten Falle enthalten.* [RIEMANN 1923:8-9]

(62) *Der nächst einfache Fall würde wohl die Mannigfaltigkeiten umfassen, in welchen sich das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdrucke vierten Grades ausdrücken läßt. Die Untersuchung dieser allgemeinern Gattung würde zwar keine wesentlich andere Prinzipien erfordern, aber ziemlich zeitraubend sein und verhältnismäßig auf die Lehre vom Raume wenig neues Licht werfen, zumal da sich die Resultate nicht geometrisch ausdrücken lassen; ich beschränke mich daher auf die Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausgedrückt wird.* [RIEMANN 1923:9]

(63) *La géométrie non-euclidienne ne renferme en elle rien de contradictoire, quoique, à première vue, beaucoup de ses résultats aient l'air de paradoxes. Ces contradictions apparentes doivent être regardées comme l'effet d'une illusion, due à l'habitude que nous avons prise de bonne heure de considérer la géométrie euclidienne comme rigoureuse.* [GAUSS, *apud* HALSTED 1891:8]

Capítulo quarto

Breve introdução histórica ao pensamento matemático: parte C

> "Também deveria ser desnecessário acentuar que a matemática, por mais abstrata e precisa que seja, é uma ciência da experiência, pois a experiência não se restringe aos sentidos grosseiros. Também a mente humana pode experimentar e não devemos ser tão ingênuos, para considerar um osciloscópio como um instrumento mais preciso que o cérebro humano." (1) [TRUESDELL 1968:334]

Sumário

4.1 Antelóquio

4.2 A bela infiel e a concepção de uma álgebra simbólica

4.3 A intuição e a aritmetização da análise

4.4 O logicismo

4.5 O intuicionismo

4.6 O formalismo

4.7 O pragmaticismo

4.8 Resumo

4.9 Fontes

4.1 Antelóquio

Ensinam DA Costa *et alii* [1995:94-95] que, em certos contextos, se pode instituir uma distinção entre a filosofia da matemática e os fundamentos da matemática: "Compete aos **fundamentos**, em geral, a responsabilidade tanto pela reconstrução de diversos

domínios da matemática (de modo que se evitem, por exemplo, o surgimento de paradoxos e de outras anomalias conceituais no seu interior) quanto pela construção de certos modelos para as teorias matemáticas já reconstruídas (como, no interior da análise, a construção do corpo dos reais por cortes de Dedekind). Quanto à **filosofia da matemática**, por seu turno, compete a ela proceder a uma análise de certas questões de natureza filosófica sobre a própria disciplina (tais quais aquelas que envolvem a existência dos objetos matemáticos e o acesso que temos a eles), para tanto articulando interpretações da própria matemática. É evidente que essa distinção (como é usual em questões de caráter filosófico) não deixará de apresentar consideráveis dificuldades, havendo inegavelmente uma íntima conexão entre ambos os domínios (da filosofia e dos fundamentos da matemática)." (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Consoante essa distinção, o presente capítulo é atinente a alguns quesitos fundacionais. Serão expostos alguns aspectos da reconstrução da álgebra e da análise e apresentar-se-á uma descrição do contexto no qual se produziram as três principais correntes fundacionais.

4.2 A bela infiel e a concepção de uma álgebra simbólica

> "Sabemos que os matemáticos se ocupam da Lógica tão pouco quanto os lógicos se interessam pela Matemática. Os dois olhos da ciência exata são a Matemática e a Lógica. A seita matemática dispensa o olho lógico e a seita lógica dispensa o olho matemático, cada um acreditando que pode enxergar melhor com um olho que com os dois." Augustus De Morgan (1868). (2) [*Apud* VALENCIA 2001:75]

Les belles infidèles é o nome de um ensaio substantivo, redigido por Georges Mounin (1955), acerca da arte de traduzir. Esse epíteto era atribuído às adaptações dulcificadas à língua francesa, praticadas não raramente no século XVIII, de obras literárias compostas em outros idiomas.

Talvez o cognome 'bela infiel' também caiba à versão inglesa do *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* (1802), escrito por Sylvestre Lacroix, antigo aluno de Monge. Sua primeira parte foi traduzida por Charles Babbage e a segunda parte foi transposta por George Peacock e John Herschel. Essa versão inglesa, *An elementary treatise of the differential and integral calculus*, incluía um apêndice por Herschel e notas por Peacock e Herschel. Foi editada em 1816, sob o estímulo da *Analytical Society*, um grêmio de estudantes

que coalesceu em Cambridge, entre 1812 e 1814, em torno de Robert Woodhouse. [ORTIZ 2007:126; CRAIK 1999:239-240; RICHARDS 1991:299]

Woodhouse, docente em Cambridge, advertia no atraso dos matemáticos ingleses e propugnava um renascimento da pesquisa matemática insular através da injeção enérgica das ideias dominantes no Continente. Escreveu *The Principles of Analytical Calculation* (1803), no qual reviu as teorias de Leibniz, Newton, d'Alembert e Lagrange. Dentre essas foi a última que mais lhe agradou, por vincular o cálculo à álgebra. Afirmou Woodhouse que "o cálculo diferencial ... deveria ser considerado um ramo da álgebra comum ou, melhor, uma parte da linguagem simbólica comum na qual se trata da quantidade". (3) [KOPPELMANN 1971:176] Mas Woodhouse censurou Lagrange por esse haver admitido que toda função pudesse ser expandida em série de Taylor.

Em um ensaio anterior, intitulado "*On the independence of the analytical and geometrical methods of investigation and on the advantages to be derived from their separation*" (1802), Woodhouse afirmou que a introdução de métodos geométricos nas investigações analíticas fosse sempre desnecessária, pois sendo a álgebra uma linguagem universal, "deveria ser suficiente para exprimir todas as condições pertinentes ao tema sob investigação". (4) [KOPPELMANN 1971:178]

A *Analytical Society* teve uma vida breve. Em 1813, referindo-se ao cometimento animado por Woodhouse, Herschel escreveu a um amigo que "o fogo do entusiasmo se dissemina, somente quando encontra matéria inflamável que o receba e o afague. Quão poucos, quão pouquíssimos são aqueles que se dispõem a encetar, de corpo e alma, uma tarefa de labor tão colossal e de recompensa tão diminuta". (5) [HERSCHEL*, apud* RICHARDS 1991:306-307, 310; CRAIK 1999:249, 253]

A tradução do *traité élémentaire* foi oprimida por uma mole de notas de revisão que refletiam diferentes perspectivas na estimação da matemática e escolhas distintas do fundamento rigoroso do cálculo infinitesimal. Essas escolhas se exerceriam entre o tratamento algébrico mediante as séries de Taylor (adotado por Lagrange na *Théorie des fonctions analytiques*) e o tratamento apoiado na noção de razão limitante (praticado por d'Alembert). [RICHARDS 1991:309-310]

Esse *traité élémentaire* era um resumo de um outro *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, cujo primeiro volume veio a lume em 1797, o mesmo ano em que foi publicada a *Théorie des fonctions analytiques*, de Lagrange. Na distribuição da matéria, esse tratado é semelhante aos textos de cálculo escritos por Euler. *Grosso modo*, o primeiro volume de Lacroix corresponde ao *Calculi differentialis* (1755) de Euler e o segundo volume de Lacroix é correlato aos três volumes do *Calculi integralis* (1768-1770) de Euler. Os temas discutidos por Euler na *Introductio in analysin infinitorum* (1748) encontram-se distribuídos pelo primeiro e pelo terceiro volumes do tratado de Lacroix. Em carta (de 1789) a Adrien-Marie Legendre,

Lacroix indicou o *Calculi integralis* de Euler como um dos manuais mais completos. O desígnio de Lacroix fora redigir um tratado que preenchesse a lacuna entre os textos introdutivos e as memórias de pesquisa; constituiria, pois, um *aggiornamento* da *Analyse des infiniments petits* (1696), de l'Hôpital. Segundo Felix Klein (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*), o *Traité* de Lacroix seria a fonte de diversas obras sobre o cálculo infinitesimal que se comporiam ao longo do século XIX. [DHOMBRES 1986:154; BRADLEY 2009:437-438; PASTOR et alii 1958:405]

Nas palavras do próprio Lacroix (extraídas da segunda edição), "a reunião de diversos materiais, relativos ao cálculo diferencial e ao cálculo integral, dispersos nas coleções acadêmicas, podia, por si só, tornar conhecidas todas as riquezas desse ramo importante da análise e reduzir a um pequeno acervo de métodos gerais uma multidão de procedimentos particulares que se vinculam à infância desses cálculos. Mas uma mera compilação não alcançaria essa finalidade." (6) [LACROIX, *apud* DHOMBRES 1986:154]

Na composição do *Traité*, seu autor apresentou uma certa ambivalência perante o quesito do fundamento. De fato, na primeira edição do tratado, Lacroix escolheu a formulação de derivada de uma função adotada por Lagrange. Mas, tanto no resumo (*Traité élémentaire*, 1802) quanto na segunda edição do tratado (1810), Lacroix preferiu a escolha feita por d'Alembert e justificou-se, afirmando que "por mais engenhosas que fossem as demonstrações do teorema de Taylor [...] estavam todas sujeitas a exceções [...] . Essas proposições, aparentemente tão gerais, têm mais brilho que utilidade, pois não eliminam a necessidade de se examinarem todos os casos nos quais elas falham. [...] Esse abordamento dificulta o processo e obnubila os fundamentos da teoria, o que não ocorreria, se conservássemos os vestígios da indução através da qual chegamos à proposição geral." [BRADLEY 2009:438; RICHARDS 1991:312]

Na versão inglesa (1816), os tradutores informaram que o livro traduzido "podia ser considerado um resumo da grande obra sobre o cálculo diferencial e integral, embora, na demonstração dos primeiros princípios, o autor houvesse substituído o método de Lagrange, que é mais correto e natural e que fora anteriormente adotado, pelo método dos limites de d'Alembert". (7) [*Apud* KOPPELMANN 1971:180]

Além disso, sempre que aparecia uma demonstração apoiada na teoria dos limites, Peacock acrescentava uma nota na versão inglesa, fornecendo a correspondente demonstração apoiada na formulação de Lagrange. Peacock justificou esse procedimento, explicando que a teoria dos limites não era aceitável, porque levava a "uma tendência a separar os princípios e os departamentos do cálculo diferencial dos da álgebra comum". (8) [*Apud* KOPPELMANN 1971:180]

Charles Babbage confutou o pronunciamento de Lacroix, declarando que "na verdade, é necessariamente umbrosa a noção de uma razão cujos termos são evanescentes,

por mais rigorosa que seja a demonstração de sua existência e de sua grandeza. Sua introdução em nossos argumentos acerca da fundação deste cálculo é fadada a obscurecer todas as suas operações. E somente se pode remover tal obscuridade pelo conhecimento de sua origem mais simples e mais natural." (9) [BABBAGE, *apud* RICHARDS 1991:311-312]

Talvez se possam apontar dois aspectos sob os quais Lacroix e Babbage diferiam na estimação dos fenômenos matemáticos. De um lado, Lacroix rejeitava o abordamento adotado por Lagrange, por percebê-lo eivado de exceções. De fato, nem todas as funções admitiam expansão em série de Taylor, fato que tornava instável a edificação do cálculo, concebido como um sistema teórico autônomo. Do lado oposto, Babbage recusava o conceito de limite por considerar insuficientemente clara a ideia de uma razão cujos termos fossem evanescentes, ainda que se pudesse demonstrar irrefutavelmente a sua existência e calcular a sua grandeza. Preferia por isso a formulação proposta por Lagrange, na qual se percebia nitidamente o caráter indutivo da formação dos conceitos e da demonstração dos teoremas (ainda que não houvesse sido esse o intento de Lagrange). [RICHARDS 1991:311]

Aparentemente, Babbage concordava com seu mentor Woodhouse, que criticara Lagrange "por haver procedido muito rapidamente a extensões e, em vez de subordinar a uma forma comum os resultados de operações particulares, por haver diligenciado demitir do cálculo essas operações". (10) [WOODHOUSE, *apud* RICHARDS 1991:311]

RICHARDS [1991:312-313] insiste em que as distintas perspectivas das quais Lacroix e Babbage contemplavam o cálculo não eram privativas dos autores considerados mas características de duas culturas, a francesa e a inglesa: A cultura inglesa enfatizava o aspecto cognitivo da teoria (que, então, era considerada o resultado de descobrimento e não de criação e cujo bom êxito residia em sua capacidade de capturar a realidade conceitual por ela descrita) enquanto a cultura francesa acentuava a legitimidade de um sistema pela sua autonomia (o qual, portanto, dispensava comprovação exterior a ele próprio). Essa diferença no abordamento do cálculo se manifestava no procedimento de extensão que, para Lagrange, consistia essencialmente na abstração do aspecto formal do fenômeno (hodiernamente percebido como a estrutura) e que, para Woodhouse (e Babbage), se configurava na indução de propriedades verificadas nos exemplos concretos.

A perspectiva adotada por Lacroix seria revigorada por seu brilhante sucessor, Augustin-Louis Cauchy. Lacroix pretendera compilar, em uma exposição uniforme, todas as ideias e todos os resultados do cálculo então disponíveis e, por isso, recorrera ao conceito de limite (ou às razões de termos evanescentes), suficiente a seu empreendimento. Cauchy inaugurou, aos poucos, a apresentação conceitual do cálculo, distinta tanto do cálculo justificado por argumentos geométricos (dos pais fundadores) quanto do cálculo legitimado na autonomia das fórmulas (de Euler e Lagrange), a que hoje chamaríamos autonomia sintática.

Na introdução ao *Cours d'Analyse algébrique* (1821), explanou Cauchy que "quanto aos métodos, tentaria conferir-lhes todo o rigor que se exige em geometria, de sorte que nunca fosse necessário invocar razões baseadas na generalidade da álgebra. Esse tipo de razão ... pode ser considerado ... apenas como induções apropriadas à averiguação da verdade mas não é adequado à louvável exatidão da matemática". [*Apud* RICHARDS 1991:313-314]

Por esse pronunciamento, Cauchy se identificava, na França, como oponente da escola de geometria encabeçada por Victor Poncelet, que adotava uma metodologia quase indutiva; e se reconhecia, na Inglaterra, como adversário da doutrina defendida por Woodhouse. Essa doutrina seria aprimorada por Peacock em "*A treatise of algebra*" (1830) e no "*Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis*" (1833), no qual desenvolveu diversas ideias implícitas na obra anterior. [RICHARDS 1980:346; RICHARDS 1991:314]

Desse *Report* consta a conceituação da **álgebra simbólica** proposta por Peacock: "a ciência dos símbolos e de suas combinações, construídas de acordo com suas próprias regras, a qual pode ser aplicada à aritmética e a todas as outras ciências por interpretação". (11) [PEACOCK, *apud* KOPPELMAN 1971:216]

Peacock sugeriu (*ibidem*) que a origem da álgebra simbólica fosse a aritmética: "Embora a ciência da aritmética ou da álgebra numérica não forneça um fundamento adequado para a ciência da álgebra simbólica, ela sugere necessariamente os seus princípios ou, melhor, as suas leis de combinação." (12) [PEACOCK, *apud* KOPPELMAN 1971:216]

Peacock distinguia assim entre a **álgebra numérica** (ou **aritmética**), que tratava da representação de operações com números, e a **álgebra simbólica**, que estudava operações com símbolos, emancipados das restrições impostas pela interpretação numérica desses símbolos. Mas, ainda assim, de alguma forma essas operações eram condicionadas por esses símbolos. Por exemplo, em aritmética, a expressão a - b somente era interpretável, quando o número b fosse menor que o número a (pois os números negativos ainda não eram admitidos). Tal restrição seria ignorada no âmbito da álgebra simbólica, na qual a expressão seguinte seria uma identidade (ou **forma equivalente**): $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$. [EVES 1997:546-547; RICHARDS 1980:347]

Peacock confirmaria essa visão na segunda edição do *Treatise of Algebra* (1842-1845): "Acredito que nenhuma concepção da natureza da álgebra simbólica possa ser correta ou filosófica, se tornar a seleção de suas regras de combinação arbitrárias e independentes da aritmética." (13) [PEACOCK, *apud* KOPPELMAN 1971:216]

Realçando, pois, o papel modelar da álgebra aritmética na obtenção de *formas* legítimas na álgebra simbólica, Peacock foi levado (no *Report*) a enunciar um preceito, depois

cognominado ***princípio das formas equivalentes***: "Qualquer forma equivalente descoberta na álgebra numérica (considerada a ciência de sugestões), que consista em símbolos gerais na forma, embora específicos no valor, permanecerá uma forma equivalente, quando tais símbolos forem gerais tanto em sua natureza quanto como em sua forma." (14) [PEACOCK, *apud* RICHARDS 1980:349]

Esse preceito configurou-se uma proposição básica ou uma **lei geral** [*general law*] (expressão do próprio Peacock), no estudo das regras operatórias da álgebra simbólica: "Podemos proceder à investigação das regras fundamentais da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão e dos teoremas para a conexão dos múltiplos e para a multiplicação e a involução de potências do mesmo símbolo, os quais constituirão, de fato, uma série de prejuízos que não são arbitrários mas subordinados às condições impostas a nossas hipóteses: se supusermos, porém, que essas condições sejam incorporadas em uma lei geral, cuja veracidade e universalidade sejam admitidas, então tais pressupostos se tornarão consequências necessárias dessa lei e devem ser considerados à mesma luz juntamente com outras proposições que decorrem, direta ou indiretamente, dos princípios primeiros de uma ciência demonstrativa." (15) [PEACOCK, *apud* RICHARDS 1980:350]

Enquanto Peacock acentuava o vínculo entre a *álgebra simbólica* e a aritmética dos números inteiros, a evolução da Lógica franqueava outra via epistêmica no processo da emancipação da álgebra. Um passo adiante nesse processo foi dado por George Boole, que compartilhava com Leibniz a concepção de que a matemática não constituísse apenas a ciência do número ou da quantidade, mas uma genuína linguagem formal. Acreditava na viabilidade de se aplicarem os métodos algébricos a uma variedade de ramos do saber e dedicou-se a revigorar a teoria do silogismo. [DELACAMPAGNE 1997:21-22]

No livro *The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning* (1847), Boole defendeu que o caráter essencial da matemática residisse na forma e não no conteúdo. A matemática consistiria no estudo de símbolos e das regras acerca das operações com esses símbolos, regras que se sujeitariam apenas à exigência de que fossem consistentes. Essa obra é considerada por diversos logicistas contemporâneos como o atestado de nascimento de sua ciência. Nela se lê:

> "Aqueles que sabem do estado presente da teoria da álgebra simbólica estão cientes de que a validade dos procedimentos de análise não depende da interpretação dos símbolos empregados mas tão somente das leis que regem a sua combinação. É igualmente admissível todo sistema de interpretação que não modifique a veracidade das relações supostas e é assim que o mesmo procedimento pode representar, sob um sistema de interpretação, a solução de um quesito acerca das propriedades de números; sob um outro sistema, pode descrever a resposta a um problema geométrico; e sob um terceiro sistema, pode reproduzir o resultado de um problema de dinâmica ou de

óptica. [...] Podemos justamente reconhecer esse estado da álgebra simbólica como o caráter definitivo do verdadeiro cálculo, que seja um método que resida no emprego de símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais e cujos resultados admitem uma interpretação consistente." (16) [BOOLE, *apud* KNEALE 1948:160]

Boole ampliou e esclareceu essas ideias nas *Investigations of the laws of thought* (1854), mostrando como a leis da lógica formal, expostas por Aristóteles e ensinadas nas universidades, durante séculos, se poderiam tornar o objeto de um cálculo algébrico. [DELACAMPAGNE 1997:21-22; EVES 1990:557; STRUIK 1987:176]

Coincidentemente, no mesmo dia em que foi editada, em Cambridge, *The mathematical analysis of logic* de Boole, foi publicada, em Londres, a *Formal Logic or the calculus of inference, necessary, or probable* de Augustus De Morgan. Nessa obra, eram estudados, sob a perspectiva lógica, os sistemas de símbolos e as propriedades das operações com esses símbolos. [MERRILL 2005:75; TATON 1966:30-31]

Também nessa obra De Morgan defendeu que o estudo da probabilidade devesse acompanhar o estudo da Lógica: "Opor-se-ão muitos a essa teoria, por considerá-la extralógica. Não posso enxergar, porém, em qual definição, fundada em distinção real, se possa manter a exclusão dessa teoria. [...] Sem pretender que a Lógica possa examinar a probabilidade de qualquer matéria dada, não posso entender por que o estudo do efeito produzido na conclusão por crença parcial nas premissas deva ser separado do estudo das consequências de se suporem as premissas absolutamente verdadeiras. [...] Contra a opinião daqueles que excluiriam da Lógica a teoria das probabilidades, manterei que essa teoria, denominada pelo nome que se quiser, deve acompanhar a Lógica como um estudo." (17) [DE MORGAN, *apud* RICE 2003:295]

Foi decisivo ao avanço da Lógica o ensaio '*On the syllogism IV and on the logic of relations*' (1864), no qual De Morgan mostrou que a doutrina do silogismo é apenas um caso especial da teoria da composição de relações. [KNEALE & KNEALE 1972:432-433]

O nome de De Morgan está associado a dois princípios lógicos que, hoje em dia, figuram habitualmente sob a forma seguinte:

$$\neg (p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg (p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$$

e que assim foram enunciados por De Morgan: "O contrário de um agregado é o composto dos contrários dos agregantes; o contrário de um composto é o agregado dos contrários dos componentes." (18) [DE MORGAN, *apud* RICE 2003:289]

Apenas para dissipar um equívoco, refiro o seguinte excerto de MERRILL: "Os livros de Boole e De Morgan foram os trabalhos britânicos mais importantes sobre Lógica produzidos nos meados do século XIX; e foram ambos escritos por matemáticos proeminentes." (19) [MERRILL 2005:75]

Daniel Merrill esqueceu de lembrar que ambos os autores foram proeminentes exatamente em Lógica e na teoria das probabilidades e que sua contribuição a outros ramos da matemática não foi tão relevante.

De Morgan escreveu sobre a álgebra e os seus fundamentos. Nesses textos, professava a convicção da existência de dois tipos de estudos: por um lado, a álgebra como arte; pelo outro, a álgebra como ciência. Essa distinção foi explicitada em um texto de 1837: "A álgebra, como arte, pode ser inútil a qualquer pessoa nos negócios quotidianos. [...] Ensinada como arte, tem pouco uso na matemática superior, como o percebem aqueles que tentam estudar o cálculo diferencial sem conhecer nada além dos princípios [de álgebra] que figuram em livros de regras. A ciência da álgebra, independentemente de qualquer de seus usos, tem todos os benefícios pertinentes à matemática em geral como objeto de estudo. (20) [*Apud* RICHARDS 1980:354]

De Morgan redigiu o texto *The differential and integral calculus* (1842), no qual reintroduziu o conceito de limite como noção fundamental mas que teve alcance estritamente didático. Para apresentar o conceito de limite e mostrar a sua utilidade, despendeu vinte e sete páginas do "*introductory chapter*", grande parte consumida na discussão de exemplos. Talvez De Morgan partilhasse da convicção, anteriormente esposada por Woodhouse, Babbage e Peacock, de que toda extensão se configurasse na indução de propriedades verificadas nos exemplos concretos. [RICHARDS 1991:315; GRAY 2006:179, 181]

Por toda a vida, De Morgan tentou descobrir a interpretação universal das formas algébricas, isto é, um procedimento que tornasse inteligível qualquer expressão algébrica válida. Talvez esse compromisso com a interpretação universal das formas algébricas o tenha levado a discordar da rejeição das séries divergentes, consoante o pensamento dominante naquela época. Assim ele se pronunciou (em 1844): "Devemos admitir que muitas séries são tais que não podemos, agora, usá-las com segurança, exceto como instrumento de descobrimento, cujos resultados deverão ser verificados subsequentemente. ... Porém dizer que jamais poderão ser usadas as coisas que ora não podemos usar, recusar aquela esperança nos aspectos futuros da álgebra, que já realizou uma colheita tão brilhante, industriar o promotor venturo da análise em uma noção que necessariamente o impedirá de dirigir os passos para redutos dos quais seus predecessores nunca voltaram com as mãos vazias, tudo isso me parece uma renúncia a todas as regras de prudência." (21) [*Apud* RICHARDS 1980:356-357]

4.3 A intuição e a aritmetização da análise

> "Na matemática, assim como em qualquer pesquisa científica, encontramos presentes duas tendências. Por um lado, a tendência a abstração procura cristalizar as relações lógicas inerentes, no labirinto de material que está sendo estudado, e correlacionar o material de um modo sistemático e ordenado. Por outro lado, a tendência ao entendimento intuitivo cultiva uma apreensão mais imediata dos objetos que são estudados, um *rapport* vivo com eles, por assim dizer, que acentua o significado concreto de suas relações. No que tange à geometria, em particular, a tendência abstrata conduziu às magnificentes teorias sistemáticas da geometria algébrica, da geometria riemanniana e da topologia. Essas teorias fazem uso extensivo da raciocínio abstrato e do cálculo simbólico no estilo da álgebra. A despeito disso, ainda é verdade hoje como sempre o foi que o entendimento intuitivo desempenha um papel principal em geometria. E tal intuição concreta apresenta grande valor não apenas para o pesquisador mas também para qualquer pessoa que queira estudar e estimar os resultados da pesquisa em geometria." (22) [HILBERT 1952:iii]

A faculdade intuitiva foi distintamente considerada por diversos pensadores, como René Descartes, Baruch Spinoza, Immanuel Kant e Henri Bergson. A ideia, defendida por Spinoza, de que possamos perceber as coisas *sub specie aeternitatis* é afim a uma ideia pervasiva de intuição. [BRUNSCHVICG 1972:138-141; HENDEN 2004:14; RUSSELL 708, 798, 804]

Sustentava Immanuel Kant (1781) que todo conhecimento consistisse em dois elementos: a *intuição* (*Anschauung*, na língua alemã) e o *conceito*. Mediante a intuição, o objeto do conhecimento nos seria dado e estaria presente na sensibilidade; através do conceito, esse objeto seria pensado pelo entendimento. Se não houvesse essa correspondência biunívoca entre os dois elementos, o conhecimento não seria adequado.

Para provar que o espaço e o tempo fossem intuições puras, Kant recorreu a dois tipos de argumentos, que ele classificou como *metafísicos* e *transcendentais*. O argumento transcendental relativo ao espaço decorre da geometria. Kant sustentou que a geometria (euclidiana) era conhecida *a priori*, embora os seus enunciados fossem sintéticos, isto é, não se podiam inferir somente da Lógica. As provas geométricas dependeriam das figuras e os

objetos de percepção deveriam obedecer à geometria (euclidiana), pois a geometria trata de nosso modo de perceber. [BRAGA 1991:21-25; RUSSELL 1972: 712-714]

Contra a teoria de Kant insurgiu-se Bolzano (1810), contestando simultaneamente as noções de juízo sintético *a priori* e de intuição pura e afirmando que sempre a intuição fosse empírica, quer se tratasse de fenômeno espacial ou temporal. Declarou Bolzano, além disso, que as figuras nas demonstrações geométricas constituíam apenas um recurso pedagógico e asseverou que, a fim de dotar a matemática de fundamentos sólidos, cumpriria purificá-los de todo elemento intuitivo, concebendo-os de modo radicalmente lógico. [DELACAMPAGNE 1997:18-19]

No contexto da cognição da matemática, o termo 'intuição' designa "uma experiência psíquica absolutamente pessoal e quase incomunicável". [DIEUDONNÉ 1990:177]

Simplificando drasticamente o tema, podemos dizer que a cognição da matemática se opera em dois níveis, o intuitivo e o demonstrativo, correspondendo o primeiro nível ao sentido da visão e o segundo nível ao sentido do tato. Metaforicamente, a visão intuitiva permite divisar o vínculo entre os conceitos enquanto o tato demonstrativo permite concatenar os elos do raciocínio. A intuição é tão indispensável ao contexto de descobrimento quanto a demonstração é essencial ao contexto de justificação.

Além de ser "absolutamente pessoal", a intuição é mutável, ao longo da vida de cada ser humano, por sofrer a influência tanto da educação pessoal quanto da atmosfera cultural. Assim, puderam dizer PRENOWITZ & JORDAN "jamais haverá de novo um única intuição geométrica 'correta'. A intuição geométrica e a teoria matemática interagem à medida que crescem, cada uma estimulando a outra. Um geômetra, hoje em dia, em oposição ao ano 1800, tem diversos tipos de intuição: uma intuição euclidiana, que lhe diz as retas paralelas serem equidistantes em toda a parte, uma intuição lobachevskiana, que lhe diz que o lugar dos pontos equidistantes de uma reta é uma curva, e uma intuição riemanniana de que não existem retas paralelas". (23) [PRENOWITZ & JORDAN 1965:118]

Esse asserto relativo à intuição não é privativo aos quesitos de natureza *puramente geométrica* mas estende-se a todos os ramos da matemática, talvez porque, sob esse aspecto, o domínio do saber não seja relevante mas seja decisivo o *modus cogitandi* acerca desse domínio. Um exemplo popular que corrobora meu último asserto é a *topologia de Zariski*, que permite estender à família dos ideais *primos* de um anel dotado de unidade diversas noções e propriedades, como os conceitos de vizinhança de um ponto e de conexidade, inicialmente imaginados em contexto geométrico. [HORVÁTH 1975:103]

Acredito, pois, que, ao propor que a matemática fosse construída sem se invocar a intuição, Bolzano apenas pretendia realçar que, *no contexto de justificação* dos fatos da análise,

não caberiam argumentos geométricos. Isso não significa, porém, que o pesquisador se deva despir de toda a intuição, a fim de construir suas provas. Após asseverar "que incumbe à lógica do conhecimento — em oposição à psicologia do conhecimento — apenas investigar os métodos empregados nas provas sistemáticas a que toda ideia nova deve ser submetida, a fim de poder ser levada em consideração", Karl Popper reconheceu que "todo descobrimento encerra um 'elemento irracional' ou uma 'intuição criadora', no sentido de Bergson". [POPPER 1993:31-32]

Com efeito, "a Lógica, reduzida aos recursos, é estéril pela própria definição. Embora saiba separar o grão bom do joio, nada poderá criar, se não for fecundada pela intuição". (24) [DUGAS 1962:342]

Curiosamente, a intuição imaginativa, reconhecidamente necessária tanto à cognição quanto à invenção da matemática, não foi bem vista por Platão, que a colocou no nível mais baixo das faculdades mentais, abaixo do **raciocínio discursivo** (*dianoia*), do **conhecimento científico** (*episteme*) e da **intuição racional** (*noesis*). [AVENS 1993:22; BERNIS 1987:62]

Na comunidade matemática, o elogio à intuição imaginativa se faz através de anedotas, como o diálogo entre David Hilbert e um interlocutor que lhe perguntava sobre um jovem estudante. Ter-lhe-ia Hilbert respondido: "Ah, é aquele? Claro que me lembro dele, foi meu aluno. Depois, se tornou poeta. Evidentemente, não tinha fantasia suficiente para se ocupar da matemática." (25) [CHILOV 1973B:9]

Mas a imaginação também pode conduzir ao delírio. Francisco Goya figurou seres fantásticos produzidos pela imaginação, enquanto dormitava a razão, no fascinante quadro central da série *Caprichos*, em cuja legenda se consigna o juízo: "El sueño de la razón produce monstruos". (Aliás, a legenda é ambígua, pois o vocábulo castelhano 'sueño' designa tanto o 'sonho' quanto o 'sono'.) [DUBOS 1961:12]

Na evolução da matemática, os monstros não provieram dos sonhos da razão mas dimanaram do seu criterioso exercício. Talvez as grandezas irracionais tenham sido o primeiro monstro por espantar a comunidade matemática. O descobrimento de tais grandezas provocou o declínio da crença pitagórica na possibilidade de todos os fenômenos físicos se descreverem mediante números (*racionais*). [BRUNSCHVICG 1972:45]

O próprio Bolzano (1830) apontou outro monstro, talvez ainda mais formidando, ao fornecer o primeiro exemplo de um gráfico de uma função contínua privado de tangentes em todos os pontos. Também Riemann (1854) forneceu um exemplo de uma função contínua que não admitia derivada em todos os valores da variável iguais a *uma fração irredutível arbitrária cujo denominador fosse par*. [DELACHET 1949:57; VALIRON 1962:162]

Esses exemplos não parecem haver sido absorvidos pela comunidade matemática, tanto que, ainda em 1878, no *Traité d'Algèbre*, de Joseph Bertrand e Henri Garcet, se lia que "sendo a função contínua, a equação y = f(x) representa um curva planar contínua, referido aos dois eixos retangulares. [...] Como em cada ponto, uma curva contínua admite uma reta tangente bem determinada, a função admite derivada". (26) [*Apud* DELACHET 1949:56-57]

Outro exemplo de função contínua que não admite derivada em nenhum dos valores da variável independente pertencentes a um certo intervalo foi dado por Weierstrass, no ensaio *Sobre funções contínuas de argumento real que não admitem derivada, em nenhum valor desse argumento* [*Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*] (1872), mostrando a falsidade da crença contemporânea de que toda função contínua admitisse derivadas, exceto em pontos insulados. [BRUNSCHVICG 1972:338; SEGRE 1994:237; VALIRON 1962:162]

Sucederam-se outros monstros, como a correspondência bijetiva, apontada por Georg Cantor (1878), entre os pontos de uma reta e os pontos de um plano, contestando a ideia, então intuitiva, de que no plano "houvesse mais pontos que na reta". E E. Netto mostrou, pouco depois, que tal correspondência bijetiva seria necessariamente descontínua.

Então, no artigo *Sobre uma curva que preenche toda uma área planar* [*Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine*] (1890), Giuseppe Peano definiu uma curva, parametrizada por duas funções contínuas, x = f(t) e y = g(t) tais, que, quando t varia no intervalo fechado [0 , 1], a curva passa por todos os pontos da região delimitada por um quadrado de lado igual a 1. Desse modo, Peano mostrou não ser legítimo admitirem-se certos fatos como evidentes, antes de se haver mostrado cuidadosamente a sua veracidade. [KNEEBONE 2001:143; SEGRE 1994:281-285]

A comunidade de matemáticos não reagiu de modo unânime perante os novos espécimes. Charles Hermite, por exemplo, tratou tais funções como casos patológicos, quase estranhos ao campo da matemática ortodoxa. [STRUIK 1987:158; THOMPSON 1988:304]

Talvez não seja exato dizer que a existência desses *monstros* contrariasse a intuição. Talvez eles apenas se opusessem a uma fase da intuição cultural que se tinha cristalizado por volta de 1820, quando, definitivamente, se reconheceram insuficientes as tentativas de fundação *algébrica* do cálculo infinitesimal (por Euler e Lagrange) e se iniciaram os questionamentos sobre argumentos geométricos, por sua vez fundados na geometria euclidiana.

Foi decisiva nesses questionamentos a produção de Cauchy nessa área, a qual começou pelo *Cours d'analyse algébrique* (1821). Nessa obra, Cauchy formulou o conceito de função contínua: "Se, partindo de um valor de x pertencente a um intervalo, atribuirmos à variável x um incremento infinitamente pequeno a, a própria função receberá por

incremento a diferença $f(x + a) - f(x)$, que dependerá, simultaneamente, da nova variável a e do valor de x. Isso posto, a função f(x) será função contínua dessa variável x, no intervalo considerado, se, para cada valor de x nesse intervalo, o valor numérico da diferença $f(x + a) - f(x)$ decrescer indefinidamente com o valor de a." (27) [CAUCHY, *apud* DELACHET 1949:52-53]

Para provar, por exemplo, a existência de uma raiz para uma função que, em dois pontos, assume valores de sinais opostos, teorema já discutido por Bolzano na *Rein analytischer Beweis* (1817), Cauchy recorreu, inicialmente, ao argumento geométrico e, na parte do livro reservada aos leitores dotados de um interesse especial em análise, propôs um argumento que pode ser resumido ao seguinte: Sendo $p_1 < q_1$ e $f(p_1) < 0 < f(q_1)$, Cauchy dividiu o intervalo $q_1 - p_1$ em m partes iguais. Se a função f não se anular na extremidade de nenhum dos subintervalos obtidos, então haverá um subintervalo, que se pode denotar por $[p_2 , q_2]$ tal, que $f(p_2) < 0 < f(q_2)$. Repetindo-se o procedimento indefinidamente, ou se encontra um ponto no qual a função se anula ou se construem uma sequência estritamente crescente p_1, p_2, p_3 ... e uma sequência estritamente decrescente q_1, q_2, q_3 ... . A primeira sequência, por ser estritamente crescente e majorada, é convergente e seu limite P não é positivo. Analogamente, também a segunda sequência é convergente e seu limite Q não é negativo. Notando que converge a zero a sequência das amplitudes dos intervalos $[p_1 , q_1]$, $[p_2 , q_2]$, $[p_3 , q_3]$ ... e invocando o conceito de continuidade, Cauchy inferiu que $P = Q$ e que $f(P) = 0 = f(Q)$. [GRABINER 1983:190; GUINNESS 1970:377]

Mas a comunidade matemática não compreendeu imediatamente a inovação conceitual proposta, tanto que, ainda em 1847, Cournot escrevia: "A ideia da continuidade e, consequentemente, a ideia de grandeza contínua são apreendidas, no seu absoluto rigor, mediante uma visão racional. Assim, concebemos necessariamente que a distância de um corpo móvel a um corpo em repouso ou a distância entre dois corpos móveis não podem variar, senão passando por todos os estados intermediários da grandeza, em número ilimitado ou infinito. E o mesmo ocorre ao tempo que se escoa, durante a passagem de um lugar a outro." (28) [COURNOT, a*pud* BRUNSCHVICG 1972:334]

Somente em 1874 (na *Mémoire sur les fonctions discontinues*), Gaston Darboux apontou "a existência de funções descontínuas que gozam de uma propriedade que, às vezes, se considera como caráter distintivo das funções contínuas, a de não poder passar de um valor a um outro, sem assumir todos os valores intermediários". (29) [DARBOUX, *apud* BRUNSCHVICG 1972:335]

Essa propriedade, depois denominada *propriedade de Darboux* [HALPERIN 1950:539], hoje é definida pela condição de que a função vertente transforme conjuntos conexos em conjuntos conexos. [NEUGEBAUER 1962:838]

Da perspectiva cognitiva, a propriedade de Darboux é apreendida em uma diversidade de fenômenos físicos, como a mudança de temperatura de um corpo. Cabe lembrar, todavia, que a intuição de que o calor se propague de acordo com a propriedade de Darboux (ou, como se soía dizer, *continuamente*) foi corrigida, por Max Planck (em uma palestra proferida em 1900). Após seis anos de estudos conduzidos sobre a radiação emitida por um corpo metálico aquecido até tornar-se incandescente, Planck se convencera de que a radiação ocorresse na forma de minúsculos *quanta* de energia. [RIBEIRO FILHO 2002:308]

A dificuldade de a comunidade matemática perceber o fato assinalado por Darboux pode causar surpresa pois, para exemplificar funções descontínuas com essa propriedade, é suficiente conhecerem-se os números racionais. De fato, supondo o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais dotado da métrica associada ao valor absoluto, ponhamos $D = \{m/3^n: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ e definamos a função f, no intervalo [-1 , 1], pelas condições $f(x) = x$, se $x \in D$; senão $f(x) = -x$. É fácil ver que essa função somente é contínua no ponto 0 e que, para passar do valor -1 ao valor 1 (assumidos, respectivamente, nos pontos -1 e 1), a função f percorre todo o intervalo considerado. Talvez a explicação da demora em perceber o fato assinalado por Darboux resida no modo de se definirem essas funções descontínuas (através de duas sentenças e não de uma única fórmula), se bem que um exemplo desse tipo já havia sido proposto por Dirichlet em 1828.

Deve enfatizar-se que, nessa época, ainda não havia uma teoria acabada dos números reais. Mas Cauchy, de algum modo, percebeu que, além das propriedades operatórias dos números racionais, lhe bastaria admitir que fosse convergente toda sequência **regular** de números reais, entendendo-se por sequência **regular** uma sequência cujos termos se acumulam uns perto dos outros. Precisamente, a sequência (a_n) é regular se, dado $r > 0$, existe um índice m tal, que se $\min\{h, k\} > m$, então $|a_h - a_k| < r$. (Hoje em dia, é comum que tais sequências sejam designadas como *sequências de Cauchy*, embora Bolzano já as houvesse definido em 1817.)

Bernard Bolzano, Augustin Cauchy e Niels Abel foram os precursores de um movimento, posteriormente denominado por Leopold Kronecker como **aritmetização da análise**, que consistia, *grosso modo*, a vincular as cadeias dedutivas de todos os teoremas da análise a propriedades aritméticas. Esse movimento de aritmetização da análise se efetuou segundo duas perspectivas. [BONIFACE & SCHAPPACHER 2002:208]

De uma dessas perspectivas, da qual operaram Karl Weierstrass e seus alunos (e, anteriormente, Cauchy), os fenômenos da análise eram referidos às propriedades dos números reais. Nesse caso, ou os números reais eram construídos (como o fez o próprio Weierstrass) ou (como é usual hoje em dia) são postuladas as suas propriedades. Feita a segunda escolha, é inteiramente irrelevante, como enfatiza LIMA [1982:48], o modo segundo

o qual os números reais foram definidos, pois as demonstrações aceitáveis dos fatos da análise repousam apenas nas propriedades de um corpo ordenado e completo.

Da outra perspectiva, todas as propriedades aritméticas eram reportadas aos números inteiros, segundo o apotegma, proferido pelo próprio Kronecker em um encontro em Berlim (1886), de que *a divindade criara os números inteiros, sendo tudo o mais obra humana.* (30) [KRONECKER *apud* STRUIK 1987:162]

Consoante Kronecker, os números irracionais algébricos seriam definidos mediante congruências, segundo o estilo inaugurado por Gauss. O método preconizado por Kronecker foi posteriormente cognominado *construtivismo*. [EDWARDS 1992B:132-133; STRUIK 1987:162]

Já foi comentado que, consoante a praxe adotada desde a invenção do cálculo infinitesimal, os teoremas eram *demonstrados* e os problemas eram *construídos*. Nisso constituía o método sintético. Consensualmente, sempre que se invocava um novo objeto, a sua existência era demonstrada construtivamente, isto é, era fornecido um método que permitisse exibir tal objeto.

Talvez se possa apontar 1871 como o ano no qual um outro tratamento começou a impor-se. Esse foi o ano no qual Richard Dedekind publicou o Suplemento X à segunda edição da *Zahlentheorie* de Dirichlet. Esse tratamento, ao qual chamarei *conjuntual* em oposição ao tratamento *construtivo*, foi inaugurado por Dedekind, ao definir o conceito de **ideal** como um sistema de inteiros algébricos que atendiam a certas condições. Mediante o tratamento conjuntual, Dedekind preferia enfatizar propriedades fundamentais dos objetos matemáticos, em oposição às suas representações particulares, no que não pode absolutamente ser censurado. Mas, em assim, procedendo, introduziu tacitamente (para não dizer, subrepticiamente) na prática matemática o infinito atual, até então proscrito da matemática. [EDWARDS 1980:346-347]

A prática conjuntual inaugurada por Dedekind foi haurida em duas fontes: A primeira fonte foi o "segundo princípio de Dirichlet", que comentarei logo abaixo. A segunda fonte foi o estilo de Bernhard Riemann, ao qual o próprio Dedekind se referiu em carta de 1876 destinada a Rudolf Lipschitz: "O desígnio de meus esforços na teoria dos números foi basear o trabalho, não em representações ou expressões arbitrárias mas em conceitos fundamentais simples e, dessa forma — embora a comparação possa soar um tanto pomposa — obter, na teoria dos números, resultados análogos aos que Riemann alcançou na teoria das funções. E, ao falar nessa teoria, não posso deixar de apontar que os princípios de Riemann não estão recebendo aceitação significativa da maior parte dos autores – mesmo nos mais novos trabalhos sobre funções elípticas." [EDWARDS 1983B:11]

Talvez esse último reparo de Dedekind tenha sido endereçado a Kronecker, que produzira uma longa série de artigos sobre as funções elípticas. Kronecker professava conscientemente a doutrina de que cada definição fosse formulada de tal modo, que pudéssemos verificar, em um número finito de passos, se ela se aplicaria a uma dada grandeza; e de que seria completamente rigorosa uma prova de existência de uma grandeza, quando se indicasse um procedimento mediante o qual essa grandeza pudesse ser encontrada em ato, isto é, construtivamente. [EDWARDS 1987:30-31]

Referindo-se aos autores contemporâneos que não comungavam de sua tese, Kronecker desabafou: "Se ainda me restarem tempo e vigor, hei de mostrar à comunidade matemática que a aritmética pode ser a guia, e certamente a mais rigorosa, não apenas da geometria mas também da análise. Se eu não puder fazê-lo, fá-lo-ão meus sucessores ... e também eles reconhecerão a falsidade de *todas* as conclusões com que, presentemente, opera a *assim denominada* análise." [EDWARDS 1987:32]

Em 1890, Georg Cantor fundou a Associação Alemã de Matemáticos [*Deutsche Mathematiker- Vereinigung*] e convidou Kronecker a proferir a palestra inaugural do primeiro encontro, em setembro de 1891. Mas Kronecker, adoentado, não compareceu ao encontro e faleceu pouco depois (em dezembro), sem concluir a missão a que se havia devotado. [EDWARDS 1987:30; O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Cantor.]

A aritmetização da análise foi concomitante com um certo desconforto causado, de um lado, pelo declínio da hegemonia da geometria euclidiana e, pelo outro lado, pela irrupção na análise dos exemplos de funções *patológicas*. É significativa a avaliação feita por um notável matemático, Felix Klein, contemporâneo a esse movimento:

> "Aceitando como assegurada a continuidade do espaço, Gauss recorria, sem hesitar, à intuição do espaço como base de suas provas. Contudo, a investigação acurada mostrou que não apenas muitos tópicos especiais exigiam provas mas também que a intuição do espaço havia conduzido à admissão irrefletida da generalidade de certos teoremas que não eram absolutamente gerais. Daí surgiu o requerimento de métodos exclusivamente aritméticos de prova: Nada será aceito como parte da ciência, a menos que sua veracidade rigorosa se possa demonstrar pelas operações comuns da análise." (31) [KLEIN 1895:241-242]

Talvez a aritmetização da análise respondesse a uma inquietação, provocada pelo colapso da intuição e traduzida pela dúvida angustiante acerca da fundação do saber matemático: "Se a intuição geométrica já não basta para proteger contra a absurdidade, onde encontrar um critério suficiente de clareza e de racionalidade?" (32) [DESANTI 1962:182]

A aritmetização da análise foi consequente (pelo menos temporalmente) ao início de uma fase, na qual o estilo da investigação matemática em análise mudou do abordamento

centrado nas fórmulas (cujo protagonista fora Leonhard Euler) para um tratamento centrado nos conceitos (cujo principal autor fora Lejeune Dirichlet). Esse novo estilo (ou *paradigma*), jocosamente denominado "o segundo princípio de Dirichlet", consistia em prescrever que os problemas fossem resolvidos com o mínimo de computação cega e o máximo de pensamento perceptivo. Tal prescrição foi explicitada pelo próprio Dirichlet (no obituário a Carl Jacobi, em 1852), dizendo que "embora a tendência cada vez mais saliente da nova análise consista em substituir o cálculo pelas ideias, existem certos domínios, nos quais o cálculo conserva o seu direito". (33) [*Apud* SOERENSEN 2005:454]

Meio século depois, em 1905, Hermann Minkowski saudaria "a nova fase na história da matemática, iniciada pelo domínio dos problemas com um mínimo de cálculo cego e um máximo de ideias sagazes". (34) [MINKOWSKI 1905:163]

4.4 O logicismo

Contrariando Kant, Gottlob Frege se convencera de que as proposições aritméticas não são juízos sintéticos *a priori* mas juízos analíticos, que se poderiam demonstrar sem recurso à intuição. E que isso não nos parecesse evidente decorria de formularmos os enunciados aritméticos em nossa língua vernácula, inadequada como instrumento científico. Cumpriria, portanto, reformular toda a aritmética na única linguagem na qual a intuição não desempenhasse papel algum, a linguagem lógica. Essa tarefa, Frege a iniciou em sua primeira obra, a *Begriffsschrift* (1879), na qual introduziu um simbolismo mais pesado que o de Boole, que lhe permitiria efetuar o cálculo dos predicados, mediante os quantificadores, e propiciaria reconstruir o cálculo das proposições, inventado pela escola estóica mas ignorado por Aristóteles. [DELACAMPAGNE 1997:24-25, 40-42; SCHMIDT 1974:191-192]

Nos *Grundlagen der Arithmetik* (1884), inaugurou a tese (posteriormente denominada *logicista*) de que a matemática se pode reduzir à Lógica. Especificamente, ancorado nas noções e nos princípios lógicos, Frege empreendeu a temerária tarefa de definir as primeiras noções aritméticas e de lhe demonstrar as principais proposições, o que exigiria também demonstrar a existência dos números naturais. Portanto, o empreendimento de Frege consistia em dois esforços:

a) Definir em termos lógicos todas noções matemáticas, inclusive aquelas correntemente consideradas primitivas ou irredutíveis.

b) Demonstrar, com o uso exclusivo de princípios lógicos, todas as proposições matemáticas, inclusive aquelas correntemente consideradas primitivas ou irredutíveis, o que implica na justificação lógica do princípio da recorrência.

O programa de Frege demonstraria a falsidade do empiricismo e do psicologismo, já que a matemática se fundaria sem recurso à experiência ou a dados de natureza psíquica. [BETH 1955:29, 119-120; NAGEL 1958:42]

Já no artigo *Acerca do significado e da referência* [*Über Sinn und Bedeutung]* (1892), Frege apontou distinções que se mostrariam valiosas tanto para a Lógica quanto para a análise glossológica. Aí ele distinguiu entre o significado (*Sinn*) de um signo, que é conceito objetivo, a sua representação subjetiva (*Vorstellung*) e a sua referência (*Bedeutung*), constituída por um objeto.

A tese logicista foi retomada nas *Leis fundamentais da aritmética, conduzidas através de uma escrita conceitual* [*Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*], cujo primeiro tomo veio a lume em 1893, sendo quase ignorado. Entre seus leitores estavam Giuseppe Peano e, por indicação desse, Bertrand Russell. Quando o segundo volume dessa obra se encontrava no prelo, Frege recebeu uma carta de Russell (16 de junho de 1902), na qual o pensador britânico anunciava modestamente um paradoxo (posteriormente designado como antinomia de Russell), que minava a arquitetura tão cuidadosamente elaborada [BETH 1955, p. 127; DELACAMPAGNE 1997, p. 41]. Segundo DA COSTA [1992:24], essa antinomia fora encontrada, independentemente, por Ernst Zermelo

A antinomia de Russell admite a exposição seguinte. Há dois tipos de classes: as classes que não contêm a si próprias como membros, a que chamaremos *normais*, e as classes que contêm a si próprias como membros. Como exemplo de classes normais, cita-se a classe dos filósofos, a qual certamente não é um filósofo; e como exemplo de classes que não são normais, aponta-se a classe dos objetos que podem ser concebidos pelos seres humanos, a qual também pode ser concebida pelos seres humanos. Designando por N o conjunto de todas as classes normais, podemos indagar se N é uma classe normal. Se N fosse normal, então N seria membro de N (pela definição de N) e, portanto não seria normal (pela definição de classe normal). Do mesmo modo, se N não fosse normal, então N seria membro de si própria (pela definição de classe que não é normal) e, portanto, seria normal (pela definição de N). [BETH 1955:176; NAGEL 1958:24]

Após a troca de algumas cartas, Frege modificou um de seus axiomas e explicou, em um apêndice, que isso fora feito com o propósito de restaurar a consistência de seu sistema. Nesse apêndice, escreveu textualmente (em seu vernáculo) que "dificilmente poderia suceder a um autor de ciência algo mais indesejável que verificar, após a conclusão de seu trabalho, que uma fundação de seu edifício fora abalada. Isso me ocorreu, ao ler uma carta

do Sr. Bertrand Russell, quando a impressão do segundo volume estava quase concluída." Mas essa modificação comprometeu a demonstração de alguns teoremas do primeiro volume de suas *Grundgesetze*.

Frege professou o platonicismo ontológico, isto é, defendia a existência absoluta das entidades matemáticas. Embora tenha contestado a Kant quanto à natureza das proposições aritméticas, se acordou com Kant quanto à natureza das proposições geométricas, cujos axiomas se captariam por uma intuição pura do espaço. Opôs-se fortemente à tendência, nascente entre os geômetras contemporâneos, em admitir que cada sistema geométrico descrevesse estruturas distintas, não cabendo decidir, apenas com instrumentos matemáticos, acerca da validade física de tais sistemas. Esse fato merece aprofundamento por parte dos historiadores das ideias pois, se Kant não poderia prever a evolução futura da Lógica, Frege certamente conhecia a invenção de sistemas geométricos distintos do euclidiano. [BETH 1955:127-128; BOCHENSKI 1962:231; MOSTERÍN 1987:116-119]

Futuro adepto confesso do programa de Frege, Bertrand Russell escreveria em sua autobiografia, referindo-se ao Congresso Internacional de Filosofia, iniciado em 1º de agosto de 1900:

> "O Congresso constitui a guinada de minha vida intelectual, porque lá encontrei [Giuseppe] Peano. Já o conhecia de nome e lhe tinha visto algum escrito mas não me dera ao trabalho de lhe dominar a notação. Observei, nas discussões no Congresso, que ele sempre era mais preciso que qualquer pessoa e que, invariavelmente, quando se envolvia em uma argumentação, se saía melhor. No transcurso dos dias, inferi que isso devia ser consequência de sua lógica matemática. [...] Ficou claro para mim que sua notação provia um instrumento de análise lógica do tipo que eu procurava há anos [...]." (35) [*Apud* O'CONNOR & ROBERTSON]

Foi Peano quem disse a Russell dos trabalhos de Frege, os quais Russell leria progressivamente nos dois anos seguintes, encontrando diversos pontos de tangência entre seus pensamentos. Entre esses pontos, a mesma concepção de número, que Russell resumiu, dizendo que "todos podem perceber a distinção entre um poste e a minha ideia de poste mas poucos percebem a distinção entre o número dois e a minha ideia desse número. Entretanto, tal distinção é tão necessária em um quanto no outro caso. [...] A aritmética deve ser descoberta, do mesmo modo que Colombo descobriu as Índias Ocidentais. Nós não criamos os números assim como Colombo não criou os indígenas." [*Apud* DELACAMPAGNE 1997:41; cf. BOCHENSKI 1962:63]

Já em 1897, Cesare Burali-Forti deparara com um paradoxo no seio da teoria dos conjuntos. Em 1901, Russell demonstrou que não se tratava de quesito matemático mas de

problema puramente lógico e, nos *Principles of mathematics* (1903), descreveu a antinomia que encontrara e experimentou três métodos para extingui-la (uma primitiva teoria dos tipos, a teoria do zigzag e a teoria sem classes); pouco depois, lhes acrescentaria a teoria da limitação de magnitude. [BETH 1955:185; BOCHENSKI 1962:239; DELACAMPAGNE 1997:41-42; KRAUSE 2002:159]

A teoria do zigzag e a teoria da limitação de magnitude mostraram-se infecundas e a teoria sem classes revelou-se próxima à teoria dos tipos, de sorte que Russell se dedicou a refundir a última, que adquiriu a forma definitiva entre 1906 e 1908. Baseando-se na distinção, apontada por Peano, entre *a pertinência* e *a inclusão*, distinção essa que impede um conjunto de pertencer a si mesmo, Russell postulou que todos os objetos se distribuem em distintos tipos, instituindo uma hierarquia de variáveis. Assim, no domínio das classes, um indivíduo é do primeiro tipo, a classe dos indivíduos é do segundo tipo e uma classe de classes do segundo tipo é do terceiro tipo; se x for elemento de A, então A será de um tipo superior ao de x. Cada predicado, por sua vez, pertencerá à categoria que subordina imediatamente o sujeito. [BETH 1955:185; BOCHENSKI 1962:239; DELACAMPAGNE 1997:42; FEYS 1963:310]

Graças a essa teoria dos tipos, pôde Russell construir, por primeiro, um sistema lógico isento de antinomias. A despeito de repetidas tentativas, tanto quanto eu saiba, ainda não se conseguiu, sem recorrer à teoria dos tipos, construir um sistema isento de contradições. Podemos reinterpretar, como uma forma rudimentar da teoria dos tipos, a teoria de Aristóteles, de que os indivíduos sejam substâncias de primeiro grau e que espécies sejam substâncias de segundo grau. [BETH 1955:127, 185-186; BOCHENSKI 1962:231, 239; DA COSTA 1992:27; FEYS 1963:310]

A aceitação da teoria dos tipos exigiu a introdução de três postulados que figuram na composição dos monumentais *Principia mathematica* (1910-1913), do próprio Russell e de Alfred Whitehead: o axioma da redutibilidade, o axioma do infinito e o axioma da escolha. [BETH 1955: 185-186; DA COSTA 1992:28-30; DELACAMPAGNE 1997:43; FRAENKEL 1993:333-334]

A inclusão do axioma da redutibilidade vincula-se à admissão de *definições impredicativas*, que ocorrem quando, na definição de um conjunto, remetemos aos seus elementos, que se definem mediante o citado conjunto. Mais precisamente, uma definição é impredicativa, quando "o objeto definido constitui um valor particular de uma variável que intervém na expressão da propriedade que o define" ou, ainda, "quando envolve a quantificação de uma variável sobre um universo que inclui o objeto definido". [KREISEL 1960:26; GOLDFARB 1988:62]

Um exemplo de definição impredicativa é a seguinte: "Sejam C os habitantes de uma cidade e b o barbeiro, definido como o elemento de C que faz a barba de todos os

elementos de C que não se barbeiam a si mesmos e somente desses elementos." É fácil perceber que essa definição gera uma antinomia: b não pode barbear-se e, por isso, deve barbear-se. Ora, segundo Whitehead e Russell, o exame dos paradoxos revela que todos provêm de certa espécie de círculo vicioso, o que lembra a antinomia do mentiroso, aventada por Epimênides de Creta. Assim, dizer algo acerca de todas as proposições não é admissível, pois esse dizer já constitui uma proposição. Segundo Poincaré, as antinomias que surgiram na teoria dos conjuntos foram consequentes ao uso de definições impredicativas. [EVES 1997:676; KRAUSE 2002:156]

Instituíram Russell e Whitehead, portanto, **o princípio do círculo vicioso**, para o qual propuseram algumas formulações, tacitamente admitidas como equivalentes, o que seria contestado por Kurt Gödel (1944). Talvez a formulação mais sólida seja a seguinte: "Um domínio não pode ser concebido como uma totalidade, se contiver um elemento que só se pode definir em termos do próprio domínio". [BETH 1955:185-186; DA COSTA 1992:26-27; FRAENKEL 1993:334-335]

Assim, a teoria dos tipos protege contra as antinomias mas também proscreve as definições impredicativas, que são consideradas indispensáveis. Para contornar esse obstáculo, Whitehead e Russell inseriram o axioma da redutibilidade: "Dada qualquer propriedade de ordem maior que zero, existe uma propriedade de ordem zero que lhe é equivalente". (Dizemos que duas propriedades são equivalentes, se todo objeto que gozar de uma delas também gozar da outra.) Na presença da teoria dos tipos, não se conseguiu tampouco efetuar a construção de conjuntos infinitos. Então, Whitehead e Russell admitiram o axioma do infinito, que postula a existência de uma pluralidade infinita de objetos. A fim de certificar um alcance máximo a esse postulado, incluíram também o axioma da escolha, que fora formulado por Giuseppe Peano (1890) e enunciado como princípio independente por Beppo Levi (1904): "Dada uma família de conjuntos não vazios e disjuntos dois a dois, existe pelo menos um conjunto que tem exatamente um elemento em comum com cada membro da família." [BETH 1955:136, 186-187; DA COSTA 1992:28-29; WEYL 2000:70]

Ainda que a teoria dos tipos haja eliminado as antinomias, ela decretou o ocaso da tese inicial do logicismo, pois a sua admissão exigiu o recurso a três axiomas cujo caráter não é puramente lógico, como pretendera Frege. Mas alguns críticos denunciam que o axioma da redutibilidade reintroduz, subrepticiamente, procedimentos impredicativos. [SILVA 1989:1]

A teoria dos tipos, delineada em um apêndice aos *Principles of Mathematics* (1903), de Russell, e, após elaboração, usada como alicerce dos *Principia Mathematica*, de Russell e Whitehead, passou a ser denominada teoria *ramificada* dos tipos, em oposição à teoria *simples* dos tipos, proposta nos idos de 1925, por Frank Ramsey e Leon Chwistek. [KRAUSE 2002:159]

A teoria simples dos tipos constitui uma extensão da lógica de primeira ordem. Apoiada nos mesmos princípios da lógica de primeira ordem, distingue-se dela por dois fatos: Primeiramente, seus termos podem ter ordem superior, isto é, podem denotar conjuntos, relações e funções. Os predicados e as funções podem aplicar-se a esses termos de ordem superior e os quantificadores podem aplicar-se a variáveis de ordem superior. E em segundo lugar, usam-se objetos sintáticos, denominados *tipos*, que designam conjuntos não vazios de valores, para organizar os termos. Os tipos restringem os domínios das variáveis, regulam a formação dos termos e fornecem os meios de se classificarem os termos por seus valores. [FARMER 2008:268]

4.5 O intuicionismo

A introdução da teoria dos conjuntos por Georg Cantor enfrentara, inicialmente, alguma hostilidade. Mas, após o primeiro Congresso Internacional de Matemáticos, em Zurique (1897), no qual Adolf Hurwitz e Jacques Hadamard proclamaram a utilidade dessa teoria, arrefeceu a oposição a ela.

Henri Poincaré, o mais eminente matemático daquela ocasião (e talvez um dos seis mais fecundos de todos os tempos), manteve certa reserva perante os procedimentos conjuntuais. Poincaré insistia em que, para se dirimirem os paradoxos, "o importante é sempre se introduzirem apenas os entes que se possam definir completamente mediante um número finito de palavras". (36) [POINCARÉ 1908:939]

É possível que também se referisse a esse passo de Poincaré o reparo feito, duas décadas depois, por Hilbert, ao apontar "que a literatura matemática se encontra intensamente inundada de absurdidades e de descuidos em sua maioria imputáveis ao infinito. Assim, por exemplo, quando, do ponto de vista de uma condição restritiva, se exige da matemática rigorosa que, em uma qualquer demonstração, seja admissível apenas um número finito de passos — como se alguém pudesse dar um número infinito de passos." (37) [HILBERT 1926:162]

Contudo, um outro ponto de dissenso foi o axioma da escolha, que Zermelo usara na prova de que todo conjunto não vazio é bem ordenado. Por volta de 1905, na França, opunham-se ao axioma da escolha Émile Borel, René Baire e Henri Lebesgue, enquanto Jacques Hadamard o admitia. [BAIRE et alii 1905:261-273]

Esse clima foi propício à composição por Luitzen Brouwer de uma tese, *Over de Grondslagen der Wiskunde* [dos fundamentos da matemática], em 1907, na qual defendeu um tipo específico de construtivismo, denominado *intuicionismo*, por atribuir o papel fundador a

um ato primeiro de intuição do tempo, tomando como referência os citados Borel, Baire e Lebesgue [LARGEAULT 1992B:29].

Embora se reconheça ser a disputação entre intuicionistas e formalistas, no século vinte, a continuação da psicomaquia entre Kronecker, de um lado, e a escola de Weierstrass e Dedekind, do outro lado, o próprio Brouwer, em suas notas históricas, jamais referiu Kronecker. [EVES 1997:616; STRUIK 1967:161]

Aliás comenta LARGEAULT que, "após haver descrito o intuicionismo a certa distância, na terceira pessoa, como se fosse negócio alheio, notadamente da escola francesa (Poincaré, Baire, Borel, Lebesgue ...), [Brouwer] assumiu a defesa de teses mais radicais, como a separação da matemática da linguagem encarregada de lhe descrever as construções, opondo-se, desse modo, conjuntamente, tanto aos logicistas quanto aos formalistas". (38) [LARGEAULT 1992A:533]

Autor de trabalhos de primeira ordem em topologia algébrica, Brouwer consagrou a maior parte de sua atividade a reformar a matemática, consoante os princípios que defendia. Um desses princípios consiste em só admitir a existência de um objeto matemático que se possa construir. [DIEUDONNÉ 1990:244; ALEXANDROV 1973:259]

Brouwer recusou a precedência à axiomática, afirmando serem os axiomas ilusivos, pois somente são enunciados, após a construção de uma teoria; e são escolhidos, de modo que sobre eles se apóie uma cadeia de deduções; são apenas o registro das invenções e não revelam como surgem os objetos matemáticos. [LARGEAULT 1992B:31]

Brouwer também recusou a precedência à Lógica, pois a Lógica, em vez de anteceder a Matemática, provém dessa disciplina. Ainda mais, a Lógica não constitui um caráter intrínseco da Matemática e os seus princípios, a suas leis ou as suas regras apenas descrevem regularidades observadas não na Matemática mas na linguagem que a exprime. (LARGEAULT 1992B:31]

De fato, a lógica tradicional, ainda que expressa em forma simbólica, nasceu da consideração de conjuntos finitos, não podendo ser aplicada, imprudentemente, a conjuntos potencialmente infinitos. Por isso, Brouwer rejeitou o princípio da exclusão do terceiro, não por considerá-lo falso mas muito mal instituído. Consequentemente, repudiou os argumentos por redução ao absurdo (*modus tollens*). Cabe citar que A. Heyting desenvolveu uma Lógica que retratasse a atividade matemática segundo a concepção de Brouwer. Trata-se de uma lógica bivalente não-aristotélica, que não se deve confundir com as lógicas plurivalentes. [da COSTA 1992:35-36; EVES 1997:672]

Finalmente, segundo Brouwer, "o matemático não descobre as entidades matemáticas; é o próprio matemático quem cria as entidades que estuda, ou seja, a expressão

'A existe' só pode significar, em matemática, 'A foi construído pela inteligência humana', a qual, portanto, cria e dá forma aos entes matemáticos." [DA COSTA 1992:36]

Aliás, uma das teses mestras do intuicionismo é que não se pode destacar a pesquisa dos fundamentos da matemática de considerações acerca das condições sob as quais ocorre a atividade espiritual própria dos matemáticos. [BETH 1955:150]

Mais recentemente, o interesse "pelas noções mais ou menos intuitivas de uma lei de construção, de um algoritmo, de um procedimento efetivo" (39) [BETH 1955:75] foi intensamente revigorado pela sua aplicabilidade à teoria da computação, que trata desse tema no capítulo sobre as funções recursivas. [BARROW 1994:248-249]

Aliás, foi o exame da possibilidade de se produzirem dispositivos lógicos que efetuem cálculos de acordo com um algoritmo que conduziu à máquina de Turing, que esteve presente na gênese das ciências cognitivas. [PENROSE 1991, *passim*; GARDNER 1995, *passim*]

Dessa forma, presentemente, a necessidade de se fatorarem polinômios com coeficientes inteiros está levando os cientistas da computação à leitura dos *Grundzüge* de Kronecker [EDWARDS 1987:35]

Embora negue que encontre eco na comunidade matemática "o desejo de proselitismo de certos construtivistas", Jean Dieudonné reconhece que "a maior parte dos matemáticos prefere as provas de existência construtivas, que dão muitas vezes informações mais rigorosas sobre os objectos construídos; mas resignam-se a ficar com provas não construtivas, quando não há outras." [DIEUDONNÉ 1990:234, 245]

Cabe apontar que diversos pensadores laboram ancorados, não explicitamente, em alguma das teses apresentadas por Brouwer, sem que partilhem integralmente de seu projeto.

> "Alguns construtivistas não concordam entre si quanto ao que de fato se pode admitir como existente em matemática, quando não no próprio sentido dessa palavra. Uns admitem como existente apenas o que se pode *efetivamente* representar na intuição pura (intuicionistas), outros o que se pode *descrever* numa certa linguagem dada numa intuição originária (Weyl), onde o conceito de intuição não é certamente o mesmo. Aqueles fazem referência à intuição kantiana do tempo, estes à intuição husserliana. Outros ainda, os predicativistas (logo construtivistas de alguma forma), adotam uma noção formalista de existência (Poincaré)." [SILVA 1989:5]

Embora, tanto quanto eu saiba, não se tenha declarado construtivista, o lógico Alonzo Church emite uma opinião que o aproxima das teses de Brouwer, ao dizer que "[...]

pode haver, e realmente há, mais de uma geometria capaz de descrever o espaço físico. Analogamente existe, sem nenhuma dúvida, mais de uma Lógica útil e, de todas elas, uma pode ser mais agradável ou mais conveniente, mas não se pode dizer que esta seja certa e aquela errada". [*Apud* EVES 1997:671]

4.6 O formalismo

> "Assim, a matemática pode ser definida como a matéria na qual nunca sabemos acerca do que estamos falando e nunca sabemos se o que estamos dizendo é verdade." [Bertrand Russell (1901)] (40)

Se quisermos datar o nascimento do formalismo, a escolha mais adequada recairá sobre o ano 1899, no qual David Hilbert publicou os Fundamentos da Geometria [*Grundlagen der Geometrie*].

Por essa época, já se reconheciam três atributos dos sistemas axiomáticos:

a) A independência — Nenhum dos postulados que compõem o sistema decorre dos outros. Equivalentemente, nenhuma proposição que figura como postulado é um teorema no sistema constituído dos demais postulados. Historicamente, essa foi a primeira característica estudada. Lembremo-nos de que Bolyai construiu o seu sistema geométrico, quando tentou mostrar, por redução ao absurdo, a independência do postulado das paralelas. Talvez o método mais eficaz de se demonstrar a independência de uma proposição relativamente a um sistema consista em se exibir um modelo que não atenda à proposição vertente mas que satisfaça a todas as demais.

b) A consistência — Dois quaisquer postulados que integrem o sistema são compatíveis. Equivalentemente, é impossível extrair dois teoremas que se contradigam. Lembremo-nos de que o quesito da consistência foi aduzido pela invenção da geometria hiperbólica e se tornou crucial, quando Beltrami apresentou um modelo euclidiano do plano hiperbólico.

c) A preloquência ou não reticência — O estudo da independência aventou o problema complementar, que se pode formular na indagação: Haverá sido admitida tacitamente alguma hipótese ou, equivalentemente, alguma hipótese adotada não terá sido proferida?

Pasch verificou que, na composição dos *Elementos*, Euclides recorrera implicitamente a um postulado que nunca fora enunciado e o incluiu em suas *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Presentemente, esse postulado é denominado *axioma de Pasch*.

Assim, Hilbert atendeu a essas exigências axiomáticas na composição dos *Grundlagen*. Mas mudou de perspectiva, ao tomar como conceito estruturante de sua obra *a definição implícita*. Esse modo de definir, que já fora usado por Joseph Gergonne (1819) consiste em se considerar que as noções primitivas do sistema vertente se definem pela rede de significados admissíveis. Assim, ao invés de supormos que as noções de ponto e de reta não precisam ser definidas, porque já temos delas as intuições correspondentes, aceitamos como ponto e reta qualquer objeto que satisfaça aos postulados que compõem o sistema. Dessa forma, ao instaurar o uso das definições implícitas, Hilbert esvaziou as noções primitivas de qualquer conteúdo conceitual que não estivesse implicado pelos axiomas. [BETH 1955:28, 115; NAGEL & NEWMAN 1958:12-13]

Ora, Frege, que havia examinado o método axiomático com aguda penetração, constituindo o seu trabalho a culminância de uma tradição que remonta a Aristóteles, parece não haver percebido a mudança de perspectiva. Da perspectiva de Frege, igual à de Aristóteles, os conceitos primitivos dispensam definição, por serem intuivamente conhecidos e os primeiros princípios prescindem de demonstração, pois sua veracidade é evidente e a captamos por intuição. De fato, para Frege o método axiomática dizia respeito apenas à precisão sintático, não envolvendo, portanto, quesitos semânticos. Portanto, as fórmulas continuavam sendo exprimindo ideias, continuavam dotados de conteúdo significativo, em uma palavra, *inhaltlich*. [MOSTERÍN 1987:115-116]

Por isso, Frege iniciou uma breve polêmica epistolar com Hilbert, comparando a pluralidade de interpretações admitidas pelo sistema de Hilbert com a multiplicidade de soluções admitidas por um sistema de equações lineares, constituindo-se assim em precursor de Tarski na concepção de modelo. O principal efeito dessa polêmica foi levar Hilbert a tornar a sua formulação mais precisa. [MOSTERÍN 1987:121-122]

Hilbert respondeu-lhe que cada teoria consiste apenas em um esquema de conceitos interligados por relações necessárias entre eles; e que esses conceitos podem ser arbitrariamente interpretados. Se entendermos por ponto e reta qualquer sistema de coisas, como o amor e a lei, e verificarmos que nossos axiomas são válidos para essas coisas, então também serão válidos para elas os nossos teoremas, como o teorema de Pitágoras. Em outras palavras, cada teoria pode aplicar-se a uma infinidade de sistemas de elementos básicos. [MOSTERÍN 1987:119-120]

Essa concepção suscitou o famoso comentário jocoso de Russell, que serviu de epígrafe à presente seção: "A matemática pura é a disciplina na qual não sabemos acerca de

que estamos conversando nem se é verdadeiro aquilo que dizemos." [NAGEL & NEWMAN 1958:13]

Perturbado com a crítica de Brouwer e com a defecção de matemáticos eminentes, como Hermann Weyl, Hilbert empreendeu a tarefa de axiomatizar toda a matemática.

Com fina ironia, Poincaré referiu esse empreendimento, no IV Congresso Internacional dos Matemáticos (Roma, 6 a 11 de abril de 1908):

"Tem sido despendido esforço, por outro lado, para se enumerarem os axiomas e os postulados mais ou menos dissimulados que servem de fundamento às diversas teorias matemáticas. O sr. Hilbert obteve os mais brilhantes resultados. Inicialmente parece que esse domínio seja bem limitado e que nada haverá por se fazer, quando houver sido concluído o inventário, o que deve ocorrer em breve. Mas, quando tudo houver sido enumerado, haverá diversos modos de se classificar tudo: um bom biliotecário sempre encontra com o que se ocupar e cada nova classificação será instrutiva para o filósofo." (41) [POINCARÉ 1908:939]

Beneficiados pela visão retrospectiva, podemos detectar aqui o pecado da *hybris*. A constelação de resultados obtidos em Lógica, no decurso das décadas posteriores a esse pronunciamento por Poincaré, o refutam decisivamente.

Coadjuvado por Wilhelm Ackermann e Paul Bernays, Hilbert enfrentou os dois quesitos restantes da axiomática: a categoricidade e a plenitude.

Dizemos que um sistema de axiomas é **categórico** (ou completo [*vollständig*]), quando todos os seus modelos forem isomorfos, em uma acepção que será definida para cada categoria. Esse quesito é tratado, presentemente, no âmbito da lógica de segunda ordem. [BETH 1955:23, 101, 152; WEYL 2000:42]

Dizemos que um sistema de axiomas é **completo** ou **íntegro** [FEYS 1993:314] ou **saturado** [PASTOR et alii 1958:11], quando toda proposição, enunciada nos termos da teoria vertente, for um teorema dessa teoria (e, portanto, demonstrável com apoio nesse sistema) ou for refutável (isto é, incompatível com teoremas dessa teoria). Nas palavras de WEYL [2000:41]: "Além da consistência e da independência, exigir-se-á a *plenitude* [do sistema] de axiomas que formam a base da ciência. [...] Assim como a consistência afirma que não se podem obter ambas as sentenças p e ¬p, a plenitude certificará que sempre se obterá uma delas." (42) [Cf. BETH 1955:52]

Em estudos mais recentes, distinguem-se a plenitude fraca e a plenitude forte. Dizemos que um sistema formal é *fracamente completo*, se toda *fórmula* que é *logicamente verdadeira* nesse sistema é um *teorema* do sistema; dizemos que um sistema formal é *fortemente completo*, se

o acréscimo de qualquer novo axioma independente o tornar inconsistente. [HAACK 2002:316]

Em 1928, Hilbert e Ackermann publicaram os *Grundzüge der theoretischen Logik*; entre 1934-1939, Hilbert e Bernays publicaram os *Grundlagen der Mathematik*. O programa de Hilbert, no que tange à consistência, apresenta dois aspectos: a prova relativa de consistência e a prova absoluta de consistência. A prova relativa da consistência foi sugerida historicamente pelo caso da geometria hiperbólica, cuja consistência fora sugerida por Houël, ao lhe propor o modelo euclidiano concebido por Beltrami. (Já foi referido que, depois, Hilbert mostraria que o modelo proposto não era global.)

Hilbert forneceu a prova relativa da consistência da geometria euclidiana, apresentando-lhe um modelo aritmético: o espaço dos ternos ordenados de números reais. Assim, a geometria euclidiana será consistente, se o for a aritmética.

Mas a prova relativa de consistência não pode aplicar-se indefinidamente, sob pena de regressão infinita. Então, é oportuna uma prova absoluta de consistência da aritmética. Para isso, Hilbert construiu uma teoria da demonstração, baseada em dois princípios: o princípio de recorrência sobre a construção da expressão e o princípio da recorrência sobre a derivação do teorema. [BETH 1955:40-41; DA COSTA 1992:53-55]

Em 1931, porém, Kurt Gödel produziu um artigo, relativamente breve, intitulado *Sobre sentenças formalmente indecisíveis dos* Principia Mathematica *e de sistemas semelhantes* [*Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme*]. Nesse artigo, o autor provou que qualquer teoria axiomática da aritmética é incompleta, isto é, haverá sentenças que, concomitantemente com sua negação, não são teoremas dessa teoria; e que, se essa teoria for consistente, a prova desse fato não poderá ser formulada nessa teoria. [DA COSTA 1994:182; NAGEL & NEWMAN 1958:98; WEYL 2000:279-280]

Independentemente desse malogro lógico, diversos matemáticos rejeitam o uso de axiomas destituídos de significado. No XVII Congresso Internacional de Filosofia das Ciências (Paris, 1949), Arnauld Denjoy reafirmou "que não existem absolutamente axiomas sem uma substância matemática anterior por ser axiomatizada". (43) [*Apud* LARGEAULT 1992A:538]

4.7 O pragmaticismo

> "Parece que, desde Weierstrass, a análise se tornou completamente abstrata, rigorosa e anempírica. Mas mesmo isso não é completamente correto. A controvérsia acerca dos

> '*fundamentos*' da Matemática e da Lógica, que ocorreu no curso das duas últimas gerações, dissipou muitas ilusões a esse respeito." (44) [VON NEUMANN 1947]

No presente escrito, o termo 'pragmaticismo' denotará a adesão à atitude pragmática perante o quesito gnoseológico, a qual consiste em julgar uma crença por suas consequências. Dessa forma, o conhecimento se confunde com um conjunto de crenças que promovem o bom êxito, podendo interpretar-se esse bom êxito também em sentido biológico, como o faria John Dewey [cf. RUSSELL 1948:156]. Nessa acepção suficientemente lata, poderemos identificar essa atitude pragmática em várias instâncias da evolução da matemática.

Contrariando o hábito de remontar à Grécia, recuemos ao Egito antigo, onde encontraremos um conhecimento matemático talvez ainda não completamente diferenciado das técnicas de construção mas que permitiu a edificação das portentosas pirâmides, testemunhas eloquentes e duradouras de que a eficácia pode prescindir de fundação em princípios e repousar na excelência de seus efeitos. Atualmente, os documentos mais abrangentes para a pesquisa da matemática egípcia, que são o papiro Rhind (manual de cálculo do escriba Ahmès) e o papiro de Moscovo, consignam regras para calcular a área de triângulos, de quadriláteros, do disco e do hemisfério; e o volume do cubo, do paralelepípedo, do tronco de cilindro circular e do tronco de pirâmide de base quadrangular. Admite-se que tais regras tenham sido formuladas como, posteriormente, o foram muitas leis físicas. [COOLIDGE 1940:9-13; GERMAIN 1962:228; GODEAUX 1960:9-10; STRUIK 1967:24]

Já foi apontado que a fase de fundamentação do cálculo infinitesimal fora precedida de uma fase inventiva, na qual a técnica elaborada se legitimava pelos dados que produzia. E isso não foi uma exceção. No dizer de Brouwer, os axiomas são sempre precedidos de uma investigação da natureza: "Não constituem a realidade primeira, são encontrados tardiamente. Capturada a natureza, aleatoriamente, pomo-nos à procura dos axiomas no sistema já construído. (45) [*Apud* LARGEAULT 1992A:538] [*Apud* LARGEAULT 1992A:538]

Também na invenção da geometria hiperbólica parece haver desempenhado papel dominante a atitude pragmática. De fato, Lobachevski procurou um sistema geométrico que se coadunasse com as observações físicas, isto, um sistema geométrico que fornecesse teoremas compatíveis com os resultados obtidos empiricamente. Um significativo exemplo discutido por Lobachevski envolvia uma força atrativa, concentrada em um ponto material, que se difundia em todas as direções. Por simetria, tal força distribuir-se-ia uniformemente na superfície de uma esfera centrada no ponto considerado. Como [segundo a lei da gravitação] a intensidade dessa força é proporcional ao inverso do quadrado da distância

entre o ponto considerado e o ponto no qual a força estivesse aplicada, a expressão que fornece a área da superfície esférica deveria conter como fator o inverso do quadrado dessa distância. Acrescentou Lobachevski que, se fosse outra a lei física que regesse a intensidade das forças, teríamos que construir um sistema geométrico compatível com essa outra lei física. [LOBACHEVSKI 1955:61-62]

Curiosamente, Elie Zahar refere também haver sido observado por Kant que se pode usar **o princípio da razão suficiente**, a fim de se mostrar que a ação gravitacional que emana de um único corpo no espaço e que se propaga sem deixar vestígio deve distribuir-se uniformemente sobre a superfície de um esfera. Como a esfera tem área igual a $4\pi R^2$, se impõe a lei do inverso do quadrado da distância. [ZAHAR 1983:259]

Um conceito cuja aceitação obedeceu, *avant la lettre*, aos cânones do pragmaticismo foi a noção de número complexo. O método de resolução da equação de terceiro grau fora inventado por Scipione del Ferro (1515). Aplicado por Rafael Bombelli (1572) à equação $x^3 - 15x = 4$, forneceu a raiz 4 como a soma de parcelas expressas mediante a raiz quadrada de -1, induzindo-o a inferir que "só aparentemente as raízes fossem imaginárias". A mudança na atitude perante os números complexos evidenciou-se nas palavras de Albert Girard (1592-1623): "Podem perguntar-me por que adotar essas soluções impossíveis. Respondo-lhes que o fazemos por três motivos: por preservarem a validade das regras gerais, por sua utilidade e por inexistirem outras soluções." [CARVALHO 1992: 111; MILIES 1990: 6-7]

Desde então, os números complexos começaram a ser amplamente empregados, até mesmo por notáveis matemáticos que nutriam profundas reservas conceituais. Assim Gottfried Leibniz considerava que "o Espírito Divino se havia exprimido sublimemente nessa maravilha da análise, nesse portento do mundo das ideias, nesse anfíbio entre o ser e o não ser, a que chamamos raiz imaginária da unidade negativa." [*Apud* CARVALHO 1992:109]

E Leonhard Euler afirmava em sua *Algebra* (1770) que "desses números só podemos afirmar que não são iguais a zero, nem maiores que zero, nem menores que zero, o que necessariamente os torna imaginários ou impossíveis." [MILIES 1990:7]

Nesse episódio tão notável inspirou-se CROWE para formular a sua "terceira lei" atinente aos cânones de mudança na Matemática: "Embora as exigências da Lógica, da consistência e do rigor tenham, por vezes, instado pela rejeição de alguns conceitos hoje aceitos, a utilidade desses conceitos repetidamente forçou os matemáticos a aceitá-los e a tolerá-los, mesmo enfrentando fortes sentimentos de aflição." (46) [CROWE 1975:163]

Um exame acurado permite enxergarem-se matizes pragmáticos tanto no logicismo quanto no intuicionismo. De fato,

a) O empreendimento logicista de Russell e Whitehead apresenta três falhas. A terceira falha reside em que a única resposta possível ao quesito da escolha das noções primitivas é que essa escolha se justifique *a posteriori*, por permitir a reconstrução da aritmética e da análise. [DELACAMPAGNE 1997:44]

b) "Brouwer insiste em que a matemática não se compõe de verdades eternas, relativas a objetos intemporais, metafísicos, semelhantes às ideias platônicas. Em contraposição, com base em pressupostos pragmáticos, ele procura demonstrar que o saber matemático escapa a toda e qualquer caracterização simbólica e se forma em etapas sucessivas que não podem ser conhecidas de antemão." [DA COSTA 1992:36]

No ensaio "*A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*", Imre Lakatos enumerou uma dúzia de autores contemporâneos que não estavam satisfeitos com as tentativas de fundação esboçadas ou que apontaram a experiência como legitimadora, *a posteriori*, das teorias construídas. [LAKATOS 1976:202-205]

Nesse passo, Lakatos apontou o fato, pouco divulgado, de que Bertrand Russell, já em 1924, havia abandonado o credo, anteriormente partilhado com o Círculo de Viena, de que a matemática se legitimasse *a priori*. Em 1924, Russell defendia que a Lógica e a Matemática, assim como as equações de Maxwell da eletrodinâmica, se aceitassem, em virtude da veracidade de suas consequências observadas.

Surpreendentemente, Lakatos deixou de referir que, já nos idos de 1949, também Nicolas BOURBAKI defendia uma visão pragmaticista da matemática, *fundada em seus modos evolutivos*:

> "Falando historicamente, certamente é quase falso que a matemática seja isenta de contradição. A não contradição sucede como uma finalidade que se quer alcançar e não como uma qualidade, concedida pela divindade, que nos foi assegurada definitivamente. Desde os tempos antigos, todas as revisões críticas dos princípios da matemática, como um todo ou de algum de seus ramos, foram quase invariavelmente consequentes a períodos de incerteza, nos quais as contradições efetivamente aconteciam e tinham de ser resolvidas. É difícil julgar se a necessidade de provas sistemáticas na matemática grega antiga surgiu ou não dos paradoxos associados ao descobrimento das grandezas incomensuráveis, como foi sugerido por diversos historiadores. Porém, exemplos mais recentes, tais quais o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, da teoria das séries, da teoria dos conjuntos, todos apontam a mesma conclusão. As contradições ocorrem efetivamente; mas não se pode permitir que elas subsistam, se desejarmos preservar o

significado da distinção entre verdadeiro e falso, provado e não provado. Não existe uma linha de separação nítida entre as contradições que ocorrem no trabalho quotidiano do matemático criativo, principiante ou proficiente em sua perícia, como resultado de enganos mais ou menos facilmente detectáveis, e os paradoxos principais que fornecem alimento ao pensamento lógico por décadas ou, às vezes, por séculos. Assim, a ausência de contradição, em toda a matemática ou em qualquer de seus ramos, acontece como um fato empírico e não como princípio metafísico. Quanto mais um dado ramo amadurece, se torna menos provável que se encontrem contradições no seu desenvolvimento ulterior. Ao mesmo tempo, mesmo nos ramos mais bem instituídos de nossa ciência, todos sabem que um uso pouco esperto ou esperto demais da nomenclatura e das notações disponíveis pode conduzir a ambiguidades e, finalmente, a contradições. Não estou referindo simplesmente aqueles *abus de langage* sem os quais nenhum texto matemático seria legível. Um exame superficial de muitas das notações disponíveis mostraria que poucas são inteiramente seguras, na acepção de que as ambiguidades inerentes em muitos delas não se podem remover, sem complicá-las ao ponto de torná-las inúteis. Como exemplo desse fato, podemos referir o uso de parênteses e de chaves e o acordo de cavalheiros que, frequentemente, permite sejam omitidos. Qual será a atitude do matemática criativo, quando for confrontado com tal situação embaraçosa? Acredito que não deva ser outra senão a atitude estritamente empírica." (47) [BOURBAKI 1949:2-3]

E, após expor alguns sinais, o cálculo lógico e alguns axiomas, BOURBAKI [1949:8] esclarece que "se houver alguma coisa original em seu procedimento, ela consistirá no fato de, em vez de ficar satisfeito com declaração de que as ferramentas propostas sejam suficientes para se construir toda a matemática contemporânea, ele começar a prová-lo, do mesmo modo que Diógenes provara a existência do movimento; e que sua prova se tornará cada vez mais completa, à medida que o seu tratado se for escrevendo". (48) [BOURBAKI 1949:8]

Parece-me haver sido semelhante a avaliação feita por John VON NEUMANN [1947B].

"Por se haver perdido a esperança, quer consoante Hilbert, quer consoante Brouwer e Weyl, de se justificar a matemática clássica (isto é, a matemática pré-intuicionista), a maior parte dos matemáticos decidiu usá-la assim mesmo. Enfim, a matemática clássica estava produzindo resultados que eram tão elegantes quanto úteis e, ainda que jamais pudéssemos, de novo, ter absoluta confiança nela, ela se apoiava em uma base pelo menos tão segura quanto, por exemplo, a existência do eléctron. Por isso, se quiséssemos aceitar as ciências, deveríamos igualmente aceitar o sistema clássico da

matemática. Essa atitude mostrou-se admissível mesmo por alguns dos protagonistas originais do sistema intuicionista. Presentemente, é certo que não se extinguiu a controvérsia acerca dos *fundamentos* mas parece altamente improvável que o sistema clássico seja abandonado, salvo por uma pequena minoria." (49) [VON NEUMANN 1947]

4.8 Resumo

Nesse capítulo, foi descrito o ambiente no qual se procedeu à aritmetização da análise e se expuseram os contornos gerais das três principais correntes fundacionais.

Às vezes se sugere que, hoje em dia, a discussão fundacional seja *demodée*. Por exemplo, afirmou HERSH [1979:31]: "Necessitamos hoje de um novo começo e não de uma continuação das várias 'escolas' de logicismo, formalismo ou intuicionismo. Para transcender essas escolas, é necessário retornar a suas origens na história, enxergar o que elas têm em comum e como se arraigaram na matemática e na filosofia de sua época." (50) [HERSH 1979:31]

Sem discordar da proposta aduzida por Reuben Hersh (que se afigura atraente), considero oportuno presumir que o seu motivo pode estar associado à admissão tácita de que, se aceitarmos os axiomas da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel e alguns princípios lógicos, poderemos construir a matemática, no estilo de Bourbaki. [CORRY 1997A:270; DA COSTA 1999:80-82; BOURBAKI 1949:8]

Contudo, recentemente, o quesito fundacional foi retomado por alguns autores que discutem a possibilidade de se substituir, como ferramenta fundacional, a teoria dos conjuntos pela teoria das categorias. [AWODEY 1996; LANDRY & MARQUIS 2005; PEDROSO 2009]

Todavia, perante o quesito fundacional, a atitude (pragmaticista) referida por Bourbaki e por von Neumann parece ser a mais disseminada na comunidade matemática.

4.9 Fontes

(1) *It should also be unnecessary to point out that mathematics, however abstract and however precise, is a science of experience, for experience is not confined to the gross senses. Also the human mind can experience, and we need not be so naive as to see in an oscilloscope an instrument more precise than the brain of man.*" [TRUESDELL 1968:334]

(2) *We know that mathematicians care no more for logic than logicians for mathematics. The two eyes of exact science are mathematics and logic: the mathematical sect puts out the logical eye; the logical sect*

puts out the mathematical eye; each believing that it can see better with one eye than with two." [Augustus De Morgan 1868, *apud* VALENCIA 2001:75]

(3) [...] *the differential calculus* [...] *is to be considered as a branch of common Algebra, or rather as a part of the common symbolical language in which quantity is treated of.* [WOODHOUSE, *apud* KOPPELMANN 1971:176]

(4) [...] *must be sufficient to express all the conditions belonging to any subject of investigation.* [WOODHOUSE, *apud* KOPPELMANN 1971:178]

(5) *The fire of enthusiasm spreads only where it meets with inflammable matter to receive & cherish it — and how few, how very few are those who are disposed to enter heart & soul into a task of such gigantic labour, and such diminutive reward.* [HERSCHEL, *apud* RICHARDS 1991:307]

(6) [...] *la réunion des nombreux matériaux, relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral, épars dans les collections académiques, pouvait seule faire connaître toutes les richesses de cette branche importante de l'Analyse, et réduire à un petit nombre de méthodes générales, une foule de procédés particuliers qui tenaient à l'enfance de ces calculs; mais une simple compilation n'aurait pas atteint ce but.* [LACROIX, *apud* DHOMBRES 1986:154]

(7) [...] *it may be considered as an abridgement of his great work on the Differential and Integral Calculus, although in the demonstration of the First Principles, he has substituted the method of limits of D'Alembert in the place of the more correct and natural method of Lagrange which was adopted in the former.* [*Apud* KOPPELMANN 1971:180]

(8) [...] *a tendency to separate the principles and departments of the Differential Calculus from those of Common Algebra.* [*Apud* KOPPELMANN 1971:180]

(9) *Our notion, indeed, of a ratio, whose terms are evanescent [the limit] is necessarily obscure, however rigorously its existence and magnitude may be demonstrated; and its introduction into all our reasonings in the establishment of this Calculus, is calculated to throw a mystery over all its operations, which can only be removed by our knowledge of its more simple and natural origin.* [BABBAGE, *apud* RICHARDS 1991:311-312]

(10) *In this method M. Lagrange seems to have generalized too rapidly, and instead of comprehending under a common form, the results of particular operations, to have endeavoured to supersede those operations.* [WOODHOUSE, *apud* RICHARDS 1991:311]

(11) [...] *science of symbols and their combinations constructed upon its own rules, which may be applied to arithmetic and to all other sciences by interpretation.* [PEACOCK, *apud* KOPPELMAN 1971:216]

(12) *Though the science of arithmetic, or of arithmetical algebra, does not furnish an adequate foundation for the science of symbolical algebra, it necessarily suggests its principles or rather its laws of combination.* [PEACOCK, *apud* KOPPELMAN 1971:216]

(13) *I believe that no views of the nature of Symbolical Algebra can be correct or philosophical which makes the selection of its rules of combination arbitrary and independent of arithmetic.* [PEACOCK, *apud* KOPPELMAN 1971:216]

(14) *Whatever equivalent form is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specific in their symbols, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as in their form.* [PEACOCK, *apud* RICHARDS 1980:349]

(15) [...] *we may proceed with the investigation of the fundamental rules for addition, subtraction, multiplication and division, and of the theorem for the connection of multiples, and for the multiplication and involution of powers of the same symbol, which will, in fact, form a series of assumptions which are not arbitrary, but subordinate to the conditions which are imposed by our hypotheses: but if we suppose those conditions to be incorporated into one general law, whose truth and universality are admitted, then those assumptions become necessary consequences of this law, and must be considered in the same light with other propositions which follow, directly or indirectly, from the first principles of a demonstrative science.* [PEACOCK, *apud* RICHARDS 1980:350]

(16) *They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolical Algebra, are aware that the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same processes may, under one scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of numbers, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics.* [...] *We might justly assign it as the definitive character of a true Calculus, that it is a method resting upon the employment of Symbols, whose laws of combination are known and general, and whose results admit of a consistent interpretation.*] [BOOLE, *apud* KNEALE 1948:160]

(17) *Many will object to this theory as extralogical. But I cannot see on what definition, founded on real distinction, the exclusion of it can be maintained.* [...] *Without pretending that logic can take cognizance of the probability of any given matter, I cannot understand why the study of the effect which partial belief of the premises produces with respect to the conclusion, should be separated from that of the consequences of supposing the former to be absolutely true.* [...] *I should maintain, against those who would exclude the theory of probability from logic, that, call it by what name they like, it should accompany logic as a study.* [DE MORGAN, *apud* RICE 2003:295]

(18) *The contrary of an aggregate is the compound of the contraries of the aggregants: the contrary of a compound is the aggregate of the contraries of the components.* [DE MORGAN, *apud* RICE 2003:289]

(19) *Boole's and De Morgan's books were the two most important British works on logic to appear in the middle of the nineteenth century; and they were, indeed, both written by prominent mathematicians.* [MERRILL 2005:75]

(20) *Algebra as an art, can be of no use to any one in the business of life.* [...] *Taught as an art it is of litte use in the higher mathematicsm as those are made to feel who attempt to study the differential calculus without knowing more of its principles than is contained in books of rules. The science of algebra, independently of any of its uses, has all advantages which belong to mathematics in general as an object of study.* [DE MORGAN, *apud* RICHARDS 1980:354]

(21) *We must admit that many series are such as we cannot at present safely use, except as a means of discovery, the results of which are to be subsequently verified. ... But to say that what we cannot use no others ever can, to refuse that faith in the future prospects of algebra, which has already realized so brilliant a harvest, and to train the future promoter of analysis in a notion which will necessarily prevent him from turning his steps to quarters from whence his predecessors have never returned empty-handed, seems to me a departure from all rules of prudence.*] [DE MORGAN, *apud* RICHARDS 1980:356-357]

(22) *In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward abstraction seeks to crystallize the logical relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live rapport with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations. As to geometry, in particular, the abstract tendency has here led to the magnificent systematic theories of Algebraic Geometry, of Riemannian Geometry, and of Topology; these theories make extensive use of abstract reasoning and symbolic calculation in the sense of algebra. Notwithstanding this, it is still as true today as it ever was that intuitive understanding plays a major role in geometry. And such a concrete intuition is of great value not only for the research worker, but also for anyone who wishes to study and appreciate the results of research in geometry.* [HILBERT 1952:iii]

(23) *There will never again be a unique 'correct' geometric intuition. Geometric intuition and mathematical theory interact as they grow, each stimulating the other. A geometer has today, in contrast with the year 1800, many kinds of intuition: a Euclidean intuition which tells him that parallel lines are everywhere equidistant, a Lobachevskian intuition that the locus of points equidistant from a line is curved, and a Riemannian intuition that there are no parallel lines.* [PRENOWITZ & JORDAN 1965:118]

(24) [...] *la logique, réduite à ses seules ressources, est stérile par définition même. Si elle sait séparer le bon grain de l'ivraie, elle ne peut rien créer, à moins d'être fécondée par l'intuition.* [DUGAS 1962:342]

(25) *C'est donc celui-là? Mais bien sûr que je m'en souviens, il était mon élève dans le temps. Après, il est devenu poète. Évidemment, il n'avait pas assez de fantaisie pour s'occuper des mathématiques.* [CHILOV 1973B:9]

(26) [...] *la fonction étant continue, l'équation: $y = f(x)$, représente une courbe plane continue, rapportée à deux axes rectangulaires.* [...] *Comme en chaque point une courbe continue a une tangente bien déterminée, la fonction admet une dérivée.* [*Apud* DELACHET 1949:56-57]

(27) *Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit a, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x + a) - f(x)$ qui dépendra, en même temps, de la nouvelle variable a et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x,* fonction continue *de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x + a) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de a.* [CAUCHY, *apud* DELACHET 1949:52-53]

(28) *C'est par une vue de la raison que l'idée de la continuité, et par suite l'idée de la grandeur continue, sont saisies dans leur rigueur absolue. Ainsi nous concevons nécessairement que la distance d'un corps mobile à un corps en repos, ou celle de deux corps mobiles, ne peuvent varier qu'en passant par tous les états intermédiaires de grandeur, en nombre illimité ou infini; et il en est de même du temps qui s'écoule pendant le passage des corps d'un lieu à un autre.* [COURNOT, a*pud* BRUNSCHVICG 1972:334]

(29) *Il existe des fonctions discontinues qui jouissent d'une propriété que l'on regarde quelquefois comme le caractère distinctif des fonctions continues, celle de ne pouvoir varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.* [DARBOUX, *apud* BRUNSCHVICG 1972:335]

(30) *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* [KRONECKER *apud* STRUIK 1987:162] Há um outro registro desse aforismo: *Die ganze Zahl schuf der liebe Gott; alles übriges ist Menschenwerk.* [*Apud* WEYL 2000:51] A variedade de versões pode decorrer de esse apotegma não se encontrar nas obras publicadas de Kronecker, mas haver sido proferido em uma alocução prandial. [KNEEBONE 2001:249, rodapé]

(31) *Gauss, taking for granted the continuity of space, unhesitatingly used space intuition as a basis for his proofs; but close investigation showed not only that many special points still needed proof, but also that space intuition had led to the too hasty assumption of the generality of certain theorems which are by no means general. Hence arose the demand for exclusively arithmetical methods of proof: nothing shall be accepted as a part of the science unless its rigorous truth can be clearly demonstrated by the ordinary operations of analysis.* [KLEIN 1895:241-242]

(32) *Si l'intuition géométrique ne suffit plus à garantir de l'absurdité, où trouver un critère suffisant de clarté et de rationalité?* [DESANTI 1962:182]

(33) *Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz der neueren Analysis ist Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so gibt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält.* [*Apud* SOERENSEN 2005:454]

(34) [...] *von dem anderen Dirichletschen Prinzipe, mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen, datiert die Neuzeit in der Geschichte der Mathematik.* [MINKOWSKI 1905:163]

(35) *The Congress was the turning point of my intellectual life, because there I met [Giuseppe] Peano. I already knew him by name and had seen some of his work, but had not taken the trouble to master his notation. In discussions at the Congress I observed that he was always more precise than anyone else, and that he invariably got the better of any argument on which he embarked. As the days went by, I decided that this must be owing to his mathematical logic.* [...] *It became clear to me that his notation afforded an instrument of logical analysis such as I had been seeking for years* [...] . [*Apud* O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Russell.]

(36) [...] *l'important c'est de ne jamais introduire que des êtres que l'on puisse définir complètement en un nombre fini des mots.* [POINCARÉ 1908:939]

(37) *Die mathematische Literatur findet sich, wenn man darauf acht gibt, stark durchflutet von Ungereimtheiten und Gedankenlosigkeiten, die meist durch das Unendliche verschuldet sind. So wenn z. B. im Sinne einer einschränkenden Bedingung die Forderung betont wird, dasz in der strengen Mathematik nur eine endliche Anzahl von Schlüssen in einem Beweise zulässig sei — als ob es schon irgend jemandem einmal gelungen wäre, unendlich viele Schlüsse auszuführen.* [HILBERT 1926:162]

(38) *Après avoir décrit l'intuitionisme avec quelque distance, en troisième personne et comme si c'était l'affaire des autres, notamment de l'école française (Poincaré, Baire, Borel, Lebesgue ...), il prend à son compte des thèse plus radicales, par exemple sur la séparation des mathématiques d'avec le langage chargé d'en décrire les constructions, par quoi il s'oppose aux logicistes et aux formalistes réunis.* [LARGEAULT 1992A:533]

(39) [...] *les notions plus ou moins intuitives d'une loi de construction, d'un algorithme, d'un processus effectif* [...]. [BETH 1955:75]

(40) *Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.* [RUSSELL (1901) *International Monthly*, p. 84, *apud* BRUNSCHVICG 1972:497]

(41) *On s'est efforcé, d'autre part, d'énunérer les axiomes et les postulats plus ou moins dissimulés qui servent de fondement aux diverses théories mathématiques. Monsieur Hilbert a obtenu les résultats les plus brillants. Il semble d'abord que ce domaine soit bien limité et qu'il n'y ait plus rien à y faire,*

quand l'inventaire sera terminé, ce qui ne saurait tarder. Mais, quand on aura tout énuméré, il y aura bien des manières de tout classer; un bon bibliothécaire trouve toujours à s'occuper, et chaque classification nouvelle sera instructive pour le philosophe. [POINCARÉ 1908:939]

(42) *Neben der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit wird man von den Axiomen, die zur Grundlage einer Wissenschaft dienen sollen, die* Vollständigkeit *fordern.* [...] *Dann garantierte die Widerspruchsfreiheit, dasz man niemals zu* beiden *Aussagen* ω, ϖ *gelangt, die Vollständigkeit, dasz man stets zu* einer *von beiden gelangen kann.* [WEYL 2000:41]

(43) [...] *qu'il n'y a point d'axiomes sans une substance mathématique antérieure à axiomatiser.* [*Apud* LARGEAULT 1992A:538]

(44) *Since Weierstrass, analysis seems to have become completely abstract, rigorous, and unempirical. But even this is not unqualifiedly true. The controversy about the 'foundations' of mathematics and logics, which took place during the last two generations, dispelled many illusions on this score.* [VON NEUMANN 1947]

(45) *Ils ne sont pas la réalité première, on les trouve après coup; une fois la nature capturée par hasard, nous nous mettons à chercher des axiomes dans le système déjà construit.* [*Apud* LARGEAULT 1992A:538]

(46) *Although the demands of logic, consistency, and rigor have at times urged the rejection of some concepts now accepted, the usefulness of these concepts has repeatedly forced mathematicians to accept and to tolerate them, even in the face of strong feelings of discomfort.* [CROWE 1975:163]

(47) *Historically speaking, it is of course quite untrue that mathematics is free from contradiction; non-contradiction appears as a goal to be achieved, not as a God-given quality that has been granted us once for all. Since the earliest times, all critical revisions of the principles of mathematics as a whole, or of any branch in it, have almost invariably followed periods of uncertainty, where contradictions did appear and had to be resolved. It is hard to judge whether the need for systematic proofs in early Greek mathematics did or did not arise from the paradoxes connected with the discovery of incommensurable magnitudes, as has been suggested by several historians. But more modern examples, such as the development of the infinitesimal calculus, the theory of series, the theory of sets, all point to the same conclusion. Contradictions do occur; but they cannot be allowed to subsist if the distinction between true and false, proved and unproved is to keep its meaning. There is no sharply drawn line between those contradictions which occur in the daily work of every mathematician, beginner or master of his craft, as the result of more or less easily detected mistakes, and the major paradoxes which provide food for logical thought for decades and sometimes centuries. Absence of contradiction, in mathematics as a whole or in any given branch of it, thus appears as an empirical fact, rather than as a metaphysical principle. The more a given branch has been developed, the less likely it becomes that contradictions may be met with in its further development. At the same time, even in the best established branches of our science, everyone knows that an unskilful, or too skilful, use of the existing terminology and notations*

can lead to ambiguities and eventually to contradictions. I am not, merely referring to those abus de langage *without which no mathematical text would be readable; a cursory examination of many existing notations will show that few are altogether foolproof, in the sense that the ambiguities inherent in most of them cannot be removed without complicating them to the point of uselessness. As an example to the point, one can mention the use of parentheses and brackets, and the gentleman's agreements in virtue of which these may frequently be omitted. What will be the working mathematician's attitude when confronted with such dilemmas? It need not, I believe, be other than strictly empirical.* [BOURBAKI 1949:2-3]

(48) [...] *if there is anything original in my procedure, it lies solely in the fact that, instead of being content with such a statement, I proceed to prove it in the same way as Diogenes proved the existence of motion; and my proof will become more and complete as my treatise grows.* [BOURBAKI 1949:8]

(49) *The main hope of a justification of classical mathematics — in the sense of Hilbert or of Brouwer and Weyl — being gone, most mathematicians decided to use that system anyway. After all, classical mathematics was producing results which were both elegant and useful, and, even though one could never again be absolutely certain of its reliability, it stood on at least as sound a foundation as, for example, the existence of the electron. Hence, if one was willing to accept the sciences, one might as well accept the classical system of mathematics. Such views turned out to be acceptable even to some of the original protagonists of the intuitionistic system. At present the controversy about the 'foundations' is certainly not closed, but it seems most unlikely that the classical system should be abandoned by any but a small minority.* [VON NEUMANN 1947]

(50) *What is needed now is a new beginning, not a continuation of the various 'schools' of logicism, formalism or intuitionism. To get beyond these schools, it is necessary to go back in history to their origin, to see what they had in common, and how they were rooted in the mathematics and philosophy of their day.* [HERSH 1979:31]

Capítulo quinto

Da conceituação: As definições explícitas

Sumário

5.1 Antelóquio

5.2 As definições nominais

5.3 As definições por abstração

5.4 Primeiro exemplo: A equivalência motivada por homomorfismos não injetivos

5.5 Segundo exemplo: O anel dos números inteiros

5.6 A ampliação do conceito de função

5.7 Conclusão

5.8 Fontes

5.1 Antelóquio

> "Resumidamente, uma filosofia da matemática é convincente, somente se se fundar em um exame da própria matemática." (1) [MAC LANE 1986:1]

O tecido matemático é constituído dos conceitos, dos postulados (ou axiomas) e dos juízos de inerência. Os conceitos podem ser definidos explícita ou implicitamente. E os juízos de inerência se traduzem em teoremas. Neste capítulo, tratarei das definições explícitas.

Admite-se que as definições euclidianas eram descritivas, na acepção de que Euclides fornecia descrições apropriadas de objetos considerados como dados. Em um certo sentido, as definições euclidianas pretendiam descobrir a natureza dos próprios objetos, supostamente existentes, enquanto as definições hodiernas se propõem a criar objetos.

Dessa perspectiva, as definições hodiernas são ferramentas de geração de objetos ou, equivalentemente, os objetos existem, porque são definidos. [FERRARO 1999:103]

Em 1926, David Hilbert asseverava que "para verificarmos a legitimidade de introduzirmos um novo conceito, além de provarmos que sua introdução não conduz a antinomias, o único critério que ainda podemos impor é a fecundidade desse novo conceito. Na verdade, a fecundidade é necessária e constitui também a mais alta instância a que nos devemos curvar". (2) [HILBERT 1926:163]

Usam-se, em matemática, dois tipos de definições explícitas: a definição *nominal* e a definição *por abstração*. Extremamente importantes são também as definições *por recorrência*, que não considero como *explícitas* mas como *genéticas*, na acepção de que produzem novos conceitos. (As *definições por recorrência* serão consideradas no capítulo oitavo, depois que se discutirem as *provas por recorrência*, pois esses dois temas estão vinculados.)

5.2 As definições nominais

A definição nominal consiste em substituir-se, por um único termo ou por uma locução, uma sentença, na qual se articulam conceitos anteriormente apresentados. Assim, em uma definição figuram duas partes: o objeto que está sendo definido (*definiendum*) e a sentença que o define (*definiens*). Usualmente, escrevem-se o *definiendum* à esquerda e o *definiens* à direita. Essa forma de se conceber uma definição, apontada por Giuseppe Peano (1921), parece ser a mais restritiva. [Cf. BUNGE 1976:200; SANT'ANNA 2005:2-3]

Assim, poder-se-á definir um triângulo equilátero como um polígono que apresenta três lados congruentes. Esse tipo de definição não é privativo da matemática. Em biologia, por exemplo, poder-se-á definir o olho como um órgão, encontrado em uma multiplicidade de organismos vivos, que responde a estímulos luminosos, consoante certo cânone.

Esse tipo de definição parece haver sido introduzido por Sócrates de Atenas (século V a.C.) que, ao arguir os interlocutores, rejeitava os exemplos como respostas a suas perguntas e que, por isso, é considerado o inventor da conceituação [CHATELET 1994:20].

Não significa isso que a prática da definição nominal, desde então, tenha atendido à exigência hoje corrente de que o predicado que nela figura "convenha ao objeto definido e somente a ele". (3) [JOLIVET 1941:72]

Por exemplo, o primeiro Livro dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (*circa* século III a.C.) inicia pela *definição* "um ponto é aquilo que não tem partes", sentença essa que não é usada na demonstração dos teoremas. [KUTUZOV 1960:447-448, 465-466]

Pode talvez perceber-se, em sentenças desse tipo, o cuidado de Euclides em afastar qualquer simpatia do leitor pela concepção defendida por Demócrito de Abderos, que afirmava serem os átomos, partículas indivisíveis e eternas, a matéria prima do universo. [MOSTERÍN 1984:142].

DIEUDONNÉ [1990:51] propõe outra leitura, ao afirmar que Euclides pretendia realçar não ser o objeto da geometria acessível aos nossos sentidos.

Às vezes se distinguem a definição nominal e a definição real (formulada através do *gênero próximo* e da *diferença específica*) mas tal distinção não me parece pertinente, pois se usa esse recurso também nas definições nominais. Por exemplo, a definição nominal de *um triângulo isósceles* se faz mediante a indicação do *gênero próximo* (é um triângulo) e da *diferença específica* (que apresenta dois lados congruentes). [JOLIVET 1941:71]

O recurso ao *gênero próximo* e à *diferença específica* foi adotado pela teoria ingênua dos conjuntos, que o incluiu como *o axioma da especificação*: "A cada conjunto A e a cada condição S(x) corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente os elementos x de A para os quais S(x) se verifica." (4) [HALMOS 1974:6]

Decorre dessa formulação que, se a condição S(x) for incompatível com a conceituação do conjunto A, o conjunto B será vazio. Por isso, antes de pretender derivar propriedades dos elementos do conjunto B, caberá ao matemático exibir pelo menos um elemento nesse conjunto.

Por outro lado, é desejável que a condição estipulada para definir o conjunto B não seja uma propriedade dos elementos do conjunto A, o que tornaria B igual a A, consoante *o axioma da extensão*: "Dois conjuntos são iguais se e somente se tiverem os mesmos elementos." (5) [HALMOS 1974:2]

Esse axioma foi enunciado como teorema por DEDEKIND [1893:46].

Na prática dos matemáticos, a definição do conjunto B como parte *própria* de A é precedida da verificação de que B não é vazio e de que B é distinto de A. (O conceito de parte própria de um conjunto também foi formulado por DEDEKIND [ibidem].) Isso, geralmente, se pode fazer pela exibição de dois elementos: Um elemento que esteja em B e um elemento que esteja em A mas que não esteja em B.

Por exemplo, antes de se definir um *cone arquimediano*, deve o matemático mostrar que existem cones sólidos que gozam da propriedade usada para se definirem os cones

arquimedianos e que existem cones sólidos que não gozam dessa propriedade. (Um cone convexo é **sólido**, se admitir vetores anisotrópicos. O conjunto dos vetores anisotrópicos de um cone convexo K constitui um subcone de K, denominado **subcone anisotrópico**. Um cone sólido K é arquimediano, se a face de K gerada por qualquer um dos seus vetores anisotrópicos coincidir com o subcone anisotrópico.)

É frequente o emprego de definições, para se delimitar adequadamente o domínio de validade de certas sentenças. Um exemplo especialmente elucidativo é apresentado pelo conceito de plenitude.

Augustin Cauchy notou (por volta de 1823) que existem sequências de números racionais (posteriormente denominadas *sequências fundamentais* por Georg Cantor) cujos termos se acumulam uns próximos dos outros. Mais precisamente, a sequência de números racionais u é denominada *fundamental* se, dado r estritamente positivo, existe um índice m tal, que, se $\min\{h, k\} > m$, $|u_h - u_k| < r$.

Toda sequência convergente é fundamental. Com efeito, dada uma sequência convergente (a_n) a L e dado $\varepsilon > 0$, existe um índice m tal, que, se $\min\{h, k\} > m$, então $|u_h - L| < \varepsilon/2$ e $|u_k - L| < \varepsilon/2$. Logo, $|u_h - u_k| \leq |u_h - L| + |L - u_k| < \varepsilon$.

Cauchy postulou que a recíproca da proposição anterior fosse verdadeira, no caso das sequências de termos reais. Esse postulado, depois denominado critério de Cauchy, afirma pois que seja convergente toda sequência fundamental de números reais.

Posteriormente, já no século XX, após a definição do conceito de espaço métrico por Maurice Fréchet (1906), se encontraram espaços métricos que satisfazem ao critério de Cauchy, como o espaço das funções delimitadas sobre um intervalo fechado, dotado da norma $|f| = \sup\{|f(x)|\}$, e espaços métricos que não atendem a esse critério, como o espaço das funções *contínuas* definidas em um intervalo fechado, dotado da norma associada ao produto interno.

Isso motivou a definição de espaço métrico *completo*, como o espaço métrico que atende ao critério de Cauchy. No caso específico de a métrica estar associada a uma norma ou a um produto interno, ao espaço métrico completo é atribuído, respectivamente, o nome de *espaço de Banach* ou de *espaço de Hilbert*.

No caso dos corpos ordenados, é frequente adotar-se uma conceituação específica. Diz-se que um corpo ordenado K é *completo*, quando qualquer de suas partes não vazias e limitadas superiormente admite um supremo em K. [LIMA 1982:64]

No caso do corpo dos números reais, a plenitude decorre de uma proposição, habitualmente denominada teorema de Bolzano-Weierstrass.

De fato, certifica o teorema de Bolzano-Weierstrass que toda sequência limitada de números reais admite uma subsequência convergente. Aplicando, sucessivamente os dois lemas seguintes (cujas provas são imediatas), obtemos o critério de Cauchy.

(a) Todas as sequências fundamentais são limitadas.

(b) É convergente toda sequência fundamental que admite uma subsequência convergente.

Percebe-se assim que, no caso dos corpos ordenados, se preferiu recorrer a uma propriedade específica dessa estrutura, da qual se obtém a condição usada na definição dos espaços métricos completos. Nota-se também que, se adotarmos no espaço R^n a norma do máximo, o critério de Cauchy facilmente será estendido a esse espaço. E, como são equivalentes duas quaisquer normas definidas sobre um espaço vetorial de dimensão finita, a extensão do critério de Cauchy ao espaço R^n não depende da norma adotada. [LIMA 2004:120]

O uso das definições nominais está associado a um padrão de mudança conceitual que será descrito no capítulo seguinte (*da analogia na extensão de conceitos*).

Às vezes, se conceitua como genética a definição na qual figura um modo de se produzir ou gerar o conceito definido. [JOLIVET 1941:72] Por exemplo, "um círculo é a figura gerada pelo movimento planar de um ponto móvel em torno de um ponto fixo". Não creio que seja essa uma distinção adequada, pois o mesmo conceito pode ser apresentado como "a figura constituída dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo", que é reconhecidamente uma definição nominal. [KNEEBONE 2001:260]

Opino pois que seja considerada genética a definição que gera ou cria o conceito. Portanto, esse qualificativo cabe às **definições por recorrência**, que seram descritas no capítulo oitavo. [KNEEBONE 2001:260]

5.3 As definições por abstração

> Tampouco o vocábulo 'igualdade' deveria ser usado, quando não se trata de uma perfeita igualdade — usa-se então a maravilhosa palavra 'equivalência'. (6) [KRONECKER 1891:231]

Na quinta carta a Clarke, Leibniz aludiu a uma semelhança entre os objetos de um conjunto como uma relação entre esses objetos que se parecesse com a igualdade mas que fosse mais geral. [WEYL 2000:25]

A inauguração *formal* dessa semelhança na matemática foi promovida por Carl Gauss, nas célebres *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), ao definir a congruência entre dois números inteiros segundo um dado módulo. (Na verdade, a definição de congruência proposta por Gauss não foi esta mas é equivalente a esta. Leia-se, adiante, no sexto capítulo, a seção que trata do *episódio associado à divisibilidade em domínios de integridade*.) [GAUSS 1801:7; EVES 1997:566; ITARD 1969:43]

Dizemos que os números a e c são *congruentes segundo o módulo m*, se esses números, ao serem divididos por m, deixarem o mesmo resto, isto é, $a \equiv c \bmod m \Leftrightarrow$ existe um número r, nulo ou positivo, tal que $r < m$, $a = mq_1 + r$ e $c = mq_2 + r$, para q_1 e q_2 adequados. (Doravante, o símbolo $\mathbb{Z}$ denotará, como é usual, o anel dos números inteiros racionais.)

Essa relação goza das três propriedades seguintes:

- É reflexiva: $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv x$.
- É recíproca (ou simétrica): $\forall a,c \in \mathbb{Z}$, $a \equiv c \Leftrightarrow c \equiv a$.
- É transitiva: $\forall a, x, c \in \mathbb{Z}$, $a \equiv x$, $x \equiv c \Rightarrow a \equiv c$.

É frequente, em matemática, estender-se uma noção, acentuando-se as suas propriedades e fazendo-se abstração do contexto específico no qual essa noção foi inicialmente concebida. Consoante essa praxe, estendemos essa noção de congruência entre números inteiros a uma relação definida em um conjunto qualquer (não vazio) S, a qual goze das três propriedades descritas (a reflexividade, a reciprocidade e a transitividade) e chamamos a uma tal relação uma equivalência em S.

Também August Möbius percebeu a utilidade de considerar uma *afinidade circular* entre figuras que, de certo modo, estendesse os conceitos de congruência e de semelhança. Até então, a ideia de simetria evocava os movimentos euclidianos, isto é, as translações, as rotações e as reflexões. Mas simetrias também podem ser criadas por transformações que esticam ou torcem. No ensaio *A teoria da afinidade circular em uma descrição puramente geométrica* (*Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung*, 1855), Möbius imaginou a relação entre figuras que se podem obter, uma da outra, mediante uma sucessão de translações, homotetias e inversões. Considerou as transformações pontuais entre os pontos do plano (ou, equivalentemente, entre números complexos) que a cada elemento z associam

o número (az + b)/(cz + d). Para isso considerou o plano estendido, isto é, dotado de um ponto afastado infinitamente, cuja imagem fosse a/c e que fosse imagem do ponto -d/c. [MUMFORD et alii 2002:62, 69-71]

A possibilidade de emprego de uma noção geral de equivalência foi formulada por Moritz Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882) e ainda mais claramente por Gottlob Frege (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884). [WEYL 2000:25]

A definição de uma equivalência em um conjunto atende aparentemente à expectativa de Leibniz. De fato, como se verifica facilmente, toda equivalência no conjunto S opera uma **classificação exaustiva** de seus elementos, entendendo-se por classificação exaustiva uma operação que separa os elementos de S em *classes* disjuntas e não vazias, cuja reunião seja S. Dizer que a reunião de todas essas classes coincide com o conjunto S é equivalente a afirmar que todos os elementos de S estão classificados.

Para provarmos que toda equivalência em um conjunto S opera uma classificação exaustiva de seus elementos, é suficiente associarmos a um elemento qualquer x do conjunto S a parte de S constituída dos elementos que são equivalentes a x. [BETH 1955:9]

No caso definido por Gauss, tais classes foram denominadas *classes residuais*. No caso geral, denominam-se *classes de equivalência* e ao conjunto de tais classes chama-se *conjunto quociente* (do conjunto S pela equivalência instituída).

Assim, instituída uma equivalência em um conjunto S, consideramos como equivalentes os elementos de S que estão em uma mesma classe. Tais classes são, portanto, elementos da família das partes de S e são definidas *por abstração* de outras propriedades das quais os elementos de S possam gozar. [BETH 1955:9]

Cabe acentuar que essa noção de semelhança que Leibniz anelava e que Gauss empregou, ao estudar as congruências numéricas, já era conhecida, havia séculos. Com efeito, em algum ponto de sua trajetória, a humanidade percebeu **empiricamente** que têm o mesmo valor frações como 2/4 e 4/8, experimentou com outras frações, como 2/5 e 6/15, e descobriu que o critério de equivalência entre frações repousava na verificação da igualdade entre dois produtos. Esse critério foi enunciado, dizendo-se que as frações a/b e c/d representam um mesmo número racional, quando ad = bc. Surgiu assim a noção de que frações distintas pudessem **representar** [***darstellen***] um mesmo conceito, um número racional, pensado abstratamente [***vorgestellt***].

Continuando a experimentar, a humanidade percebeu que duas frações poderiam ser comparadas, se a unidade fosse dividida pelo produto dos seus denominadores (**o que equivale a escolher uma menor unidade de medida**). Daí surgiu o critério de comparação: A fração a/b é menor que a fração c/d, se o produto a.d for menor que o

produto c.b. (Em algum ponto posterior de sua trajetória, a humanidade refinou esse procedimento, notando que seria suficiente multiplicar ambas as frações pelo menor múltiplo comum dos denominadores mas isso não é pertinente ao tema presente.)

Finalmente, instituíram-se as definições de soma e de produto de duas frações, notando-se que a adição se efetua mediante a prévia redução das frações ao mesmo denominador.

$a/b + c/d = (a.d + c.b)/b.d$

$a/b \,.\, c/d = a.c \,/\, b.d$

Em linhas gerais, é exatamente essa a formulação proposta correntemente. [Veja-se, por exemplo, LANDAU 1960:19-34.] Apenas, é comum, usando-se a linguagem conjuntual, hoje dominante, dizer-se que será instituída uma equivalência no produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e que no conjunto quociente assim obtido, serão definidas uma ordem e duas leis de composição interna. (Doravante, como é usual, o símbolo $\mathbb{N}$ denotará o sistema dos números naturais.)

Talvez seja oportuno apontar que a narrativa feita constitui a melhor apresentação **didática** do conceito de equivalência.

A definição por abstração é, às vezes, empregada em uma construção que procura **amplificar** um dado conjunto S. Como, usualmente, esse procedimento de amplificação produz **conjuntos excessivamente grandes** e pouco interessantes, recorremos a uma equivalência entre os seus elementos, para abstrairmos das propriedades que não forem relevantes ao contexto vertente e **identificar** os elementos que gozam das propriedades consideradas. (Desse modo, se obtém uma amplificação em uma *escala* adequada.)

Os exemplos seguintes dilucidirão claramente esse método de definição.

5.4 Primeiro exemplo: A equivalência motivada por homomorfismos não injetivos

Outra classificação, não tão antiga quanto a classificação das frações, foi a proposta por Euclides, ao estudar a semelhança entre triângulos. Essa classificação permitiu que estendessem a uma infinidade de triângulos diversas propriedades demonstradas pelo estudo de um único triângulo, o representante da classe de equivalência.

Neste primeiro exemplo, se perceberá a simplicidade da ideia e a riqueza de ilações. Iniciaremos mostrando como se podem classificar os elementos de um qualquer conjunto, considerando transformações não injetivas desse conjunto em um outro. (Esta classificação será especialmente interessante, se o conjunto considerado, resultante de um procedimento de amplificação, for excessivamente grande.)

Dados dois quaisquer conjuntos (não vazios) C_1 e C_2 e uma função h: $C_1 \rightarrow C_2$, se tal função não for injetiva, pode haver interesse em identificar os elementos de C_1 que têm a mesma imagem, isto é, podemos dizer que, $\forall$ x, z $\in$ C_1, a $\approx$ b, se h(x) = h(z). Claramente essa relação é reflexiva, recíproca e transitiva. Portanto, os elementos do conjunto C_1 são classificados por essa equivalência.

Essa situação é especialmente interessante, quando os conjuntos considerados são dois grupos G e L e a função h considerada é um homomorfismo não injetivo. Nesse caso, a condição h(x) = h(z) é equivalente à condição $h(xz^{-1}) = 1$ que também é equivalente a dizer-se que xz^{-1} está no núcleo N(h) do homomorfismo h. Como o núcleo de um homomorfismo de um grupo em outro é um subgrupo invariante do primeiro grupo, essa condição pode ser estendida, do modo seguinte.

Dados um grupo G e um subgrupo N invariante de G, para elementos quaisquer x e z de G, a condição $(xz^{-1}) \in N$ define uma equivalência em G. Nesse caso, o grupo quociente é denotado por G/N.

Essa simples construção permitiu a Emmy Noether enunciar dois teoremas que caracterizam essa situação. [HERSTEIN 1964:50, 54; MAC LANE 1996:330]

- Sejam G e L dois grupos, h um homomorfismo de G em H e N(h) o núcleo de h. O grupo quociente G/N(h) é isomorfo ao grupo L.

- Sejam G e L dois grupos, h um homomorfismo de G em L e N(h) o núcleo de h. Dado um subgrupo M de L, seja J = {x $\in$ G: h(x) $\in$ M}. Nessas condições, J é um subgrupo de G que contém N(h). Se M for normal em L, também J o será em G. Além disso, essa associação institui uma correspondência bijetiva entre a família de todos os subgrupos de L e a família de todos os subgrupos de G que contêm N(h).

Outra situação especialmente importante é aquela na qual os dois conjuntos C_1 e C_2 coincidem. Chamemos a esse conjunto C e designemos os seus elementos como pontos. Suponhamos agora que as funções que operam sobre esse conjunto C sejam elementos de um grupo de transformações G e que N seja um subgrupo invariante de G.

Dados os pontos P e Q de C, diremos que o ponto P é equivalente ao ponto Q, se existir uma transformação T em N que converta P em Q.

É imediato que tal relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

Esse simples esquema teórico foi descrito por Felix Klein no famoso programa de Erlangen [*Erlanger Programm*, 1872] nome posteriormente atribuído à conferência *Considerações comparativas acerca das novas pesquisas geométricas* [*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*].

Para contextuar historicamente essa conferência, lembremo-nos de que, na geometria era frequente o estudo das transformações entre superfícies e das propriedades associadas. Por exemplo, Cláudio Ptolemeu (*circa* 130) introduzira *a projeção estereográfica*, que converte a esfera em um plano (dotado de um ponto impróprio). [EVES 1997:221]

Gerardo Mercator (*circa* 1552) introduzira, na cartografia, a projeção da esfera sobre um plano (depois denominada projeção de Mercator). Consoante essa projeção, *as curvas loxodrômicas* (isto é, as curvas sobre a esfera que cortam os meridianos sob um ângulo constante) são convertidas em linhas retas. [EVES 1997:403]

Dentre as projeções, distinguiam-se *as correspondências biunívocas* (ou, como se diz hoje, *bijetivas*) entre dois domínios, consideradas como "uma regra para se associarem dois domínios, de modo que a cada ponto de um deles correspondesse exatamente um ponto do outro". Um espécime relevante eram as colineaçoes, que associavam pontos colineares a pontos colineares (e, portanto, retas concorrentes a retas concorrentes). [COXETER 1949:18, 36]

Lembremo-nos, também, que, por volta de 1810, o bom sucesso obtido na matematização da mecânica (por Lagrange) e da astronomia (por Laplace) dotara a teoria euclidiana do espaço de um grau de certeza dificilmente contestável. [OSSERMAN 2005:1030]

No entanto, August Möbius redescobrira a geometria da inversão e, estendendo a noção euclidiana de *congruência*, considerou como circularmente afins [*kreisverwandt*] uma figura e outra figura obtida da primeira por transformaçoes compostas de translações, homotetitas e inversões. [MUMFORD et alii 2002:71]

Além disso, o labor na geometria projetiva iniciado por Poncelet e continuado por diversos investigadores convertera essa disciplina em uma matéria autônoma, cuja independência da geometria euclidiana fora instituída por von Staudt. [COXETER 1949:10; STRUIK 1987:165]

Por outro lado, após 1860, se tornaram conhecidos tanto o trabalho de Lobachevski quanto a alocução de Riemann (proferida em 1854) e os questionamentos por Hermann von Helmholtz. A renovação da geometria diferencial por Monge fora reconfigurada por Gauss e seus discípulos, tornando o saber geométrico um campo enorme e multifário, em cujos ramos somente os especialistas sabiam mover-se. Um primeiro resultado sistematizador foram as investigações de Cayley e de Klein, que permitiram situar a geometria parabólica (de Euclides) e a geometria hiperbólica (de Lobachevski) no âmbito da geometria projetiva. O programa de Erlangen constituía uma tentativa mais refinada de apreender toda a produção geométrica de uma perspectiva unificadora. [KLEIN 2004:56-61; STRUIK 1987:177; YAGLOM 1988:110]

Vejamos, resumidamente, em que consistiu a ideia diretriz do programa de Erlangen. "Começamos com um grupo Γ de transformações que, por assim dizer, descreve o grau de homogeneidade de nosso domínio. Dado esse grupo Γ, podemos atribuir um significado preciso ao termo 'semelhança': Duas figuras são semelhantes, se uma se converte na outra por uma transformação de Γ. Isso posto, saberemos reconhecer quando uma dada relação é **objetiva**: Se essa relação for invariante sob todas as transformações do grupo Γ." (7) [WEYL 2000:99]

Sob essa perspectiva, podemos definir uma geometria como o estudo das propriedades de figuras preservadas pelos elementos de um certo grupo de transformações ou, equivalentemente, o estudo dos invariantes de um certo grupo de transformações. [YAGLOM 1988:115]

Nas palavras do próprio Klein [1872:463], "a substância de todas essas transformações descrevemos como o *grupo principal* (ou *capital*) das modificações espaciais; *as propriedades geométricas* não se modificam sob as transformações do grupo principal. Também podemos dizer, reciprocamente: As propriedades geométricas caracterizam-se pela invariância perante as transformações do grupo principal." (8) [KLEIN 1872:463]

Dessa perspectiva, se definirmos como grupo principal **o grupo gerado pelos movimentos**, isto é, o grupo gerado por translações, rotações e simetrias (relativas a uma reta ou relativas a um plano) **e pelas homotetias** (incluídas **as reflexões**), obteremos a geometria euclidiana. Já a **geometria projetiva** admite como grupo principal o **grupo das projetividades**, que é gerado pelas homografias (ou colineações) e pelas reciprocidades (ou correlações). [GODEAUX 1960:132-134; 153-154; COXETER 1977:22]

O poder notável desse programa se revela na sua aplicabilidade a situações que o próprio Klein não imaginou. Por exemplo, se o conceito de distância for adequadamente introduzido, então tomando como principal o grupo das isometrias, obteremos a geometria métrica. [COXETER 1977:22]

Ainda dessa perspectiva, podemos definir a **geometria contínua** de um espaço topológico como o estudo das propriedades desse espaço que são invariantes sob o **grupo dos homeomorfismos**. Tais propriedades são denominadas propriedades topológicas). [DELACHET 1973:72-75; KLEIN 1872:85; PONTRYAGIN 1978:73; STEWART 1973:81]

Situados no âmbito do programa de Erlangen podem ser considerados diversos estudos recentes conduzidos na Física.

Foi referido no capítulo terceiro (na seção sobre a *geometria das pluralidades*) que, pouco depois de Albert Einstein apresentar a teoria restrita da relatividade (1905), Hermann Minkowski formulara um tratamento no qual mostrara que as transformações de Lorentz constituíam o grupo das pseudoisometrias de uma forma quadrática no espaço $\mathbb{R}^4$. Também pouco depois de Werner Heisenberg introduzir as *relações de comutação* na mecânica quântica (subjacentes ao princípio da indeterminação), Hermann Weyl mostrou que tais relações poderiam ser interpretadas como as relações estruturais de uma álgebra associada a um grupo (de Lie) niilpotente. E, à medida que se percebeu poderem ser expressos na linguagem da teoria dos grupos diversos aspectos fundacionais da Física, alguns físicos, notadamente Eugen Wigner, advogaram essencialmente a extensão à física do programa de Erlangen. [HOWE 1983:600]

No artigo seminal, intitulado *Causality implies the Lorentz group*, Erik Christopher ZEEMAN considerou o espaço $\mathbb{R}^{1+3}$ de Minkowski, isto é, o espaço $\mathbb{R}^4$ dotado da forma quadrática $q(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2$ e instituiu nesse espaço uma ordem pela condição de que o vetor x preceda o vetor z, quando o vetor z - x for temporal, isto é, $x < z \Leftrightarrow q(z - x) > 0$. Em seguida, Zeeman definiu como automorfismo causal uma qualquer permutação f que preservasse a relação de ordem instituída e cuja inversa f^{-1} também gozasse dessa propriedade. Finalmente, Zeeman propôs o estudo das propriedades do espaço de Minkowski que fossem invariantes sob a ação do grupo gerado pelos automorfismos causais.

Parece oportuno referir que, no excelente texto *Galois theory*, Ian STEWART (p. 80-81) supõe a evolução processando-se da frente para trás, ao situar a obra de Évariste Galois no âmbito do programa de Erlangen. Com efeito, fora exatamente Galois quem inaugurara a prática de se estudarem os elementos de um certo objeto através do grupo dos automorfismos desse objeto que fixam os elementos de um certo subobjeto. Assim, não é impróprio reconhecer a obra de Galois como a principal fonte de inspiração de Klein, por intermédio de Gaston Darboux, com quem Klein mantivera conversações vivazes em Paris, em 1870. [ROWE 1990:386-387; YAGLOM 1988:22-24]

Outra influência significativa sobre Klein haveria sido Möbius. [MUMFORD et alii 2002:xi, 1-3, 71] Talvez se possa afirmar que Klein soube conjugar, na sua descrição do

que fosse geometria, o estudo das simetrias (em uma acepção bastante ampla) com uma ideia de Möbius (de acrescentar outros *movimentos* aos movimentos rígidos considerados tradicionalmente na geometria do plano). E que Klein obteve essa conjugação, recorrendo às noções de grupo de transformações e de grupos de automorfismos, herdadas de Galois por intermédio de Darboux.

5.5 Segundo exemplo: O anel dos números inteiros

Descrever-se-á, nesse segundo exemplo, como o conceito do **número zero** e a noção de **números negativos** foram definidos satisfatoriamente, extinguindo-se todos os questionamentos anteriormente aduzidos.

Os pensadores gregos do período clássico distinguiam entre a unidade ou a mônade (*monás*) e o número (*arithmós*), considerado uma reunião de mónades. Assim pôde afirmar Aristóteles de Estagiros que "dois é o menor número, na acepção estrita do vocábulo número" [apud BOYER 1943:326].

Isso não significa que não se conhecesse o zero como cifra, isto é, como símbolo usado na representação de números mediante o sistema posicional. De fato, por volta de 2.100 a.C., os caldeus já adotavam o sistema de representação posicional com base sexagesimal [STRUIK 1987:26]. Ora, o uso de sistemas de representação posicional sugere a criação de um símbolo que denote posições vazias. Porém, usando-se base sexagesimal, se torna menos frequente que na base decimal a ocorrência de posições vazias, fato esse que pode haver retardado o surgimento da cifra zero [BOYER 1943:324]. A adoção de um símbolo especial para indicar posições vazias parece haver ocorrido durante o domínio persa. Ainda assim, tal símbolo não era usado, quando a posição vazia figurava no lugar correspondente aos múltiplos da unidade [EVES 1997:36].

A opinião de que apenas fosse primitivo o conceito de número natural dominou a escola pitagórica, que buscava explicar todos os fenômenos mediante relações entre números (naturais). Ironicamente, no âmbito dessa mesma escola, se descobriram o famoso teorema de Pitágoras e um corolário desse teorema, segundo o qual são incomensuráveis o lado e a diagonal de um quadrado. Esse fato convenceu os matemáticos gregos de que a geometria deveria ser instituída independentemente da aritmética, tendência já dominante na época de Platão (como o testemunham alguns de seus diálogos). [RUSSELL 1972:35-36]

Informa DIEUDONNÉ [1990:55] que Platão desprezava os calculadores, classe de pessoas que atendiam às exigências quotidianas de computação, por eles operarem com frações, ao passo que o matemático apenas trataria "das propriedades dos números inteiros".

Tal censura torna-se inteiramente injustificada, mesmo da perspectiva descrita por Platão no seu 'mito da caverna', pois **frações distintas mas equivalentes seriam as 'sombras' dos números racionais que elas representam**.

Embora a noção de zero como representante do vazio ou como ponto de acumulação da família de frações da forma 1/n (na qual n é um número natural) possa indicar que o conceito de zero fosse contemporâneo com a noção de zero como cifra, a primeira referência explícita a**o conceito** de zero ocorreu na *Física* de Aristóteles [BOYER 1943:325].

Contudo, a primeira referência explícita a**o caráter aritmético** do zero aparece na obra do indiano Varahamihira (em torno de 505), que o reconhece como elemento neutro da adição. Cerca de um século depois, Brahmagupta (também indiano), descreve a propriedade de absorção do zero [BOYER 1943:328].

Ainda no início do século XIX, a natureza do zero ainda não era quesito pacífico. RADU [2000:21] refere que Bernhard Bolzano, nos seus 'escritos matemáticos e filosóficos' [*Mathematische und philosophische Schriften*, 1810-1816], excluiu o zero do domínio dos números naturais e considerou que tanto o zero quanto os números negativos e os números irracionais fossem extensões *impróprias* do conceito de número natural.

Encontramos em um estudo de Justus Grassmann, *Sobre o conceito e a extensão da aritmética pura* [*Über Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre*, 1827], uma discussão acurada da unidade e do zero. Esse estudo é considerado especialmente importante, por "fornecer um quadro do questionamento com os fundamentos da matemática durante o primeiro terço do século XIX" e também é relevante pelo papel que as ideias nele expostas desempenhariam na *Ausdehnungslehre* (1844) de Hermann Grassmann. [RADU 2000:5]

Justus Grassmann distinguiu entre dois aspectos do conceito de número, o genético e o formal. O aspecto genético reflete o modo pelo qual emergiu na cultura humana o conceito de número, derivado de nossa representação [*Vorstellung*] da pluralidade. Sob esse aspecto, a unidade e o zero não seriam números, em concordância com a concepção de Aristóteles. A esse aspecto genético, Justus Grassmann opôs o aspecto formal, manifesto na analogia de que, assim como podemos operar 2 + 3 (obtendo 5), também assim podemos operar 1 + 1 (obtendo 2) e 1 + 0 (obtendo 1). Em um certo sentido, podemos perceber nesse argumento uma vaga ideia da noção de *lei de composição interna*. RADU descreve esse aspecto mediante a locução 'the concept of number *per se*', que verti por 'aspecto formal', recorrendo à nomenclatura empregada por OTTE [1989:7].

Mais lento foi o reconhecimento dos ***números negativos***. A prática da operação com números inteiros **negativos** remonta, pelo menos, à resolução de equações polinomiais do segundo grau pelo astrônomo indiano Bhaskara (século XII). STRUIK [1987:66] informa

que Bhaskara encontrou as duas raízes (50 e -5) da equação $x^2 - 45x = 250$, mostrando-se um pouco céptico acerca da validade da raiz negativa.

No século XVI, Hieronimo Cardano considerava os números negativos como fictícios [STRUIK 1987:85]. E, no século XVII, John Wallis indagava: "Como pode uma grandeza ser menor que nada?" [KLEINER 1994:964]

No já citado estudo *Sobre o conceito e a extensão da aritmética pura* (1827), Justus Grassmann defendeu que, por sua natureza, para se construírem **os números negativos**, seria forçoso transpor a fronteira da aritmética, já que a eles não se poderia atribuir nenhum valor independente. (9) [*Apud* RADU 2000:25]

Na *Notícia sobre o recente progresso e o estado presente de certos ramos da análise* [*Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis*, 1833], George Peacock recorreu à distinção entre a álgebra numérica e a álgebra simbólica, a fim de refutar o uso do termo 'generalizar' para descrever o procedimento que conduz a**os números negativos**: "As operações na álgebra numérica podem ser definidas anteriormente, enquanto na álgebra simbólica, embora ostentem o mesmo nome, não o podem. Todavia, quando se conhece a natureza dos símbolos, seu significado pode ser, geralmente, interpretado mas isso não é de modo algum necessário. Portanto, o procedimento mediante o qual passamos de uma à outra ciência não é uma subida de particulares a gerais (o que propriamente é denominado generalização), mas é um movimento essencialmente arbitrário, embora restrito a uma concepção específica de suas operações, podendo seus resultados admitir as interpretações que tornem suas aplicações mais amplamente úteis." (10) [*Apud* RICHARDS 1980:347]

No '*Ensaio preliminar e elementar acerca da álgebra como ciência do tempo puro*' (1837), Rowan Hamilton exprimiu seu escopo de "fundar a análise em um conjunto de axiomas baseados na intuição e de atribuir aos **números negativos** e aos números imaginários uma interpretação e um significado claros". (11) [MATHEWS 1978:187-188]

E, ainda, em 1853, na "*prefação a uma lição sobre os quaterniões*" [*preface to a lecture on quaternions*], Hamilton referiu "a dificuldade que tantos pensadores têm sentido na doutrina algébrica das quantidades negativas e imaginárias". (12) [*Apud* O'NEILL 1986:360]

Hermann Hankel, na *Teoria dos sistemas complexos de números* [*Theorie der complexen Zahlensysteme*, 1867], ainda manifesta inquietação para com o conceito de números negativos. [HARTIMO 2007:285-286]

Ainda em 1885, escrevia Hermann SCHUBERT, em seu *Sistema da Aritmética e da Álgebra como Manual para o Ensino em Escolas Superiores* [*System der Arithmetik und Algebra als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen*], que "a − b, no caso de ser a < b, é uma simples reunião de três símbolos". (13) [*Apud* KRONECKER 1891:253]

As dúvidas perante o conceito de números negativos exigiram que essa noção fosse definitivamente esclarecida. Pode haver sido Karl Weierstrass quem, no curso de suas lições (não publicadas), concebeu a ideia de fornecer um modelo dos números inteiros mediante classes de pares de números naturais [BOURBAKI 1960:37].

Foram considerações de ordem didática que levaram Richard Dedekind a tratar dos fundamentos da aritmética, consoante ele informa no início do ensaio sobre a continuidade [*Stetigkeit und irrationale Zahlen*]. No exercício do magistério na Escola Politécnica de Zurique (em 1858), quando discutia, entre outros temas, a convergência de sequências crescentes e majoradas superiormente, tinha de recorrer "à evidência geométrica". Embora considerasse que, "em uma primeira apresentação do cálculo diferencial, o recurso à intuição geométrica fosse extraordinariamente útil ou, mesmo, indispensável, do ponto de vista didático", reconhecia não ser satisfatório. E "o sentimento de insatisfação era tão preponderante", que ele decidira "continuar meditando a esse respeito, até que encontrasse uma fundação puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da análise infinitesimal".

A Dedekind devemos a construção corrente dos anel dos números inteiros. [PASTOR *et alii* 1958:30-37;, BETH 1955:10-12].

Causa surpresa que historiadores recentes tenham sugerido diferentemente. Por exemplo, Jerold Mathews afirma "não ser inteiramente claro o que Dedekind tinha em mente em 1872, quando discutia o número α definido por um corte (A,B) no corpo dos números racionais [...] pois enquanto Dedekind começou com o corpo dos racionais, Hamilton começou com conjuntos, funções e axiomas, tentando construir os inteiros, os racionais e os reais [...]". (14) [MATHEWS 1978:187]

De fato, no ensaio de 1872, Dedekind declarou textualmente supor já construída a aritmética dos números racionais [1963:3]. Mas, no escrito de 1893 (cuja primeira edição data de 1887), Dedekind elaborou a teoria dos números naturais, recorrendo somente à noção de conjunto, e afirmou que essa teoria poderia ser compreendida por qualquer pessoa dotada do que se denomina usualmente *bom senso comum*.

Dedekind considerava "o conceito de número inteiramente independente das noções ou intuições de espaço e tempo" e respondia à pergunta acerca da sua natureza [*was sind und was sollen die Zahlen*], afirmando que "os números são criações livres da mente humana". [DEDEKIND 1893:31]

Curiosamente, esse último asserto não parece compatível com o seu apotegma, 'Deus sempre aritmetiza', que emulava com o famoso aforismo de Platão. [DEDEKIND 1963:34].

No ensaio em que tratou dos números naturais [DEDEKIND 1893:35], Dedekind anunciou que, ulteriormente, apresentaria as extensões do conceito de número "em forma sistemática". Não chegou a fazê-lo mas, em seu *Nachlasz*, sob o título 'acerca do conceito de número' [*zum Zahlbegriff*], encontram-se diversos apontamentos, nos quais esse autor discute 'a extensão do conceito de número com base na sequência dos números naturais' [*die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Grund der Reihe der natürlichen Zahlen*] e 'a introdução do zero e dos números negativos' [*Einführung der Null und der negativen ganzen Zahlen*]. Pensa-se que esses apontamentos foram compostos no interstício de 1888 a 1895 [GANA 1986:257].

A exposição deste exemplo é baseada nas ideias de Dedekind. Incumbe declarar que enquanto seus antecessores indagavam acerca da existência e do significado do zero e dos números negativos, o método de Dedekind permite definir todos esses conceitos, desde que se aceitem a existência do sistema dos números naturais e a teoria ingênua dos conjuntos, então incipiente.

É possível encontrar-se um elo entre a ideia de Dedekind, que agora será descrita, com a concepção de *álgebra como a ciência do tempo puro* [*On algebra as the science of pure time*, 1837], defendida por Rowan Hamilton. De fato, Hamilton considerava intuitivamente claras as noções de **coincidência**, **precedência** e **sucessão** de momentos, as quais ele representava por B - A e as quais poderiam assumir o valor nulo (no caso de coincidência), um valor positivo (no caso de B suceder a A) e um valor negativo (no caso de B preceder A). A fórmula D - C = B - A indicaria a "exata identidade entre duas relações ordinais de momentos" e atenderia a todas as propriedades do anel dos números inteiros [cf. KOETSIER 1995-598].

A fim de expor a concepção de Dedekind, consideremos o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do sistema dos números naturais por si mesmo e definamos a equivalência entre dois pares de números naturais (a_1, a_2) e (c_1, c_2) pela condição de que $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$, se e somente se $a_1 + c_2 = c_1 + a_2$.

As propriedades aritméticas do sistema $\mathbb{N}$ implicam que a relação assim definida é uma equivalência no produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Designemos por $\mathbb{P}$ o conjunto quociente do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por essa equivalência.

A fim de dotar o conjunto quociente $\mathbb{P}$ de estrutura de anel, instituímos dois lemas (cujas provas são imediatas) que justificarão as definições que serão propostas.

Lema da adição:

Se $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$ e se $(b_1, b_2) \equiv (d_1, d_2)$, então $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \equiv (c_1 + d_1, c_2 + d_2)$.

Lema da multiplicação:

Se $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$ e se $(b_1, b_2) \equiv (d_1, d_2)$, então $(a_1.b_1 + a_2.b_2, a_1.b_2 + a_2.b_1) \equiv (c_1.d_1 + c_2.d_2, c_1.d_2 + c_2.d_1)$.

Em seguida, introduzimos, no quociente do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela citada equivalência, duas leis de composição (a adição e a multiplicação de classes de números naturais), mediante as definições seguintes, nas quais cada classe é representada por um par qualquer de seus elementos (o que se justifica pelos dois lemas anteriores):

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1.b_1 + a_2.b_2, a_1.b_2 + a_2.b_1)$

Verifica-se, em seguida, que a classe que contém o par (1, 1) é o elemento neutro da adição e, por isso, será denominada **zero**. Verifica-se também que a classe que contém o par (2, 1) é o elemento neutro da multiplicação e, por isso, será denominada **a unidade**. Verifica-se finalmente que o oposto aditivo da classe (a_1, a_2) é a classe (a_2, a_1). Consoante a notação usual, $-(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$.

Recorrendo às definições propostas, demonstram-se as propriedades dessas duas leis composição, que conferem a esse conjunto quociente **a estrutura de domínio de integridade**.

A fim de dotar esse anel de uma relação de ordem, apresentamos um terceiro lema e uma definição.

Lema do ordenamento:

Se $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$ e se $(b_1, b_2) \equiv (d_1, d_2)$, então $a_1 + b_2 < a_2 + b_1 \Leftrightarrow c_1 + d_2 < c_2 + d_1$.

Prova: Suponhamos que seja $a_1 + b_2 < a_2 + b_1$. Somando $c_2 + d_2$ a ambos os membros, obtemos $a_1 + b_2 + c_2 + d_2 < a_2 + b_1 + c_2 + d_2$. Substituindo, no primeiro membro, a soma $a_1 + c_2$ por $a_2 + c_1$ e, no segundo membro, a soma $b_1 + d_2$ por $b_2 + d_1$, obtemos $a_2 + b_2 + c_1 + d_2 < a_2 + b_2 + c_2 + d_1$. Finalmente, eliminando as parcelas comuns, obtemos $c_1 + d_2 < c_2 + d_1$. Dualmente, obtemos a outra implicação.

Esse lema permite-nos propor a conceituação seguinte.

Definição:

Diremos que o número inteiro representado por (a_1, a_2) é menor (estritamente) que o número inteiro representado por (b_1, b_2), se e somente se $a_1 + b_2 < b_1 + a_2$.

A esse domínio de integridade chamamos **anel dos números inteiros**. Desde o início da publicação dos *Éléments de Mathématique* de Nicolas Bourbaki (cujo primeiro fascículo veio a lume em 1939), disseminou-se o hábito de representar esse anel por $\mathbb{Z}$.

O quesito da existência dos números negativos, que, como vimos, incomodou diversos espíritos, se dissolve completamente mediante o lema e a definição seguintes.

Lema: Se $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$, então $a_1 < a_2 \Leftrightarrow c_1 < c_2$.

Demonstração: De fato, dizer que $a_1 < a_2$ equivale a afirmar que existe um número natural h tal, que $a_2 = a_1 + h$. Ora, decorre da hipótese que $a_1 + c_2 = c_1 + a_2$. Logo, ou $a_1 + c_2 = c_1 + a_1 + h$. Eliminando a parcela comum, obtemos $c_2 = c_1 + h$, que é equivalente a $c_1 < c_2$. Dualmente, obtemos a outra implicação.

Esse lema permite-nos propor a conceituação seguinte.

Definição: Diremos que é **positivo** o número inteiro representado por (a_1, a_2), se for $a_1 > a_2$. Diremos que é **negativo** o número inteiro representado por (a_1, a_2), se for $a_1 < a_2$.

Recorrendo a esses conceitos, demonstra-se a propriedade, que foi, também por muito tempo, considerada misteriosa e da qual foram propostas as mais engenhosas demonstraçoes, de que seja positivo o produto de dois inteiros negativos.

De fato, se forem negativos os inteiros (a_1, a_2) e (c_1, c_2), então (por definição), vigerão as desigualdades $a_1 < a_2$ e $c_1 < c_2$. Ora, essas desigualdades entre números naturais são equivalentes à existência dos números naturais h e k tais que $a_2 = h + a_1$ e $c_2 = k + c_1$. Logo, $a_1.c_1 + a_2.c_2 = a_1.c_1 + h.k + h.c_1 + k.a_1 + a_1.c_1$. Por outro lado, $a_1.c_2 + a_2.c_1 = a_1.k + a_1.c_1 + a_1.c_1 + h.c_1$. Logo, $a_1.c_1 + a_2.c_2 > a_1.c_2 + a_2.c_1$, o que mostra ser positivo o produto $(a_1, a_2).(c_1, c_2)$.

Note-se que também decorre dessas definições serem os números negativos (estritamente) menores que zero e o números positivos (estritamente) maiores que zero.

Das definições dadas resultam a monotonia da adição e a monotonia da multiplicação de números inteiros:

De $A < C$ decorre que $A + B < C + B$, para todo inteiro B.

De A < C decorre que A . B < C . B, para todo inteiro *positivo* B.

Do exame desse episódio podemos concluir que a teoria dos números inteiros, iniciada por Hermann Grassmann (no *Lehrbuch der Arithmetik*, 1861) e concluída satisfatoriamente por Richard Dedekind (no Nachlasz, *circa* 1888-1895) foi elaborada, a fim de legitimar procedimentos que, havia séculos, se impuseram empiricamente.

5.6 A ampliação do conceito de função

Paralelamente à evolução do conceito *geométrico* e, depois, *analítico* de função, descrita em duas seções do capítulo segundo (*a emergência do conceito de função* e *novamente o conceito de função*) e em uma seção do capítulo terceiro (*a gênese do culto do rigor*); e paralelamente à evolução do conceito de funções contínuas, comentada no capítulo quarto (*a intuição e a aritmetização da análise*), foram estudados outros fenômenos que, ulteriormente, seriam assimilados à ideia de função e cuja consideração foi decisiva na invenção de diversas teorias.

Refiro-me, em primeiro lugar, às permutações, consideradas no âmbito de conjuntos *finitos*. Lagrange recorreu a elas, para examinar o comportamento das raízes de polinômios. [GUÉRINDON & DIEUDONNÉ 1978:72]

Também Paolo Ruffini trabalhou nessa *teoria das substituições*, como era então chamada, definindo o produto de duas permutações. [BOURBAKI 1960:73]

Mas a *teoria dos grupos de substituições* foi essencialmente criada por Évariste Galois (1831), que lhe definiu os conceitos fundamentais, reconheceu a noção central de *isomorfismo* entre grupos (transformações que preservam a lei de composição do grupo) e definiu a noção de *subgrupos distinguidos* (ou normais, como preferimos dizer hoje em dia) como os *subgrupos invariante sob a ação de todos os automorfismos* do grupo vertente. [Cf. BOURBAKI 1960:74]

A noção de isomorfismo entre grupos equivale, na teoria dos grupos à noção de isomorfismo, na teoria dos espaços vetoriais (referida no último parágrafo da seção *Novamente o conceito de função*, do capítulo primeiro). A percepção desse tipo de correspondências entre estruturas seria decisiva à instituição do pensamento estrutural (que será comentada no capitulo nono).

Além disso, Galois inaugurou o pensamento functorial (*avant la lettre*), estudando a correspondência entre os subgrupos de um certo grupo e os subcorpos de um certo corpo.

E, perseguindo essa via, Sophus Lie iniciou o estudo da correspondência entre grupos de transformações contínuas e os grupos dos "elementos infinitesimais" desses grupos. Na verdade, Lie não considerou propriamente grupos mas certas vizinhanças da transformação *unidade*, aos quais, hoje, chamamos *grupúsculos* de Lie mas esse fato não enfraquece meu argumento. Por sua vez, os "grupos de elementos infinitesimais" são denominados álgebras de Lie, desde uma palestra dada em Princeton (1934-1935) por Hermann Weyl, acolhendo sugestão de Nathan Jacobson. Essas álgebras são espaços vetoriais dotados de uma forma bilinear *não associativa*, denominada *comutador* ou *colchete de Lie*. Essa forma bilinear é anticomutativa (ac = - ca) e satisfaz à identidade de Jacobi: (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0. [POSTNIKOV 1985:55]

O fenômeno surpreendente descoberto por Lie foi que cada grupo desse tipo é quase completamente determinado pela álgebra que lhe é associada. E os objetos que efetuam a transição entre os grupos e as álgebras correspondente são grupos de um parâmetro. Assim como um grupo (abstrato) é um sistema coerente de grupos cíclicos, também assim um grupo de Lie é um sistema coerente de grupos de um parâmetro. [HOWE 1983:601]

Assim, às transformações consideradas em geometria (comentadas na seção dedicada ao *primeiro exemplo*) reuniram-se transformações entre objetos concretos ou abstratos (no caso das permutações) e correspondências entre objetos algébricos) nos casos dos estudos de Galois e de Lie. Todas essas transformações se consideram, presentemente, como *funções* (ou *aplicações*) em uma acepção geral.

Surgiram outros exemplos desse tipo de correspondências. Talvez a mais antiga seja *a característica de Euler*, nascida da percepção de que se podiam classificar os polígonos pelo número de lados (pois tal número coincide com o número de vértices) mas que, no caso de poliedros, o número de faces é insuficiente a uma classificação adequada. [LAKATOS 1976B:6]

Euler comunicou (em 1752) que, designando-se por V o número de vértices de um poliedro regular, por A o número de suas arestas e por F o número de suas faces, vigora a relação V - A + F = 2. [EVES 1997:124]

Posteriormente, se percebeu a adequação em se associar o número V - A + F a outros poliedros e a superfícies fechadas, conexas e trianguláveis. Uma superfície é dita triangulável, quando é deformável em um poliedro convexo. Dito de outro modo, uma superfície triangulável admite uma decomposição em polígonos (aglutinados pelos lados, que se convertem em arestas do poliedro, de modo que os vértices dos polígonos se transformem nos vértices do poliedro). Assim, uma esfera pode ser facilmente deformável em um tetraedro (que é um poliedro cujas faces são triangulares). [ZEEMAN s/d:7-8]

Às vezes, é mais fácil deformarmos a superfície em um poliedro convexo de composição arbitrária e, depois, decompormos as faces desse poliedro em triângulos, acrescentando um vértice ao interior de cada face. Note-se que esse procedimento acrescenta a cada face um vértice e um número igual de arestas e faces.

Por exemplo, um toro pode ser facilmente deformado em um poliedro (não convexo) com doze vértices, vinte e quatro arestas e doze faces (das quais três são retângulos "grandes", três são retângulos "pequenos" e seis são trapézios). Também pode ser deformado em um poliedro (não convexo) com nove vértices, dezoito arestas e nove faces (das quais três são retangulares e seis são trapezoidais).

Dada uma superfície S fechada, conexa e triangulável, definimos sua *característica* (de Euler) pela fórmula $\chi(S) = V - A + F$, na qual as letras designam, respectivamente, os números de vértices, de arestas e de faces correspondentes a uma triangulação. Foi verificado que esse número independe da triangulação efetuada e que caracteriza a superfície vertente. [ZEEMAN s/d:30]

A característica de Euler constitui um invariante útil na distinção entre superfícies. Ela permite, por exemplo, distinguir homotopicamente uma esfera de um toro. Duas superfícies que apresentam a mesma característica de Euler são *homotopicamente* equivalentes. Witold Hurewicz introduzira a noção de *equivalência homotópica* (em 1935), dizendo que uma função contínua f do espaço topológico M no espaço topológico N constitui uma equivalência homotópica, se existir uma função contínua $g:N \rightarrow M$ tal, que gf seja a identidade em M e fg seja a identidade em N. E dois espaços serão homotopicamente equivalentes, se existir uma equivalência homotópica entre eles. [DIEUDONNÉ 1989:323]

Mas a característica de Euler não permite distinguir homotopicamente S^1 e S^3, pois ambas apresentam característica de Euler nula. Esse fato sugere a introdução de outros invariantes mais poderosos, dentre os quais os números de Betti associados a uma superfície.

Esses e outros invariantes são estudados no âmbito da topologia algébrica, disciplina que nasceu da impossibilidade de se classificarem todos os espaços topológicos, com apoio exclusivo no conceito de homeomorfismo. (Tal classificação constituíra a primeira ambição, quando se definiu claramente o conceito de homeomorfismo entre espaços topológicos.) Cedo se percebeu que esses invariantes não se restringiriam a números (como a característica de Euler e os números de Betti) mas poderiam ser grupos (como os grupos de homologia e os grupos de homotopia) ou anéis. [DIEUDONNÉ 1989:3]

De fato, uma teoria homológica constitui um método de se "associar a cada espaço topológico de uma certa categoria uma série de grupos (ou, mais geralmente, de módulos), chamados grupos de homologia desse espaço", de tal modo que espaços homeomorfos apresentem grupos de homologia isomorfos. [LIMA 2009:i]

Devo referir, também, que se associam polinômios a nós, como o polinômio de Alexander, introduzido por James Alexander (em 1928) e o polinômio de Jones, desvelado por Vaughan Jones (em 1984). (Jones seria agraciado com a medalha Fields, em 1990.)

Esse polinômio, que se prestou como critério de distinção entre certos nós até então indistinguíveis, estava sendo procurado há seis décadas. Jones, estudando um tema delicado de análise em dimensão infinita, tentava classificar os subfatores de um dado fator e verificou que o índice do subfator ou assumía valores discretos ou possuía um espectro contínuo e, no decurso da demonstração, aparecia um grupo conhecido pelo nome de *grupo das tranças*. Desde então, sempre que fazia uma conferência, ele apresentava esse grupo das tranças. Repetindo esse procedimento em Nova Iorque, foi advertido pela topóloga Joan Birman de que o resultado por ele obtido constituía um novo invariante para a teoria dos nós. [CHANGEUX & CONNES 1989:75-76]

Finalmente, no âmbito da redução das ideias matemáticas a noções conjuntuais, as leis de composição (internas e externas) são concebidas como funções definidas em produtos cartesianos de estruturas.

E também se tornou frequente associar um objeto estrutural a outro (que pode ter a mesma natureza do primeiro). Um dos exemplos mais conhecidos dessa prática consiste na associação a cada espaço vetorial do seu espaço dual, constituído das formas lineares definidas no espaço vertente.

Foi meu intuito, nessa breve seção, mostrar que a noção original de função (correspondência entre números associados a grandezas geométricas, como comprimento e ângulo) evolveu até a noção de *functores*, definidos em uma categoria topológica com valores em uma categoria algébrica.

5.7 Conclusão

Nesse capítulo, foi iniciada a descrição do tecido conceitual da matemática. Outros aspectos desse tecido serão descritos nos dois capítulos seguintes.

5.8 Fontes

(1) *In brief, a philosophy of Mathematics is not convincing unless it is founded on an examination of Mathematics itself.* [MAC LANE 1986:1]

(2) [...] *wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Masznahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Masznahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet ist. In der Tat, der Erfolg ist notwendig; er ist auch hier die höchste Instanz, der sich jedermann beugt.* [HILBERT 1926:163]

(3) *La définition doit convenir à tout le défini et au seul défini.* [JOLIVET 1941:72]

(4) *To every set A and to every condition S(x) there corresponds a set B whose elements are exactly those elements x of A for which S(x) holds.* [HALMOS 1974:6]

(5) *Two sets are equal if and only if they have the same elements.* [HALMOS 1974:2]

(6) *Auch das Wort 'Gleichheit' sollte man nicht mehr gebrauchen, wenn von einer vollkommen Gleichheit nicht mehr die Rede ist — alsdann ist das wundervolle Wort 'Äquivalenz' am Platze.* [KRONECKER 1891:231]

(7) *Wir gehen von einer Transformationsgruppe* Γ *aus. Sie beschreibt sozusagen, bis zu welchem Grade unser Punktfeld homogen ist. Ist die Gruppe einal gegeben, so wissen wir, was Gleicheit oder Ähnlichkeit bedeutet, nämlich: zwei Figuren sind ähnlich (oder gleich oder äquivalent), die durch eine Transformation von* Γ *auseinander hervorgehen; ferner, unter welchen Bedingungen eine Relation objektiv ist, nämlich dann, wenn sie gegenüber allen Transformationen von* Γ *invariant ist.* [WEYL 2000:99]

(8) *Den Inbegriff aller dieser Transformationen bezeichnen wir als die* Hauptgruppe *räumlicher Änderungen;* geometrische Eigenschaften werden durch dir Transformationen der Hauptgruppe nich geändert. *Auch umgekehrt kann man sagen:* Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit genenüber den Transformationen der Hauptgruppe charakterisiert. [KLEIN 1872:463]

(9) [...] *es ist aber das Wesen der negativen Zahl, dasz bei ihrer Bildung diese Grenze überschritten werden musz; eben darum gehört sie nicht mehr in die reine Zahlenlehre, da ihr kein selbständiger Wert beigelegt werden kann.* [Justus GRASSMANN, *apud* RADU 2000:25]

(10) *The operations in arithmetical algebra can be previously defined, whilst those in symbolical algebra, though bearing the same name, cannot: their meaning, however, when the nature of the symbols is known, can be generally, but by no means necessarily interpreted. The process therefore, by which we pass from one science to the other is not an ascent from particulars to generals, which is properly called generalisation, but one which is essentially arbitrary, though restricted with a specific view to its operations and their results admitting of such interpretations as may make its applications most generally useful.* [PEACOCK, *apud* RICHARDS 1980:347]

(11) *Hamilton's expressed purpose of founding analysis upon an intuitively based set of axioms and to give to negatives and imaginaries a clear interpretation and meaning was to be achieved through a construction of the real numbers.* [MATHEWS 1978:187-188]

(12) [...] *the difficulties which so many have felt in the doctrine of Negative and Imaginary Quantities in Algebra*]. [Hamilton, *apud* O'NEILL 1986:360]

(13) *So betont, z. B. Schubert in seinem System der Arithmetik und Algebra ausdrücklich, dasz* $a - b$ *für den Fall* $a < b$ *eine blosze Vereinigung dreier Seichen ist.* [KRONECKER 1891:253]

(14) *If it is not altogether apparent what Dedekind had in mind in 1872 when discussed the number* α *by a cut (A,B) in the rationals* [...]. *For while Dedekind began with the rational field, Hamilton began with sets, functions, and axioms and attempted to construct the integers, the rationals, and the reals, together with defining the arithmetic operations and proving their properties.* [MATHEWS 1978:187]

Capítulo sexto

Da analogia na extensão de conceitos

"Um matemático pode encontrar analogias entre teoremas; um bom matemático pode ver analogias entre provas de teoremas; um matemático ótimo nota analogias entre teorias. E um matemático excelente percebe analogias entre analogias." (1) Aforismo atribuído a Stefan Banach.

"Todos os matemáticos sabem que nada é mais fecundo que essas analogias obscuras, esses reflexos turvos de uma teoria em outra, essas carícias furtivas, essas discórdias inexplicáveis. Também nada concede mais prazer ao pesquisador. Chega um dia em que se dissipa a ilusão; em que o pressentimento se converte em certeza; em que, antes de desaparecerem, as teorias gêmeas revelam sua fonte comum; em que, como ensina o *Gitah*, se atingem simultaneamente o conhecimento e a indiferença. A metafísica transformou-se em matemática, pronta para formar a matéria de um tratado cuja fria beleza já não é capaz de nos comover." (2) André Weil

Sumário

6.1 Antelóquio

6.2 Episódio associado à extensão da noção de congruência

6.3 Episódio associado à criação dos quaterniões

6.4 Episódio associado à divisibilidade em domínios de integridade

6.5 Episódio associado à construção do corpo de frações de um domínio de integridade

6.6 Episódio associado à construção do domínio dos inteiros (a simetrização de uma lei de composição interna)

6.7 Da extensão de conceitos por oposição

6.8 Conclusão

6.1 Antelóquio

No curso deste escrito, o termo 'analogia' será usado para designar um tipo de semelhança, percebida pela intuição, entre objetos distintos.

Um estudo, ainda que superficial, da matemática aponta pronunciada analogia entre diversos conceitos. Examine-se, por exemplo, a decomposição de um número complexo na parte real e na parte imaginária, que se exprime como $\omega = (1/2)(\omega + \varpi) + (1/2)(\omega - \varpi)$. Esse tipo de decomposição, que pode ser nomeada **decomposição cartesiana**, ocorre também nas situações seguintes. [HALMOS 1978:138]

(a) Sejam V o espaço das funções definidas em um intervalo simétrico J e f uma tal função. É imediato que, $\forall x \in J$, $f(x) = (1/2)\{f(x) + f(-x)\} + (1/2)\{f(x) - f(-x)\}$. Também é imediato que o segundo membro dessa igualdade consiste na soma de uma função par e uma função ímpar, o que nos leva a afirmar que toda função definida em um intervalo simétrico se decompões na sua parte par e na sua parte ímpar. Conclui-se que o espaço V é **a soma direta de dois subespaços**: o subespaço das funções pares e o subespaço das funções ímpares.

(b) Sejam n um número natural, V o espaço das matrizes quadradas de ordem n, com termos reais, e M uma tal matriz. É imediato que $M = (1/2)(M + M^*) + (1/2)(M - M^*)$, onde M^* denota a transporta da matriz M. Também é imediato que o segundo membro dessa igualdade consiste na soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. Conclui-se que o espaço V é **a soma direta de dois subespaços**: o subespaço das matrizes simétricas e o subespaço das matrizes anti-simétricas. (No caso de serem complexos os termos da matrizes consideradas, concluiríamos que o espaço V seria a soma direta de dois subespaços: o subespaço das matrizes hermitianas e o subespaço das matrizes anti-hermitianas. Esse asserto também se pode estender ao espaço das matrizes quadradas, de ordem n, sobre um qualquer corpo dotado de um automorfismo involutivo.)

(c) Sejam ainda n um número natural, V o espaço das matrizes quadradas de ordem n, com termos em um domínio de integridade, e M e N duas tais matrizes. É imediato que $MN = (1/2)(MN + NM) + (1/2)(MN - NM)$. Também é imediato que o segundo membro dessa igualdade consiste na soma de uma parcela que não varia, quando M e N são permutados, e uma parcela que troca de sinal, quando M e N são permutados. Às vezes, à primeira parcela chamamos **produto interior** das matrizes M e N e à segunda parcela chamamos **produto exterior** dessas matrizes. [CASANOVA 1976:9-10]

Já foi indicada a notável analogia entre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e a álgebra dos operadores lineares de um espaço hermitiano $\mathbb{V}$. (Chamamos espaço hermitiano a um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ que seja dotado de um produto interno.) [BUENO 2006:152]

Desse ponto de vista, aos operadores **unitários**, caracterizados pela condição $T^* = T^{-1}$, corresponde o toro $\mathbb{S}^1$, caracterizado pela condição $|z| = 1$; aos operadores **autoadjuntos** (nesse caso, denominados hermitianos), caracterizados pela condição $T^* = T$, corresponde o eixo real; aos operadores **antiautoadjuntos** (nesse caso, denominados anti-hermitianos), caracterizados pela condição $T^* = -T$, corresponde o eixo imaginário. Aliás HALMOS [1978:137], acentuando que tanto o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos quanto a álgebra dos operadores lineares de um espaço dotado de produto interno são dotados de um antiautomorfismo involutivo, usa essa analogia, para definir os três tipos egrégios de operadores lineares nesses espaços.

Também o estudo da evolução da matemática revela que diversas noções são concebidas por analogia com outras anteriormente estudadas em contextos especiais. Pretendendo confirmar esse asserto, descreverei inicialmente diversos episódios conceituais da matemática. Instituirei a oposição entre **episódios conceituais** (nos quais a força propulsora é a formulação de conceitos) e **episódios comprobativos** (nos quais a força propulsora é a verificação ou a falsificação de uma conjectura). Não pretende essa distinção sugerir que, no curso de um episódio comprobativo não se formulem novos conceitos mas acentuar que, nos episódios comprobativos, não foi a formulação de conceitos que animou o labor dos perquisidores. Já nos episódios conceituais, o motor principal da atividade investigativa é a curiosidade acerca dos vínculos entre certos objetos e as propriedades de que eles gozam.

Um exemplo elucidativo da episódio comprobativo nos é fornecido pela gênese das funções fuchsianas. Após haver demonstrado a existência de uma classe de funções (a que chamou *fuchsianas*), Henri Poincaré desejou representá-las pelo quociente de duas séries: "Essa ideia foi perfeitamente consciente e refletida. **Guiava-me a analogia com as funções elípticas**. Eu me perguntava, se existissem essas séries, quais deveriam ser as suas propriedades e cheguei, sem dificuldade, a formar as séries a que chamei *teta-fuchsianas*." (3) (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Poincaré também descreve um caso de analogia conceitual: "Na teoria dos grupos de Lie, somos guiados por uma analogia especial: uma transformação finita é o seguimento da combinação de uma infinidade de transformações infinitesimais. O caso mais simples é o caso no qual essas transformações infinitesimais se reduzem a uma multiplicação por $1+\varepsilon$, sendo ε muito pequeno. A repetição dessas transformações produz então a função exponencial; foi assim que Neper chegou a ela. Sabemos que a função exponencial pode ser representada por uma série muito simples e muito convergente; e **a analogia pode então mostrar-nos o caminho por seguir**." (4) (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

6.2 Episódio associado à extensão da noção de congruência

Uma extensão significativa do conceito de congruência segundo o módulo m, que fora introduzido por Gauss no anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, nos parágrafos iniciais de suas *Disquisitiones arithmeticae* (1801), ocorreu, quando Augustin Cauchy considerou um polinômio como módulo de congruências no anel de polinômios $\mathbb{R}[x]$.

Por volta de 1847, Cauchy tomou $m(x) = x^2 + 1$, definiu dois polinômios p e q congruentes, segundo o módulo m, quando p - q fosse divisível por m e descobriu que o quociente do anel de polinômios $\mathbb{R}[x]$ por essa congruência era um corpo isomorfo ao corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. [QUEYSANNE & DELACHET 1955:31-32]

Leopold Kronecker, em 1882, retomou essa ideia e percebeu a **analogia** entre os procedimentos adotados por Gauss e Cauchy. De fato, assim como no caso estudado por Gauss, o quociente de $\mathbb{Z}$ por uma congruência seria um corpo, quando um número primo fosse tomado como módulo, também assim, no caso do anel de polinômios $\mathbb{R}[x]$, a propriedade decisiva do polinômio $x^2 + 1$ era sua irredutibilidade. Como $\mathbb{R}[x]$ é domínio de fatoração única, todo polinômio irredutível é primo. Assim, Kronecker foi levado a considerar a congruência, segundo um elemento primo, definida em qualquer domínio de integridade e verificou que o quociente também é um domínio de integridade. [WEYL 1995 456:457]

Na verdade, Kronecker foi muito mais adiante. Mostrou que a teoria dos números algébricos é independente tanto de uma teoria dos números reais quanto do denominado teorema fundamental da álgebra, em cuja verificação existe um aspecto (*analítico* ou *topológico*) estranho à álgebra. Kronecker promoveu assim a algebrização de toda a teoria dos números algébricos, mostrando que todo corpo de números algébricos que fosse extensão finita do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais se poderia descrever (na linguagem hodierna) como o quociente de $\mathbb{Q}[x]$ pelo ideal primo gerado por um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$. [BOURBAKI 1960:108]

E Heinrich Weber (em 1886) estendeu esse procedimento às extensões finitas de qualquer corpo K, inclusive aos corpos finitos: "Weber indica, em particular, que se pode tomar por corpo K um corpo $\mathbb{Z}/(p)$ (para p primo), incluindo assim na teoria dos corpos o cálculo das congruências segundo o módulo p. Esse cálculo nascera na segunda metade do século XVIII, na obra de Euler, Lagrange, Legendre e Gauss, e sempre se observou **a analogia** que ele apresentava com a teoria das equações algébricas. Desenvolvendo **essa analogia**, Galois (no curso de investigações acerca da teoria dos grupos) não hesitou em introduzir 'raízes ideais' de uma congruência irredutível segundo o módulo p e em lhes indicar as principais propriedades." [BOURBAKI 1960:108] (5) (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Aponta SINACEUR [1984:271] que "a teoria dos corpos de funções algébricas se constituiu mediante **analogias diversas e maravilhosas** com a teoria dos números

algébricos a qual, por sua vez, estende a aritmética clássica dos inteiros racionais. Essa filiação, indicada explicitamente por Hilbert na prefação de sua *Teoria dos corpos algébricos* (1897), permite assim que a aritmética conquiste vastos domínios da álgebra e da teoria das funções. Essa conquista não ocorrera antes, porque a aritmética apenas havia atingido sua maturidade plena através da composição recente da teoria dos corpos quadráticos que trouxe um desenvolvimento seguro e contínuo a questões nas quais, ainda que se tratasse de um gênio da envergadura de Gauss, os progressos se operavam por saltos súbitos e irregulares. Porém, depois que Kronecker, Dedekind e Weber mostraram que às funções algébricas racionais se podem aplicar as mesmas noções concebidas no domínio dos números algébricos racionais, tornou-se legítimo importar sistematicamente à álgebra as questões e os métodos da aritmética." (6) (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Presentemente, a técnica de passagem ao quociente de um anel por um ideal primo constitui uma ferramenta habitual ou, mesmo, quotidiana dos matemáticos. Note-se que o conceito de congruência segundo um ideal é mais ampla que a noção inicialmente concebida, quando se considerava um número inteiro como módulo de congruência. Com efeito, no domínio $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, todos os ideais são principais (isto é, podem ser gerados por apenas um elemento), propriedade que apenas vigora em uma classe restrita de anéis.

Note-se que o procedimento adotado, em linhas gerais, por Évariste Galois, por Kronecker e por Weber se inscreve em um movimento intelectual mais amplo, descrito como **'algebrização' da análise**. Podemos dizer que, até então, polinômios (em uma indeterminada) eram encarados como funções de uma variável que percorria continuamente o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou, mesmo, o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

6.3 Episódio associado à criação dos quaterniões

> "Mas os números imaginários, os números transfinitos e muitos outros entes matemáticos são criações puras do espírito humano. São justificadas pelo fato de que permitiram resolverem-se mais facilmente problemas que os matemáticos e os físicos propuseram a si mesmos e dilucidarem-se os impedimentos encontrados." [BOREL 1962:24] (7)

Os números complexos, representados na forma a + bi desde Leonhard Euler, eram usados correntemente, desde o descobrimento do método de resolução das equações de terceiro grau e a discussão desse método por Rafael Bombelli (1572). [EVES 1997:308, 473; QUEYSANNE & DELACHET 1955:12-13]

Por envolverem raízes quadradas de números negativos, provocaram frequentes dissensos. Gottfried Leibniz considerara a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$) como 'um monstro do mundo ideal' e 'um anfíbio entre o ser e o não-ser'. [*Apud* OTTE 2003:189]

Segundo CROWE, "entre 1543 e a terceira década do século XIX, a injúria constituiu a maior parte da reação da comunidade matemática às raízes quadradas de quantidades negativas. Termos tais quais 'sofístico' (Cardan), 'disparate' (Napier), 'inexplicável' (Girard), 'imaginário' (Descartes) e 'incompreensível' (Huygens) lembram-nos do tipo de acolhimento dispensado a essas novas entidades". (8)

O próprio Euler esclareceu "que as raízes quadradas de números negativos não são nem maiores nem menores que o zero. Tampouco são nulas, pois o produto de zero por zero também é zero e não um número negativo. Então, porque todos os números possíveis que se podem imaginar ou são maiores que zero, ou menores que zero ou o próprio zero, é claro que as raízes quadradas de números negativos nem mesmo se podem incluir entre os números possíveis. Logo devemos dizer que tais raízes quadradas são números impossíveis. E essa situação nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua natureza, são impossíveis e, habitualmente, são denominados números imaginários ou presumidos, pois existem apenas na imaginação". (9)

Explica CROWE que "por mais de um século, os matemáticos aceitaram os números imaginários sem uma justificação formal, por que eles se revelaram úteis, preservando o teorema fundamental da álgebra e permitindo a solução de vários problemas científicos". (10)

Finalmente, os números complexos receberam interpretação geométrica por Caspar Wessel (1797), Jean Argand (1806), John Warren (1828) e por Carl Gauss (1831). [O'NEILL 1986:354; PARSHALL 1985:227]

Gauss iniciou a *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda* (1831), admitindo que "àqueles menos habituados à sua natureza, as quantidades imaginárias podem parecer escandalosas e inaturais e podem conduzir a uma atitude, em matemática, que se afasta completamente da intuição. Nada seria mais infundado que essa visão." Afirmou Gauss que ocorre o contrário disso: "A aritmética dos números complexos é capaz de visualização concreta. [...] Assim como os números inteiros absolutos são representados por uma sequência de pontos distribuídos, a distâncias iguais, ao longo de uma reta [...] também assim a representação dos números complexos requer que se acrescentem estar essa reta situada em um plano ilimitado e haver, nesse plano, um número ilimitado de retas perpendiculares à reta inicialmente considerada e situadas a distâncias iguais cada uma das adjacentes. [...] Desse modo, a verdadeira metafísica dos números imaginários é posta sob uma nova luz." [*Apud* OTTE 2003:189]

Segundo essa interpretação, a multiplicação pelo imaginário **i** corresponde à rotação de ângulo reto, orientada positivamente, em torno da origem do situante. [NEILL 1986:354]

Em 1837, Rowan Hamilton conceituou os números complexos como pares de números ordenados. [NEILL 1986:358-359]

Em linguagem hodierna, podemos descrever a concepção por Hamilton dos números complexos, dizendo que ele definiu, no produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, as duas seguintes leis de composição. Na verdade, em consonância com sua concepção de que a álgebra seria a ciência do tempo puro, Hamilton definira os números complexos mediante pares de momentos no tempo. [KOETSIER 1995:605]

Adição: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Multiplicação: $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1.b_1 - a_2.b_2, a_1.b_2 + a_2.b_1)$

Designemos por $\mathbb{C}$ o terno constituído do citado produto cartesiano e dessas duas leis de composição. É fácil verificar que $\mathbb{C}$ apresenta estrutura de corpo.

Note-se que, que na formulação proposta por Hamilton, a unidade imaginária **i** é o par (0,1), cujo quadrado, consoante a definição dada, é o par (-1,0).

Buscou, então, Hamilton, **em analogia com** o corpo $\mathbb{C}$, construir um sistema de números hipercomplexos que desempenhassem, no espaço $\mathbb{R}^3$, o mesmo papel que os números complexos desempenhavam no espaço $\mathbb{R}^2$. **Em analogia com** os números complexos, Hamilton escreveu os hipercomplexos como ternos a + bi + cj, supondo que 1, i e j fossem mutuamente ortogonais. Notemos que, nesse passo, Hamilton buscou objetos que fossem análogos aos números complexos tanto no significado geométrico quanto na forma. [van der WAERDEN 1976:228]

Informa PARSHALL que Hamilton estaria motivado, pela leitura de ensaios do filósofo Samuel Coleridge. "Com fervor quase pitagórico, Coleridge acreditava na supremacia do número três e, assim, visava elaborar uma filosofia perfeitamente tricotômica. Hamilton e diversos amigos e correspondentes labutavam por entender o sentido e o significado das opiniões de Coleridge. No caso de Hamilton, a procura de ternos algébricos tornou-se a busca por uma ulterior tricotomia no mundo." (11)

Porém assim se exprimiu Hamilton: "Por ser $\sqrt{-1}$ uma reta perpendicular à reta 1, em um certo sentido bem conhecido, pareceu natural que devesse existir alguma outra unidade imaginária que exprimisse uma reta perpendicular tanto a 1 quanto a $\sqrt{-1}$. E por conduzir a -1 a rotação repetida de 1 a $\sqrt{-1}$, essa nova unidade imaginária também deveria ser raiz quadrada de -1, sem porém se confundir com a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. Representando por i essa velha unidade imaginária (como se faz comumente na Alemanha) e por j a nova, investiguei a lei que deve reger a multiplicação dos ternos a + ib + jc e x + iy + jz." (12)

Enfrentou Hamilton, contudo, grave dificuldade, quando tentou conceituar a multiplicação de dois ternos de números reais. Nessas tentativas, Hamilton exigiu que tal multiplicação atendesse a dois requisitos:

O primeiro era a distributividade da multiplicação relativa à adição, isto é, $(a + ib + jc).(x + iy + jz) = a.(x + iy + jz) + ib.(x + iy + jz) + jc.(x + iy + jz) = ax + i(ay + bx) + j(az + cx) + bzij + cyji + byi^2 + czj^2$.

O segundo era uma propriedade de que goza a multiplicação dos números complexos, à qual Hamilton chamou 'lei dos módulos': O comprimento do produto de dois números complexos é igual ao produto dos comprimentos dos fatores, que se pode representar pela identidade $(ax - bz)^2 + (az + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + z^2)$, já conhecida de Leonhard Euler. [van der WAERDEN 1976:233]

No curso dessas tentativas, Hamilton considerava que, **em analogia com** o quadrado de **i**, também deveria ser $j^2 = -1$. Após exaustiva experimentação, nas quais considerou as três alternativas $ij = 1$, $ij = -1$ e, por desespero, $ij = 0$, Hamilton se convenceu de que seria impossível atender aos requisitos impostos.

De fato, em 1898, Adolf Hurwitz provaria que somente se pode atender a esses requisitos, usando-se listas de um, dois, quatro ou oito termos. Mas em sua *Théorie des Nombres* (1808), Adrien Legendre já tinha provado que, para qualquer escolha de (u,v,w), $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \neq (u^2 + v^2 + w^2)$. Legendre argumentou, mostrando que se tomarmos $a = b = c = 1$ e $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$, o produto que figura no membro esquerdo é $3(21) = 63$, que não se escreve como a soma de três quadrados. [van der WAERDEN 1976:234]

Ocorreu então a solução. Hamilton percebeu (em outubro de 1843) que, em vez de operar com ternos de números reais, deveria considerar quaternos de números reais. Isso o levou a introduzir uma terceira unidade imaginária, que denotou por k, e a operar com os quaternos $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$. Além disso, a fim de preservar a associatividade da multiplicação, Hamilton teve que se resignar a definir uma multiplicação não comutativa ou, melhor, **anticomutativa**, na acepção de que as unidades imaginárias se multiplicariam consoante as igualdades $i.j = k = -j.i$, $j.k = i = -k.j$, $k.i = j = -i.k$. [van der WAERDEN 1976:230-231]

A audácia de Hamilton em abandonar a comutatividade da multiplicação foi comparada por Henri Poincaré à negação por Nikolai Lobachevski do quinto postulado de Euclides: "Eis aí na aritmética uma revolução inteiramente semelhante à revolução feita por Lobachevski na geometria." (13)

Contudo, olhando **em retrospectiva**, a não comutatividade dessa multiplicação hoje parece natural. Com efeito, se à multiplicação por números complexos de norma 1 correspondem rotações em um plano, podemos supor que à multiplicação pelo análogo, no

espaço $\mathbb{R}^3$, de um número complexo de norma 1 correspondam rotações. Mas a composição de rotações não goza de comutatividade. [BOURBAKI 1960:85]

Admitindo a associatividade da multiplicação, Hamilton pôde escrever que $k^2 = k.k = (i.j).(i.j) = i.(j.i).j = -i.(i.j).j = -(i.i).(j.j) = -(-1)(-1) = -1$. Portanto, $i.j.k = j.k.i = k.i.j = -1$. Desde então, chamamos **quaterniões** aos quaternos de números reais, dotados dessa multiplicação (e, obviamente, da adição).

Significativamente, Hamilton afirmou que teria considerado todo o seu empreendimento como um fracasso, não houvesse sido preservada a 'lei dos módulos'. [van der WAERDEN 1976:231]

A narrativa desse episódio é especialmente elucidativa, por acentuar que o emprego da analogia na pesquisa matemática não se reduz à mera reprodução de conceitos anteriormente formulados mas exige a percepção das propriedades que deverão ser preservadas, quando se pretende sejam estendidos teoremas obtidos em contextos especiais. No exemplo vertente, Hamilton abdicou da comutatividade da multiplicação. Aliás, a abdicação de uma propriedade na extensão de um conceito já ocorrera, quando se admitira a legitimidade do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos que, segundo a interpretação geométrica aceita, correspondem aos pontos de um plano. Assim, o corpo *ordenado* $\mathbb{R}$ dos números reais foi estendido a um corpo *não ordenado*.

A preservação de propriedades no curso de extensão de conceitos constituiu um dos modos evolutivos do conhecimento matemático.

Notemos outros aspectos da analogia entre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e o anel de divisão $\mathbb{H}$ dos quaterniões.

Do mesmo modo que um número complexo se escreve como um par de números **reais** $(a + bi)$, também assim um quaternião se escreve como um par de números **complexos** $z + jw$, vigorando a anticomutatividade na multiplicação das unidades i e j: $ji = -ij$.

Do mesmo modo que no grupo dos automorfismos de $\mathbb{C}$ figura uma transformação própria, a conjugação, que a cada número complexo $a + bi$ associa o seu conjugado $a - bi$, também assim no grupo dos automorfismos de H figura uma transformação própria, a conjugação, que a cada quaternião $z + jw$ associa o seu conjugado, obtido conjugando-se o número complexo z e trocando-se por - o sinal + que figura antes da parcela jw. [GILMORE 2005:4]

Do mesmo modo que todo número complexo não nulo admite inverso, também assim todo quaternião não nulo admite inverso. A adição e a multiplicação dos quaterniões gozam das mesmas propriedades que vigoram no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, salvo da comutatividade da multiplicação. Uma tal estrutura é denominada anel de divisão. Note-se que ainda na quarta década do século XX, não se exigia dos corpos a comutatividade da multiplicação. Usavam-se, então, as locuções corpo **comutativo** dos números complexos e

corpo **não comutativo** dos quaterniões. Assim, pôde escrever BOURBAKI [1960:85] que o anel dos quaterniões foi o "*premier exemple d'un corps non commutatif*".

Dois meses após haver recebido uma carta de Hamilton, que lhe narrava a invenção desse sistema hipercomplexo, John Graves elaborou sua primeira extensão, os octônios, que são oitavas de números reais. Considerou, para isso, sete unidades "imaginárias", de 'i' até 'o', sujeitas às condições $i^2 = j^2 = k^2 = L^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1$ e às expressões de cada uma delas como o produto de outras duas distintas. Embora nesse novo sistema ainda vigore a 'lei dos módulos', ocorre colapso da associatividade da multiplicação, conforme Hamilton apontou a Graves (em carta de julho de 1844). Os octônios foram redescobertos por Arthur Cayley (em 1845). [van der WAERDEN 1976:233; BOURBAKI 1960:85]

Posteriormente, o próprio Hamilton teve a ideia **analógica** de considerar um sistema de quaternos de números complexos, dotado da mesma tábua multiplicativa que o sistema dos quaterniões, a cujos elementos chamou **biquaterniões**. Logo percebeu que nessa extensão ocorria um novo fenômeno, a existência de elementos não nulos cujo produto é nulo (que foram, posteriormente, denominados **divisores de zero**). [BOURBAKI 1960:120; GILMORE 2005:17; MILIES 1990:16]

Nesse ínterim, Cayley havia elaborado a noção abstrata de grupo, em um ensaio de 1854, *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta = 1$: "Um grupo é um conjunto de símbolos 1, α, β, ..., todos distintos, dos quais o produto de dois quaisquer (em qualquer ordem) ou mesmo o produto de um qualquer por si mesmo, pertence ao conjunto." (14)

Depois de fornecer alguns exemplos, Cayley observou que qualquer grupo finito (nessa acepção abstrata que ele introduziu) se pode representar por um grupo de permutações. [KLEINER 1986:208]

Também nesse artigo, Cayley apontou que, tomando-se um grupo **finito**, é possível produzir-se um sistema de 'quantidades complexas' $\mathbb{S}$ análogas, sob vários aspectos, aos quaterniões. [HAWKINS 1972:245; MILIES 1990:18]

Para isso, ele introduziu em $\mathbb{S}$ as somas formais $\Sigma a_h u_h$, nas quais a_h são números complexos e $\{u_1, ..., u_n\}$ são os elementos de um grupo G, cuja lei de composição interna será denotada por $\bullet$; em seguida, definiu em $\mathbb{S}$ uma lei de composição externa (tomando $\mathbb{C}$ como domínio de operadores) e duas leis de composição interna, mediante as condições seguintes:

- multiplicação por escalar: $b \,.\, \Sigma a_h u_h = \Sigma(b a_h) u_h$ (sendo $b \in \mathbb{C}$)
- adição: $\Sigma a_h u_h + \Sigma c_h u_h, = \Sigma(a_h + c_h) u_h,$

- multiplicação: $(\Sigma a_h u_h) \bullet (\Sigma c_j u_j) = \Sigma a_h.\{\Sigma\, c_h\, (u_h \bullet u_j)\}$.

A sistemas desse tipo chamamos, hoje, **anel de um grupo** ou **álgebra de um grupo**. [MILIES 1990:18; NAIMARK 1979:100-101]

Cayley considerou como exemplo o anel (com coeficientes no corpo C dos números complexos) do grupo não comutativo de sexta ordem (o grupo das permutações de três objetos, hoje denotado por S_3). [MILIES 1990:19]

Em seguida, no ensaio intitulado *Remarques sur la notation des fonctions algébrique* (1855), Cayley defendeu que a expressão de transformações lineares em três variáveis independentes seria notavelmente simplificada pelo uso da escrita tabular ou, como dizemos hoje, pelo uso da escrita matricial. Nesse artigo, Cayley indicou também como se podem representar tabularmente a inversa de uma transformação linear, mediante os determinantes menores, e a composta de duas transformações lineares. Não obstante, Cayley não pareceu considerar que as matrizes fossem objetos matemáticos, pois não tratou de sua adição nem das propriedades da multiplicação de matrizes, como a associatividade ou a não comutatividade. [PARSHALL 1985:235-236]

Mas em outra memória, essa de 1858, Cayley já descreveu matrizes (de uma mesma ordem) como 'quantidades simples', sujeitas às leis de composição interna usuais, o que lhe permitiria considerar também funções racionais de matrizes. Também deu uma descrição matricial dos quaterniões. Tomando duas matrizes quadradas L e M, de segunda ordem, sujeitas às três condições $LM = -ML$, $L^2 = E$ e $M^2 = E$ (onde E denota a matriz unidade de segunda ordem), Cayley mostrou que, pondo $N = LM$, obtemos um sistema de quantidades complexas que se comporta exatamente como o sistema dos quaterniões. [HAWKINS 1972:245; MILIES 1990:21]

Essa nota de Cayley pode considerar-se o primeiro exemplo de uma representação linear de uma álgebra [Bourbaki 1960:121]. O seu significado parece já haver sido percebido por Charles PEIRCE. [PEIRCE 1881:132, rodapé]

Embora houvesse advertido a analogia entre os sistemas de quantidades complexas e o sistema dos quaterniões, Cayley não esclareceu definitivamente o vínculo entre tais sistemas. [HAWKINS 1972:245]

Esse passo seria dado por Benjamin Peirce que, desde 1848, incluíra os quaterniões em suas preleções em Harvard. [PARSHALL 250-251]

Em sua memória *Linear Associative Algebras*, lida em 1870, em Washington, perante a *National Academy of Science* e logo publicada por litografia. (Esse ensaio, acrescido de notas exaradas por Charles Peirce, seria reeditado em 1881, no *American Journal of Mathematics*.)

Asseverou Benjamin Peirce [1881:98] que "a cada domínio de perquisição física corresponde uma técnica matemática apropriada [...] mas onde ocorre grande diversidade de aparência física, existe frequentemente uma estreita semelhança nos procedimentos

dedutivos, a qual se manifesta, desde que se adotem símbolos adequados. A matemática elaborada através de tais símbolos é denominada álgebra. Assim, álgebra é a matemática formal." (15)

Nesse ensaio de Benjamin Peirce ocorreram, talvez pela primeira vez, as noções de elementos **nihilpotentes** e de elementos **idempotentes**. [PEIRCE 1881:104]

Também nesse ensaio figuraram as definições seguintes: "Chamamos **álgebra linear** a uma álgebra na qual toda expressão é redutível à forma de uma soma algébrica de termos, dos quais cada um consiste em uma única *letra* com um coeficiente quantitativo. [...] Uma álgebra é **completamente simétrica**, se suas unidades independentes puderem ser completamente permutadas, sem que variem as fórmulas de combinação. [...] Uma álgebra na qual a permutação das unidades se efetua segundo um ordenamento progressivo que se replica é nomeada **álgebra cíclica**. Assim, o sistema dos quaterniões é uma algebra cíclica [...]".(16)

No ano seguinte, 1871, Peirce apresentou suas ideias na London Mathematical Society e teve um encontro fecundo com William Clifford que, em 1873, recorreu às ideias de Peirce, para obter uma extensão dos biquaterniões de Hamilton, que seria útil no tratamento de questões geométricas e físicas. Considerou somas da forma $q_1 + q_2a$, na qual q_1 e q_2 são quaterniões e $a^2 = 1$. Tais biquaterniões formam uma álgebra não associativa de dimensão 8 sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, na qual ocorrem divisores de zero. [BOURBAKI 1960:121; MILIES 1990:21-22; PARSHALL 1985:254; STRUIK 1987:175]

Na construção dos biquaterniões mediante quaterniões, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais foi substituído pelo anel de divisão dos quaterniões. Em analogia com essa ideia, podemos fazer a seguinte extensão, na qual o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é substituído por um anel.

Dados um número natural n e um anel **comutativo** A dotado de unidade, denotemos por H o módulo cujos elementos são listas constituídas por n elementos de A, às quais chamaremos números hipercomplexos. Aos termos da lista $(a_1, ..., a_n)$ chamaremos componentes desse número hipercomplexo. Denotemos por e_h o número hipercomplexo cujas componentes sejam nulas, salvo a componente de ordem h, que é igual a 1. Ou, mais condensadamente, $a_i = \delta_i^h$.

Ao referirmos o módulo H, já estamos admitindo uma lei de composição interna (a adição de dois números hipercomplexos) e uma lei de composição externa (a multiplicação de um escalar r de A por um número hipercomplexo q de H). Resta, pois, definirmos a multiplicação de dois números hipercomplexos, supondo a distributividade da multiplicação relativa à adição, isto é, supondo-se que

$$(\Sigma a_h e_h)\bullet(\Sigma c_j e_j) = \Sigma a_h \{\Sigma c_j (e_h \bullet e_j)\}.$$

Decorre dessa expressão que a multiplicação é definida pela atribuição de valores aos n^2 produtos $e_h \bullet e_j$, que são denominados **constantes estruturais**. Dessa escolha decorrerão as outras propriedades estruturais que caracterizarão a álgebra **associativa** obtida. [CHEVALLEY 1956:137-138; KLEINER 1998:20; KOSTRIKIN 1978:406; MALTSEV 1956:376-37]

Nesse contexto, podemos afirmar que a álgebra dos quaterniões "é simplesmente o espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ no qual se introduz uma multiplicação com propriedades interessantes". [LIMA 1998:84]

Impõe-se que tal multiplicação seja distributiva relativamente à adição, que seja associativa e na qual, definidos os vetores e = (1,0,0,0), i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0) e k = (0,0,0,1), vigorem as relações seguintes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \bullet j \bullet k = -1.$$

Impende acentuar que o recurso à analogia não permite prever-se o grau de semelhança entre os novos objetos construídos e os objetos que serviram de modelo. Assim, embora os quaterniões tenham sido definidos por analogia com os números complexos, no anel dos quaterniões não vigora o 'teorema fundamental da álgebra', que rege a teoria dos polinômios com coeficientes complexos. De fato, no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, o polinômio $x^2 + 1$ admite apenas duas raízes. Mas, no anel dos quaterniões, tal fato não se verifica, pois $(-i)^2 = (-j)^2 = (-k)^2 = -1$.

Aliás, no anel das matrizes quadradas de segunda ordem cujos termos sejam **números inteiros**, o polinômio $x^2 - 1$ admite uma infinidade de raízes.

A narrativa dos episódios seguintes permitir-nos-á perceber a diversidade de situações que se podem encontrar no curso da extensão de um conceito.

6.4 Episódio associado à divisibilidade em domínios de integridade

> "Dado um conceito interessante nascido em uma situação particular, é da natureza do matemático tentar remover esse conceito da particularidade de sua origem e empregar as propriedades capitais desse conceito como um recurso para abstraí-lo." (17) [HERSTEIN 1964:275]

Três teoremas são dominantes na descrição da divisibilidade no domínio dos números inteiros: o teorema da divisão, o teorema de Bachet e o teorema da unicidade da fatoração.

O teorema da unicidade da fatoração (ou teorema fundamental da aritmética) consiste em afirmar-se que todo número inteiro positivo se escreve, de modo único, como o produto de potências (naturais) de números primos. Dito de outro modo, dado o inteiro positivo z, existem números primos $p_1, \ldots, p_n$ e números naturais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que $z = p_1^{\lambda 1}. \ldots .p_n^{\lambda n}$ e, se $z = q_1^{\mu 1}. \ldots .q_n^{\mu n}$, então as listas $(q_1, \ldots, q_n)$ e $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ se obtêm, respectivamente, das listas $(p_1, \ldots, p_n)$ e $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mediante a mesma permutação.

Esse teorema, que já figurou no livro IX dos *Elementos* de Euclides de Alexandria, aponta que os números primos "desempenham **um papel análogo** ao dos átomos na estrutura da matéria". [MILIES & COELHO 203:78] (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

O teorema da divisão institui que, dados o inteiro positivo d e o inteiro z, existem os inteiros únicos q e r tais, que $0 \leq r < d$ e $z = dq + r$. (O número q é denominado o quociente de z por d é o número r é nomeado o resto na divisão de z por d.) [BIRKHOFF & MAC LANE 1965:15]

O teorema de Bachet afirma que, dados os inteiros a e c, existem inteiros r e s tais, que $\text{mdc}\{a,c\} = ra + sc$. [ITARD 1973:21]

Gauss iniciou o trabalho antológico *Disquisitiones arithmeticae*, introduzindo a noção de congruência entre dois números inteiros: "Se um número [inteiro positivo] *m* divide a diferença entre os números [inteiros] *b* e *c*, dizemos que *b* e *c* são congruentes segundo o módulo *m*." [GAUSS 1801:7]

Como a congruência entre inteiros é uma equivalência, sua introdução no anel dos números inteiros opera uma classificação exaustiva. É habitual, hoje em dia, denotar por $\mathbb{Z}/(m)$ o correspondente conjunto quociente.

Cabe lembrar que esse procedimento de classificação, iniciado por Gauss, faz com que sejam refletidas em um conjunto finito de representantes, adequadamente escolhidos, algumas propriedades de uma totalidade infinita de elementos. E que o recurso às equivalências constitui, desde então, uma ferramenta que permeia toda a matemática. [BELL 1927:58]

Na seção primeira do citado escrito, Gauss estudou a adição (§ 6, p. 9) e a multiplicação (§ 8, p. 9) de duas classes residuais. (Por brevidade, estou descrevendo o texto de Gauss na linguagem hodierna.) Demonstra-se que, quando o módulo m é um número primo, o conjunto quociente $\mathbb{Z}/(m)$, dotado das duas citadas leis de composição, tem estrutura de corpo.

E, no § 9 (p. 10), Gauss estudou polinômios sobre $\mathbb{Z}/(m)$.

No § 11 (p. 11), Gauss considerou o problema das raízes de polinômios sobre $\mathbb{Z}/(m)$. No caso específico dos polinômios de segundo grau, consideremos o caso em que o módulo m seja um primo ímpar. Nesse caso, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser conduzida

à forma $x^2 - 2rx + q = 0$, na qual $r = -b/(2a)$ e $q = c/a$. Finalmente, representando por z a diferença $x - r$ e por u a diferença $r^2 - q$, obtemos $z^2 = u$ ou, mais precisamente, $z^2 \equiv u \pmod{m}$. [ITARD 1976:70]

GAUSS [§ 95, p. 74] notou que "para qualquer módulo, todos os números [inteiros] podem distribuir-se por duas classes, das quais uma contém os números que são congruentes a algum quadrado e a outra consiste nos números que não gozam dessa propriedade. Aos primeiros chamaremos resíduos quadráticos do número que tomamos como módulo [...]". Assim, dados um número primo ímpar p e um número inteiro ω não divisível por p, diremos que ω é um resíduo quadrático (mod p), se existir um inteiro x tal, que $x^2 \equiv \omega \pmod{p}$. Usando essa nomenclatura, podemos dizer que a pesquisa das raízes de um polinômio de segundo grau sobre $Z/(p)$ pode ser convertida na pesquisa dos resíduos quadráticos segundo p.

Em 1825, Gauss definiu os resíduos biquadráticos. Do mesmo modo, diremos que ω é um resíduo biquadrático (mod p), se existir um inteiro x tal, que $x^4 \equiv \omega \pmod{p}$.

O estudo dos resíduos (quadráticos, cúbicos, biquadráticos etc.) constituiu um centro de interesse na obra aritmética de Gauss. Nesse estudo, é relevante o teorema da reciprocidade quadrática, do qual Gauss apresentou uma prova na seção IV das *Disquisitiones*. [GAUSS 1801:84, § 110]

Leonhard Euler já havia considerado esse teorema na *Opuscula Analytica* (1783) e Adrien-Marie Legendre já o havia formulado no *Essai sur la théorie des nombres* (1785) e lhe propusera uma prova. [ZÚÑIGA 1995:XIX; STRUIK 1987:146] Contudo, essa prova continha uma lacuna, pois ela pressupunha a existência de uma infinidade de primos em uma dada progressão aritmética, fato esse que somente seria verificado por Lejeune Dirichlet em 1837. [SCHWARZ 2001:27]

O citado teorema da reciprocidade quadrática pode enunciar-se assim [HEFEZ 1993:130; KLEINER 1998:24]:

> Dados os números primos positivos distintos p e q, as congruências $x^2 \equiv q \pmod{p}$ e $x^2 \equiv p \pmod{q}$ são ambas resolúveis ou ambas irresolúveis, exceto se for $p \equiv 3 \equiv q \pmod{4}$, caso no qual uma e somente uma das congruências é resolúvel.

Segundo EDWARDS [1983:290], essa proposição "é o teorema que coroa a teoria elementar dos números. Também quase se pode dizer que por esse teorema a teoria elementar dos números deixa de ser elementar. Gauss, que não perdia tempo com trivialidade, esteve fascinado por esse teorema, tão fácil de enunciar e tão difícil de provar, e retornou a ele muitas vezes no curso de seu labor, tendo fornecido dele seis provas distintas". (18)

Por volta de 1830, Carl Jacobi e Eisenstein formularam a lei da reciprocidade cúbica e Gauss a lei da reciprocidade biquadrática. Para isso, Gauss verificara que, em vez

dos inteiros usuais (nomeados inteiros racionais), os números adequados para o estudo desse tema se obtinham do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, impondo-se que fossem inteiros racionais os números *a* e *b* que figuram na fórmula $a + bi$. [BELL 1927:58; KLEINER 1998:25] Gauss conseguiu estender a esses números inteiros complexos o teorema da reciprocidade quadrática (1828) mas não publicou essa extensão que foi redescoberta por Jacobi (1837). Depois, Eisenstein publicaria outras cinco provas. [ZÚÑIGA 1995:XX; ENDLER, 1986:123; QUEYSANNE 1955:38]

Tal sistema, presentemente representado por $\mathbb{Z}[i]$, já fora considerado por Euler e por Joseph-Louis Lagrange. Mas Gauss mostrou que tais números constituiam um subsistema do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, na acepção de que era estável sob adição e multiplicação. Dito de outro modo, Gauss pressentiu a analogia entre o domínio dos inteiros racionais $\mathbb{Z}$ no corpo $\mathbb{R}$ dos números reais e o domínio dos inteiros complexos $\mathbb{Z}[i]$ no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Tal analogia também apresentava um aspecto geométrico: Assim como os elementos de Z correspondem aos pontos de um eixo cartesiano com coordenadas inteiras, também assim os elementos de $\mathbb{Z}[i]$ correspondem aos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros.

Além disso, Gauss mostrou que tais números gozavam de uma propriedade de fatoração única, $z = u.p_1^{\lambda 1}. \ \ldots \ .p_n^{\lambda n}$, sendo u um dos quatro elementos inversíveis nesse anel: 1, -1, i ou -i. [ZÚÑIGA 1995:XIX-XX]

Gauss também considerou polinômios em uma indeterminada com coeficientes racionais, cujo conjunto, presentemente, é representado por $\mathbb{Q}[x]$, e percebeu que eles se comportavam como os números inteiros, no que tange à estabilidade sob adição e multiplicação; e que, além disso, essas leis de composição interna gozavam das propriedades habituais (associatividade, distributividade e comutatividade). Na linguagem hodierna, tais polinômios constituíam um domínio de integridade.

Na verdade, já em 1634, Simon Stevin tivera a ideia de deduzir do teorema da divisão a extensão do algoritmo euclidiano para a busca do maior divisor comum de dois polinômios. {BOURBAKI 1960:116].

E, posteriormente, Bezout estendera aos anéis de polinômios (em uma indeterminada) o teorema de Bachet, hoje denominado teorema de Bézout. [ITARD 1973:21]

Gauss perseguiu consistentemente **a possível analogia** com outras propriedades do anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Ora, na formulação do teorema da divisão, se afirmava a existência de um número não negativo r, conceito esse inexistente tanto em $\mathbb{Z}[i]$ quanto em $\mathbb{Q}[x]$. Para formular as correspondentes extensões conceituais, Gauss recorreu a propriedades desses anéis.

No caso do domínio dos inteiros complexos, estava disponível a função N que tem sido denominada **norma de um número complexo**: $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Assim, ao

teorema da divisão foi atribuído o seguinte enunciado: Dados os inteiros complexos z e d, existem os inteiros complexos q e r tais, que $z = dq + r$, sendo ou $r = 0$ ou $N(r) < N(d)$. [HERSTEIN 1964:111]

No caso do anel dos polinômios em uma indeterminada com coeficientes racionais, estava disponível a função grd que tem sido denominada **grau de um polinômio**: Dado $p(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$, com $c_n \neq 0$, grd (p) = n. E ao teorema da divisão foi atribuído o enunciado anterior, substituindo-se a norma do número complexo pelo grau do polinômio. [HERSTEIN 1964:116]

Esse fato foi estendido, em analogia com os casos conhecidos e, presentemente, dizemos que um domínio de integridade D é euclidiano, se for possível definir, sobre os elementos não nulos desse anel, uma função f, cujos valores são números inteiros não negativos, que atende à condição seguinte: Dados em D um elementos não nulo d e um elemento qualquer z, existem em D os elementos q e t tais, que $z = dq + r$, sendo ou $r = 0$ ou $f(r) < f(d)$. (Não se exige a unicidade dessa função.)

Às vezes, se exige também que essa função f atenda à condição suplementar seguinte: Dados a e x não nulos no domínio D, $f(a) \leq f(ax)$. Foi observado, porém, que, de certo modo, essa exigência é supérflua, pois, supondo-se a existência de uma função f que atenda à condição que figura na definição, podemos definir uma função g que satisfaça também à condição suplementar. De fato, seja $g(a) = \min \{f(ax): x \in D, x \neq 0\}$, isto é, seja g(a) o mínimo dos valores assumidos por f nos elementos não nulos do ideal gerado por a.

No curso do labor com a reciprocidade biquadrática, Gauss provou, com o habitual rigor, que no domínio $\mathbb{Z}[i]$ vigorava o teorema da fatoração única, ensinando assim que **o recurso à analogia** constitui um '*modus inveniendi*' mas nunca um '*modus disserendi*'. [EDWARDS 1975:222]

Constituíram outro defluente da teoria dos domínios de integridade as tentativas de provar-se a conjectura de Fermat, cuja narrativa já foi feita de diversas perspectivas. [EDWARDS 1975:219]

Provar a inexistência de números naturais *a* e *b* que satisfaçam à condição $a^n + b^n = c^n$, onde *c* também é número natural e $n > 2$, constituiu uma tarefa cativante para diversos investigadores, dentre os quais avultou Ernst Kummer, que se dedicou a ele em 1847. Até então, a conjectura havia sido provada para os primos n = 3 (desafio proposto pelo próprio Fermat a seus contemporâneos), para n = 5 (Legendre e Dirichlet, em 1825) e para n = 7 (Gabriel Lamé, em 1839). Talvez Dirichlet também houvesse tentado o caso n = 7 pois, em 1832, forneceu a prova para n = 14. [EDWARDS 1975:220]

Aparentemente, Lamé se tinha inspirado no estudo das denominadas equações diofantinas, isto é, das equações da forma $P(x_1, ..., x_n) = 0$, na qual P é um polinômio com

coeficientes inteiros e das quais se exigem soluções inteiras (às vezes, positivas). [DAVIS et alii 1961:425]

De fato, dado o número primo ímpar p, a resolução da equação $x^2 - z^2 = p$ pode ser reinterpretada como a fatoração em $\mathbb{Z}$ expressa pela equação $(x + z)(x - z) = p$. Como p é primo, um de seus fatores é 1. Pondo $x - z = 1$, obtemos facilmente que $z = (1/2)(p - 1)$ e, logo, $x = (1/2)(p + 1)$, que são números inteiros.

O bom êxito obtido pelo método de fatoração sugere que, **por analogia**, também seja ele empregado em outros casos. Assim, a resolução da equação diofantina $x^2 + z^2 = p$ pode ser reinterpretada como a fatoração em $\mathbb{Z}[i]$ expressa pela equação $(x + zi)(x - zi) = p$.

Além disso, essa **analogia** ainda ocorre no estudo da equação diofantina $x^2 + Az^2 = p$ (na qual também A é inteiro), usando-se a fatoração $(x + z\sqrt{-A})(x - z\sqrt{-A}) = p$, o que nos leva a sistemas constituídos por elementos da forma $x + z\sqrt{-A}$, que se conceituam como uma extensão algébrica $\mathbb{Z}[\sqrt{-A}]$ de $\mathbb{Z}$. Essa via fora inaugurada por Euler, em 1770, que cometera a temeridade de (na linguagem hodierna) considerar que, nesse contexto, todas essas extensões algébricas fossem dotadas apenas de ideais principais. [BOURBAKI 1960:117; GOUVÊA 1988:133]

Em 1 de março daquele ano de 1847, em sessão da *Académie des Sciences*, Lamé anunciou haver encontrado uma prova geral da conjectura de Fermat. Lamé notou que, se u fosse **uma raiz primitiva da unidade**, isto é, se u fosse um número (complexo) que satisfizesse à condição $u^n = 1$ mas que não satisfizesse à condição $u^m = 1$, para $m < n$, então poderíamos efetuar a fatoração $a^n + b^n = (a + b)(a + bu)(a + bu^2) \ldots (a + bu^{n-1})$. Isso decorre da propriedade de que, em domínios de integridade, se $u \neq 1$ mas $u^n = 1$, então $1 + \ldots + u^{n-1} = 0$. Em seguida, Lamé recorria a**o maior divisor comum** M dos fatores que figuram no segundo membro da identidade anterior, pondo $(a + bu^h) = ML_h$. Assim, lhe seria permitido escrever que $c^n = a^n + b^n = (ML_0)\,(ML_1). \ldots .\,(ML_{n-1}) = M^n.L_0.L_1. \ldots .L_{n-1}$. Finalmente, comparando o primeiro membro com o último membro dessa igualdade múltipla, Lamé extraía uma contradição, invocando **o teorema da unicidade da fatoração** (e usando o método do descenso infinito). [EDWARDS 1975:220-221]

Após o pronunciamento de Lamé, Joseph Liouville manifestou aos acadêmicos o receio de que fosse prematuro considerar que a conjectura de Fermat estivesse efetivamente provada, pois até então nada justificava que o teorema da fatoração única fosse válido no contexto vertente (o subanel do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos constituído dos números que se exprimiam como $a + bu$, sendo a e b números racionais e sendo u uma raiz complexa da unidade). Sugere EDWARDS [1975:222] que a precaução de Liouville resultava de sua familiaridade com o citado subanel, por haver vertido ao francês (em 1844) um ensaio de Jacobi (de 1839), no qual esse discípulo de Gauss, estudando extensões do teorema da reciprocidade, trabalhara com números da forma $a_0 + a_1u + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}$ (sendo u uma raiz

complexa, de ordem n, da unidade e sendo a_h um número inteiro racional), que constituem o subanel de C considerado por Lamé.

Em maio daquele mesmo ano de 1847, Kummer escreveu uma carta a Liouville, na qual asseverava que o teorema da fatoração única não se podia estender ao domínio dos **inteiros ciclotômicos**. (O termo 'ciclotômico' alude à divisão do círculo, *ciclotomia*, pelas raízes da unidade. É empregado para designar os números que se exprimem como $c_0 + c_1r + c_2r^2 + ... + c_nr^n$, sendo os coeficientes c_h números inteiros e r uma raiz própria da unidade. Parece haverem sido considerados, primeiramente, por Jacobi, em 1839, ao tentar estender as leis de reciprocidade.) Esse **colapso na analogia** com o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros justificava o cuidado de Gauss no evitar extensões imprudentes (como, antes dele, fizera Euler). [EDWARDS 1975:222]

Paralelamente ao que, segundo LAKATOS [1970:99], ocorre às 'ciências empíricas', na matemática, ocorre um fenômeno a que chamarei **ajuste conceitual**, que admite a descrição seguinte. É comum que, guiado por alguma analogia, um pesquisador tente estender a um contexto mais geral, um teorema que fora demonstrado em um contexto mais restrito. Aliás, é frequente que, quando o teorema vertente foi demonstrado, nem se suspeitasse da existência do contexto geral. Às vezes, a citada extensão não oferece dificuldade. Isso acontece quando, na demonstração que fora originalmente construída, não foram relevantes certas propriedades que caracterizam o contexto restrito. Outras vezes, se verifica que o teorema que é válido no contexto restrito já não o é no contexto mais geral. Então, nesses casos, a fim de se elaborar a teoria mais geral sem se perder a teoria já existente, é habitual o recurso a uma conceituação adequada que faz o papel do '**cinturão protetor**' [*protective belt*] de Lakatos e que preserva tudo quanto fora anteriormente instituído.

Assim, quando se tentou estender a outras classes de números inteiros algumas propriedades do anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros racionais e se verificou que isso nem sempre era possível, conceituaram-se distintamente outros tipos de anéis, de modo que a teoria tivesse preservada a sua harmonia.

Também foram gradualmente modificados alguns conceitos, de modo que pudessem descrever a diversidade das situações distintas que, sucessivamente, foram desveladas.

Assim, dizia-se inicialmente que um número era **primo**, quando somente fosse divisível por si mesmo e pela unidade. Por outro lado, no anel de polinômios $\mathbb{Q}[x]$, um elemento g **não inversível** é definido como **irredutível**, se a igualdade g = hk somente for possível, quando um desses fatores for um elemento inversivel e o outro fator for o produto de g pelo inverso do elemento inversível considerado. [GARCIA & LEQUAIN 2002:35]

Prova-se que todo elemento primo é irredutível mas existem elementos iredutíveis que não são primos, ocorrendo a coincidência dos dois conceitos, apenas em

domínios de fatoração única (isto em em domínios nos quais vigoram a existência e a unicidade da fatoração). [GARCIA & LEQUAIN 2002:60]

Um exemplo, hoje bem conhecido, de domínio de integridade no qual não vigoram a existência e a unicidade da fatoração é $\mathbb{Z}[\sqrt{(-5)}]$, subanel do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos constituído por elementos da forma $a + b\sqrt{(-5)}$. Nesse anel, 21 admite duas fatorações distintas em elementos irredutíveis, 3×7 e $(4 + \sqrt{-5}) \times (4 - \sqrt{-5})$.

EDWARDS [1980:323] aponta que Euler foi o primeiro matemático que tentou estender a outros domínios as técnicas usuais no domínio dos inteiros racionais. Edwards surpreendeu-se por, em sua *Introdução geral à álgebra* [*Vollständige Einleitung zur Algebra*, 1770], Euler haver proposto argumentos falaciosos (amparados na falsa unicidade da fatoração no citado domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{(-5)}]$). A supresa de Edwards é pertinente, pois Euler conhecia o exemplo da fatoração do número 21 (dada no parágrafo anterior) e já Fermat sabia que divisores primos de números da forma $x^2 + 5z^2$ podiam não apresentar essa forma.

Edwards sugere que esse erro houvesse decorrido de Euler, aos sessenta e três anos, já cego, se valer de um serviçal a quem foi ditado o texto da *Introdução geral à álgebra*. De fato, Euler perdera o olho direito há mais de três décadas e, posteriormente, acometido de opacidade do cristalino, já não era capaz de ler com o outro olho. Consoante resposta a uma carta a Lagrange (do mesmo ano de 1770), Euler recorria a um *amigo*, que lia para ele e que "executava os cálculos que sua imaginação projetava". [WEIL 1984:539-540]

Por **analogia** com a propriedade característica dos domínios de integridade (se o produto de dois fatores for nulo, então um desses fatores também será nulo), formulou-se a conceituação dos ideais primos, dizendo-se que um ideal é primo, se a pertinência a esse ideal do produto de dois fatores implicar que um desses fatores também pertence ao ideal. Por sua vez, um elemento primo foi definido como um elemento que gera ideais primos.

Assim, por se conhecerem apenas domínios de fatoração única, inicialmente se confundiam as noções de elemento primo e de elemento irredutível. Nas investigações associadas à tentativa de estender os teoremas da reciprocidade, Kummer encontrou domínios de integridade nos quais havia elementos irredutíveis que não eram primos. As duas decomposições do número 21 no domínio $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, acima, mostram que os fatores são irredutíveis mas não são primos, já que dividem o produto mas não dividem os fatores. [EDWARDS 1980:323]

Também inicialmente se supunha que todos os ideais fossem gerados por um único elemento (o que é verdadeiro em domínios euclidianos). Quando se percebeu a existência de domínios nos quais havia ideais que não eram gerados por apenas um elemento, como o anel de polinômios em duas variáveis $K[x_1, x_2]$ sobre o mesmo corpo K, foi atribuído o qualificativo 'principal' aos ideais gerados por um único elemento.

As investigações posteriores permitiram instituir a seguinte cadeia de inclusões entre alguns tipos de anéis comutativos dotados de unidade: **os corpos** (domínios euclidianos nos quais todos os elementos não nulos são inversíveis), **os domínios euclidianos** (os domínios de ideais principais, nos quais vigora a divisão euclidiana), **os domínios de ideais principais** (os domínios fatoriais nos quais todos os ideais admitem um único gerador), **os domínios fatoriais** (os domínios de integridade nos quais vigora o teorema da fatoração única) e **os domínios de integridade** (os anéis comutativos, dotados de unidade, nos quais é primo o ideal gerado pelo elemento zero).

Em 1844, Kummer fez a primeira observação explícita de que o teorema da existência e da unicidade da fatoração não poderia ser estendido aos domínios dos inteiros ciclotômicos. Isso ocorreu, quando ele considerou números ciclotômicos construídos com raízes de ordem 23 da unidade. [EDWARDS 1980:324]

Ao se lhe deparar a ocorrência de tais domínios de integridade nos quais não vigoravam a existência e a unicidade da fatoração, Kummer (1846) supôs **fatores primos ideais**, deste modo: Se um inteiro ciclotômico admitisse duas decomposições **distintas**, pq = rs, na qual esses fatores não fossem inversíveis mas fossem irredutíveis, Kummer supunha os fatores primos ideais t_1, t_2, t_3 e t_4, que satisfizessem (por exemplo) às igualdades $p = t_1.t_2$, $q = t_3.t_4$, $r = t_4.t_1$ e $s = t_2.t_3$, restaurando a vigência do citado teorema. Assim, a ideia principal de Kummer era decompor um número ciclotômico em fatores primos e, quando tais fatores não existissem, introduzir fatores primos ideais. [EDWARDS 1980:324; GOUVÊA 1988:134]

Como bem observou GOUVÊA [1988:134], tais fatores ideais não existem, pois *p*, *q*, *r* e *s* são supostos irredutíveis. Mas tal suposição é inócua, pois realmente fundamental é saber-se qual potência de um tal fator ideal divide o inteiro ciclotômico pq. Essa ideia foi o germe da teoria da valoração.

Mas o próprio Kummer, no escrito em que formulou a lei da reciprocidade para primos regulares, reconheceu ser impossível, para os elementos de um certo conjunto finito de números primos, definir fatores primos ideais "que merecessem plenamente essa nomeação" [*welche im vollen Sinne diesen Namen verdienen*]. Além disso, já em 1847, Kummer apontara o interesse em estender sua teoria do domínio dos números ciclotômicos para domínios de números complexos da forma $x + z\sqrt{D}$. [EDWARDS 1980:328]

Talvez isso tenha induzido Richard Dedekind e Leopold Kronecker a sugerirem alternativas mais cômodas ao método dos fatores ideais de Kummer. No curso desses estudos, Dedekind e Kronecker propuseram a noção de inteiro em uma extensão algébrica $\mathbb{Q}(\alpha)$ do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais: Um elemento de $\mathbb{Q}(\alpha)$ é um **inteiro**, se for raiz de um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Deplora EDWARDS [1980:332] que "nenhum dos dois tenha dado a razão dessa definição ou explicado como chegou a ela. Por ser essa a ideia crucial da teoria, sua gênese é inacessível." (19)

A primeira versão da teoria dos ideais de Dedekind foi publicada em 1871. Nela o autor fornece a seguinte definição de fatores primos ideais. [EDWARDS 1980:338]

Sejam K um corpo numérico, f um inteiro de K e p um primo em $\mathbb{Z}$. Diremos que (f, p) representa um fator primo ideal de p, se:

(a) f não for congruente com zero (mod p);

(b) Se r e s forem inteiros de K tais, que $rsf \equiv 0 \pmod{p}$, então ou $rf \equiv 0 \pmod{p}$ ou $sf \equiv 0 \pmod{p}$.

Nessa definição transparece claramente **a analogia** com a propriedade absorvente do zero de um anel.

Enquanto a teoria elaborada por Dedekind tinha como principal escopo a decomposição em fatores primos, a teoria construída por Kronecker visava definir os maiores divisores comuns. Nos *Fundamentos de uma teoria aritmética das grandezas algébricas* [*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grösszen*, 1882], Kronecker confessou ter adotado como guia no estudo das grandezas algébricas um princípio de "conservação da *determinação de conceitos* [*Begriffsbestimung*], ao passar do racional ao algébrico". [EDWARDS 1980:332] Em outros termos, Kronecker se deixou orientar, em seu incurso por domínios de números algébricos, **pela analogia** com o domínio $\mathbb{Z}$ dos inteiros racionais. Uma exposição da teoria de de Kronecker na linguagem hodierna encontra-se em EDWARDS [1990].

6.5 Episódio associado à construção do corpo de frações de um domínio de integridade

Já foi descrito (no quinto capítulo) como, definida uma equivalência no produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se puderam instituir duas leis de composição interna no correspondente conjunto quociente, procedimento esse que, praticado **intuitivamente** desde tempos remotos, permitiu o emprego habitual de frações (positivas).

Esse mesmo procedimento pôde ser estendido ao anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, desde que se adotasse uma restrição: Do segundo fator do produto cartesiano deveria ser excluído o elemento zero (que é absorvente segundo a multiplicação). Essa é a construção habitual do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. [BIRKHOFF & MAC LANE 1965:36-39]

Assim, considerando-se, em vez do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, o procedimento descrito se repete *ipsis litteris*, salvo na prova de algumas propriedades, como a seguinte. Suporei que foi instituída a relação $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$, se e somente se $a_1 . c_2 = c_1 . a_2$.

Propriedade: Essa relação é transitiva.

De fato, suponhamos que sejam $(a_1, a_2) \equiv (x_1, x_2)$ e $(x_1, x_2) \equiv (c_1, c_2)$.

Isso significa que $a_1 . x_2 = x_1 . a_2$ e que $x_1 . c_2 = c_1 . x_2$. (A)

Se $x_1 = 0$, então também $a_1 = 0 = c_1$. Logo, $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$.

Senão, multiplicando, membro a membro, as igualdades (A), obtemos que $x_1.x_2.(a_1.c_2 - c_1.a_2) = 0$. Como $x_1.x_2 \neq 0$ (e em $\mathbb{N}$ vigora a propriedade de cancelamento), $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$.

Desde que se iniciaram as operações com polinômios em uma indeterminada, se estendeu **empiricamente** ao domínio de integridade $\mathbb{Q}[x]$ a pratica de operar com frações $p(x)/r(x)$, adotando-se como óbvias as mesmas propriedades operatórias que vigoram no corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, isto é, instituíram-se no produto cartesiano $\mathbb{Q}[x] \times (\mathbb{Q}[x] \setminus \{0\})$ duas leis de composição, por **analogia** com o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

O citado procedimento de imersão também foi praticado, à medida que se descobriam novos espécimes de domínios de integridade, como o anel dos inteiros ciclotômicos. O anel dos inteiros ciclotômicos foi descrito por Ernst Kummer como o sistema composto dos números (complexos) da forma $c_0 + c_1r + c_2r^2 + ... + c_nr^n$, na qual os coeficientes c_h são inteiros e r é uma raiz da unidade, distinta da unidade (isto é, $r \neq 1$ e existe um número natural m tal, que $r^m = 1$). [EDWARDS 1980:331]

Note-se que, da perspectiva estrutural, esse procedimento consiste em imergir um domínio de integridade D em um corpo, denominado o **corpo das frações** de D. (Estou usando o termo 'imersão' para indicar um monomorfismo.)

Por outro lado, dados um corpo qualquer K e um qualquer domínio de integridade D contido em K, podemos construir **o corpo de quocientes** de D, definido por $\{ac^{-1}: a, c \in D, c \neq 0\}$. Tal corpo é canonicamente isomorfo a**o corpo das frações** de D. [ENDLER 1986:6]

Note-se também que, no emprego sucessivo da construção do corpo de frações, apenas se substituiu o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros por outros domínios de integridade arbitrários. Uma extensão significativa desse procedimento ocorreu, quando se percebeu que a essência do método não consistia em excluir o elemento zero do segundo fator mas em dele excluir **o ideal gerado pelo elemento zero**, que é um ideal primo. (Já foi indicado que a definição de ideal primo foi formulada **por analogia** com a propriedade absorvente do número zero.)

Assim, na extensão do procedimento, suporemos que tenham sido dados um domínio de integridade D e um ideal primo P em D. Em seguida, instituiremos, no produto

cartesiano $D \times \{D \setminus P\}$, a relação $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$, se e somente se $a_1 . c_2 = c_1 . a_2$. Mostra-se (formalmente, do mesmo modo que foi feito anteriormente) que tal relação é uma equivalência, introduzem-se leis de composição no conjunto quociente e, finalmente, mostra-se que o quociente também é um domínio de integridade, que podemos denotar por $D_{[P]}$. [ATIYAH & MacDONALD 1969:36-37] Também nesse caso, existe um monomorfismo de D em $D_{[P]}$.

O anel $D_{[P]}$ admite um ideal que apresenta uma propriedade característica. De fato, seja M o conjunto das frações cujo numerador pertence ao ideal P, isto é, seja $M = \{a/c: a \in P, c \notin P\}$. É imediato que M é um ideal de $D_{[P]}$. Além disso, como todo elemento de $D_{[P]} \setminus M$ é inversível, qualquer ideal próprio de $D_{[P]}$ está contido em M. Assim, esses anéis são dotados de um único ideal maximal. Anéis que gozam dessa propriedade são chamados **anéis locais**. [ATIYAH 1969:4; GENTILE 1977:90] É instrutivo notar que o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um anel local cujo (único) ideal maximal é constituído pelo número zero.

O tema dos anéis locais será retomado, a propósito da teoria da valoração, no capítulo oitavo.

A construção indicada admite uma interessante extensão a qualquer anel *comutativo* A dotado de unidade. [HERSTEIN 1964:104; SEEBACH 1970:686]

Para isso diremos que uma parte S de um tal anel constitui um sistema multiplicativo, se ela satisfizer às condições:

(a) S não é vazio.

(b) $0 \notin S$.

(c) $\forall r,t \in S, r.t \in S$.

No produto cartesiano A x S, diremos que os elementos (r,t) e (u,v) são equivalentes, o que denotaremos por $(r,t) \approx (u,v)$, se existir um elemento h em S tal, que $h.(rv - tu) = 0$.

Note-se que essa equivalência é efetivamente uma extensão da equivalência anterior pois, se A for um domínio de integridade (como $0 \notin S$), a condição $h.(rv - tu) = 0$ implicará que $rv = tu$.

Apenas a transitividade exigirá uma demonstração mais cuidadosa. Com efeito, sejam os pares (a,b), (x,z) e (c,d) que satisfazem às condições $(a,b) \approx (x,z)$ e $(x,z) \approx (c,d)$.

Afirmar essas condições equivale a supor a existência dos elementos h e k, que pertencem ambos a S e que satisfazem às condições $h.(az - bx) = 0$ e $k.(xd - zc) = 0$.

Multiplicando a primeira igualdade por kd e a segunda igualdade por bh, obteremos hk.(adz - bxd) = 0 e hk.(bxd - bcz) = 0.

Somando membro a membro, obteremos a condição hkz.(ad - bc) = 0, equivalente a (a,b) ≈ (c,d).

Seja A_S o correspondente conjunto quociente. A instituição de duas leis de composição (a adição e a multiplicação) far-se-á do mesmo modo que no caso do quociente de um domínio de integridade por um ideal primo. E também se mostra que existe um monomorfismo canônico de A em A_S, definido por f(x) = x/t. O qualificativo canônico indica que esse monomorfismo não depende da escolha do elemento t.

6.6 Episódio associado à construção do domínio dos inteiros (a simetrização de uma lei de composição interna)

> "A matemática aparece, cada vez mais, como a ciência que estuda as relações entre certos seres abstratos definidos de modo arbitrário, sujeito à condição única de que essas definições não impliquem contradição. Contudo, a fim de não se confundir a Matemática quer com a Lógica, quer com jogos como o xadrez, convém acrescentar que essas definições arbitrárias foram inicialmente sugeridas por analogia com objeto reais." [BOREL 1962:24] (20) (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

> "Simetrização é o conceito abstrato correlativo à introdução dos números inteiros negativos." [ARTIN 1953:475] (21)

Vimos que o anel dos números inteiros foi descrito por Dedekind mediante a instituição de uma equivalência no sistema dos números naturais. Vejamos como, por analogia com o procedimento adotado na construção do anel dos números inteiros, podemos formular a conceituação seguinte, na qual avultam as propriedades estruturais. Impende acentuar que Dedekind foi um expoente no uso da analogia. Ele próprio declarou, em sua teoria da fatoração ideal dos inteiros algébricos, que seu escopo fora estender ao corpo dos números algébricos os teoremas obtidos por Ernst Kummer no contexto dos inteiros ciclotômicos com expoentes primos. [*Apud* EDWARDS 1980:321]

Chamamos semigrupo a um conjunto não vazio dotado de uma lei de composição interna que goze de associatividade.

Seja S um semigrupo, cuja lei de composição interna denotaremos por $\bullet$. Diremos que um elemento x do semigrupo S é **regular à direita** segundo essa lei de composição, se, $\forall a, c \in S$, $a \bullet x = c \bullet x \Rightarrow a = c$; que é **regular à esquerda** segundo essa lei de composição, se, $\forall a, c \in S$, $x \bullet a = x \bullet c \Rightarrow a = c$. A um elemento que seja simultaneamente regular à direita e à esquerda segundo uma mesma lei de composição chamaremos elemento **regular**. (Se for comutativa a lei de composição considerada, a regularidade à esquerda e a regularidade à direita serão equivalentes.) [QUEYSANNE 1964:97]

Seja S um semigrupo *comutativo* cujos elementos sejam todos regulares. Chamamos simetrização da lei de composição interna desse semigrupo a um procedimento de definição de um grupo abeliano (G, +) que satisfaz às condições seguintes:

(a) S pode ser imerso em G, isto é, existe um homomorfismo **injetivo** h, de S em G. Isso significa que h goza da propriedade de que $h(a \bullet c) = h(a) + h(c)$, $\forall a, c \in S$; e que, se $a \neq c$, então $h(a) \neq h(c)$.

(b) G é minimal, na acepção de que qualquer outro grupo que atende à exigência da alínea anterior admite um subgrupo isomorfo a G. [BOURBAKI 1964:24; QUEYSANNE 1964:111-112]

Tal grupo G pode ser construído do modo seguinte. Definamos, no produto cartesiano $S \times S$, a equivalência: $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$, se e somente se $a_1 \bullet c_2 = c_1 \bullet a_2$. A associatividade e a comutatividade da lei de composição interna de S certificam que a relação assim definida é uma equivalência no produto cartesiano $S \times S$. (A reflexividade e a reciprocidade da relação considerada decorrem da comutatividade da lei de composição. A transitividade da relação decorre também da regularidade de todos os elementos de S segundo a lei considerada e da associatividade dessa lei.) Instituímos, em seguida, o lema seguinte.

Lema: Se $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$ e se $(b_1, b_2) \equiv (d_1, d_2)$, então $(a_1 \bullet b_1, a_2 \bullet b_2) \equiv (c_1 \bullet d_1, c_2 \bullet d_2)$.

Introduzimos, então, no quociente do produto cartesiano S x S pela equivalência considerada, uma lei de composição, a que chamaremos adição, mediante a definição seguinte, na qual cada classe é representada por um par qualquer de seus elementos (o que se justifica pelo lema anterior):

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 \bullet b_1, a_2 \bullet b_2)$$

Verifica-se que essa adição é associativa e comutativa; que o elemento neutro é a classe que contém a diagonal do produto cartesiano S x S; e que todo classe, representada por (a_1, a_2), admite o simétrico (a_2, a_1). Em suma, obtivemos um grupo abeliano, que representaremos por G.

Fixemos um qualquer elemento ω de S e definamos a aplicação $h:S \rightarrow G$ que associa a cada elemento x de S a classe de G que contém $(x \bullet \omega, \omega)$. Verifica-se que essa aplicação é um homomorfismo injetivo de S em G e que G é o menor grupo abeliano no qual S pode ser imerso (a menos de isomorfismo).

Notemos, finalmente, a característica desse método de extensão: Um procedimento, originalmente elaborado em **um contexto concreto** (no sistema dos números naturais) foi replicado em **um contexto abstrato** (em um semigrupo comutativo e regular). No contexto concreto, a atenção era desviada para a natureza do objeto estudado (os números naturais); no contexto abstrato, a atenção é focada nas propriedades estruturais. Segundo CORRY [1993:115], "a plena realização da imagem estrutural da álgebra apareceu impressa primeiramente na *Moderne Algebra* de Van der Waerden. Embora van der Waerden não o dissesse explicitamente, seu livro representou um afastamento patente de qualquer imagem anterior da álgebra; apresentou a álgebra como uma disciplina matemática cujo escopo consiste na definição dos diversos sistemas algébricos e na elucidação de suas respectivas estruturas. Em contraposição, a imagem clássica da álgebra encarava a disciplina comprometida com equações polinomiais e com o problema de sua solubilidade." (22)

6.7 Da extensão de conceitos por oposição —

> "O ser humano, para 'racionalizar', estabelece oposições que, a qualquer momento, lhe parecem pertinentes, mesmo que, mais tarde, no encaminhamento do espírito, ele as mude ou as destrua. É uma verdade psicológica — a qual os teóricos da forma souberam estabelecer — que compreendemos melhor a oposição ou o contraste entre dois conceitos e que entendemos melhor a antinomia entre duas expressões válidas do que compreendemos cada uma das expressões separadamente." [MOLES 1995:114]

Na presente seção, apresento um procedimento distinto da analogia que, às vezes, ocorre paralelamente à analogia.

Há um fato comum na história da cultura, cuja descrição é quase uma platitude: **Somente recorremos a qualificativos para designar determinados objetos**, quando percebemos a existência de outros objetos, da mesma natureza, que não gozam de todas as propriedades até então conhecidas.

Eis três exemplos desse fato, recolhidos em contextos radicalmente diferentes.

Os povos helênicos consideram o seu idioma superior ao dos outros povos, não se interessavam em conhecer outras línguas e chamavam **bárbaros** aos povos que não falavam a língua grega. [VAN HOOF 1962:11-12; MOMIGLIANO 1991:13-15]

Durante a Idade Média, a religião adotada pela maior parte da Europa era o cristianismo. Após o cisma entre os patriarcas de Constantinópole e os de Roma, distinguiram-se o cristianismo do Oriente e o cristianismo do Ocidente. Após o advento de outras formas de cristianismo, decorrente da reforma preconizada por alguns pensadores, como Martinho Lutero e Jean Calvin, e da autonomia reivindicada pela igreja anglicana, a religião professada pelos adeptos do bispo de Roma se denominou catolicismo apostólico romano. [FRIEDELL 1974:passim]

Em 1905, Albert Einstein expôs sua primeira teoria da relatividade. Após cerca de onze anos, esse físico elaborou uma profunda extensão de sua teoria, a qual foi denominada **teoria *geral* da relatividade** [*allgemeines Relativitätstheorie*]. Em oposição a essa teoria geral, a formulação inicial foi designada como **teoria *restrita* da relatividade**. [PAES 1995: passim] (Cabe advertir que é vicioso traduzir como 'a relatividade geral' a locução '*die allgemeine Relativitätstheorie*'. Com efeito, na expressão alemã, o qualificativo '*allgemeine*' predica o nome '*Theorie*' e não o nome '*Relativität*'.)

Tal atribuição de qualificativos também tem ocorrido no âmbito da matemática. No princípio, havia apenas números e era deles que se ocupavam os membros da escola pitagórica. À medida que se foram introduzindo outros tipos de números, os primeiros números conhecidos receberam qualificativos. Em oposição às frações, foram designados por **números inteiros** e, quando os números negativos receberam o foro de cidadania, os antigos números foram denotados como **números inteiros positivos** ou **números naturais**. Como uma teoria acerca das propriedades dos números naturais se constituiu, inicialmente, a aritmética.

Também o conceito de função foi plasmado segundo o modelo polinomial, acrescido "da radiciação ou de qualquer outra operação imaginável". (Esse tema foi discutido na seção sobre a emergência do conceito de função, do capítulo segundo.) E se supunha que toda função fosse contínua, embora nem se soubesse claramente o que eram funções contínuas. Quando se percebeu o comportamento *irregular* de algumas funções, se tentou definir o conceito de continuidade e os qualificativos 'contínuo' e 'descontínuo' foram atribuídos às funções, consoante o seu comportamento.

É pertinente citar a resenha, temporalmente próxima, feita por Henri Poincaré: "Há cem anos, uma tal função teria sido considerada uma ofensa ao senso comum. Dir-se-ia, então, que uma função contínua, por sua própria essência, é susceptível de ser representada por uma curva e, evidentemente, uma curva sempre tem tangente." (23) [POINCARÉ 1898:5]

Esse fenômeno também ocorreu no âmbito do estudo da convergência. Inicialmente, se dizia que a sequência de funções (f_n) convergia à função L, se, $\forall x \in D$, lim

$f_n(x) = L(x)$. Quando se inventou **a convergência uniforme**, se qualificou como **pontual** o antigo conceito de convergência.

Também, até o século XVIII, o termo geometria designava a geometria descrita no *Elementos* de Euclides de Alexandria. Quando se descobriram outros modos de se descrever o espaço, se atribuiu à geometria tradicional o qualificativo de **euclidiana**. Surpreendentemente, desde o segundo século d.C., já se conhecia a geometria sobre a esfera, exposta por Menelaus, na obra *Sphaerica*, na qual se discutiram os triângulos esféricos, tema que não figurou nos *Elementos* de Euclides. Mas a geometria sobre a esfera não foi considerada uma teoria distinta da geometria tradicional, por se supor que a esfera estivesse imersa no espaço de três dimensões. [STRUIK 1987:57]

Esse modo de qualificar os objetos anteriormente conhecidos, por oposição a objetos inventados recentemente, também ocorreu nos casos seguintes.

No estudo das sequências de números racionais, Cauchy percebeu que algumas dentre elas gozavam de uma propriedade muito cômoda, por lhe permitir prever a existência de um limite, ainda que não tivesse a menor ideia de como identificá-lo. Assim, Cauchy chamou tais sequências de **sequências regulares**. Depois essas sequências seriam denominadas fundamentais por Cantor. (Muitos autores contemporâneos as chamam, impropriamente, de sequências de Cauchy, a despeito de que Bolzano já as houvesse definido em 1817.)

No estudo dos espaços vetoriais de dimensão infinita, notou-se que, em alguns deles, se podiam definir **produtos internos** segundo os quais todas as sequências regulares fossem convergentes. Tais espaços (dotados desses produtos internos) foram denominados **espaços de Hilbert**. (E os espaços apenas dotados de produto interno foram denominados **espaços euclidianos**, no caso de o corpo de escalares ser o corpo dos números reais, ou **espaços hermitianos**, no caso de o corpo de escalares ser o corpo dos números complexos.)

Também no estudo dos espaços vetoriais de dimensão infinita, notou-se que, em alguns deles, se podiam definir **normas** segundo as quais todas as sequências regulares fossem convergentes. Tais espaços (dotados dessas normas) foram denominados **espaços de Banach**. (E os espaços apenas dotados de norma foram denominados **espaços normados**.)

Nos estudo dos anéis, o modelo inicial fora o domínio de integridade dos números inteiros. À medida que se percebeu que certas propriedades eram características desse domínio de integridade mas não se verificavam em outros anéis, atribuíram-se qualificativos que instituíssem a oposição entre os diversos tipos. Assim surgiram as noções de **anéis euclidianos** (nos quais vigora o algoritmo da divisão), **anéis principais** (nos quais todo ideal admite um único gerador), **anéis noetherianos** (nos quais todo ideal é gerado finitamente), **anéis fatoriais** (nos quais vale a propriedade da fatoração única) e **anéis de integridade** (nos quais não existem divisores próprios de zero).

Induzido pela consideração dos exemplos citados e de diversos outros casos extraídos de teorias que se conformaram durante partes do século XIX e do século XX, penso poder enunciar uma conjectura acerca de um cânone verificado na evolução de diversas teorias matemáticas, o qual corresponde, nos escritos de Lakatos, à preservação de um núcleo irredutível mediante modificações introduzidas no cinturão protetor.

O descobrimento de *exceções*, no âmbito das teorias matemáticas, em vez de exigir o recurso a **um cinturão protetor**, apenas suscita **ajustes conceituais**. Mais precisamente, quando se detecta, em um dado gênero de objetos, a falência de uma propriedade que se supunha universal (isto é, válida para todos os elementos desse gênero), define-se uma espécie ou um subtipo do mesmo gênero caracterizado pela vigência da citada propriedade.

6.8 Conclusão

Para concluir o presente capítulo, impende-me acentuar que as extensões conceituais não se operam, necessariamente, de uma única forma, pois analogias distintas podem sugerir extensões discrepantes.

Um exemplo recente desse fato nos é fornecido pelas investigações conduzidas por Abraham Ungar, desde 1988. Ungar ficara fascinado pela analogia entre o grupo de Lorentz $\mathbf{O}(1,1)$, associado ao espaço de Minkowski $\mathbf{R}^{1+1}$, e o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos e se convencera de que seriam as propriedades do grupo de Lorentz, em dimensões superiores, que deveriam ditar o modo adequado de se estender o citado corpo $\mathbf{C}$. Perseguindo essa via (discordante do percurso seguido por William Hamilton, na invenção dos quaterniões), Ungar procurou as propriedades estruturais que regulassem o grupo de Lorentz em espaços de dimensões maiores e percebeu que surgia na cena uma outra figura dramática que ele reconheria como *a precessão de Thomas*, fenômeno que rege a adição de velocidades paralelas na teoria restrita da relatividade. [UNGAR 2002:403]

Orientado por essa percepção, UNGAR reinterpretou a ação do grupo de Möbius no disco aberto $\mathbf{D}^1 = \{z \in C: |z| < 1\}$ e notou a possibilidade de definir uma lei de composição interna (representada por $\oplus$) que apresenta certa simetria, se lhe for acrescentada uma operação, a que ele chamou giração (de Thomas), definida em $\mathbf{D}^1$ por gyr $(x,z) = \dfrac{1+x\bar{z}}{1+\bar{x}z}$. Desse modo, pondo $x \oplus z = \dfrac{x+z}{1+\bar{x}z}$, obteve que $z \oplus x = \mathrm{gyr}(z,x).\{x \oplus z\}$.

[KINYON & UNGAR 2000:273-274]

Note-se que as transformações de Möbius que levam o disco aberto $\mathbf{D}^1$ sobre si mesmo são descritas exatamente por $h(z) = (az + b)/(cz + d)$, com $a = \bar{d}$, $b = \bar{c}$ e $|b| < |a|$. [VERMEER 2005:227]

Assim, pondo $a = 1 = d$ e $b = x \in D^1$ (portanto $|x| < 1$), reduzimos h(z) a $(z + x)/(1 + \bar{x} z) = x \oplus z$. Desse modo, a lei de composição recém-definida se vincula com a geometria hiperbólica, através do modelo de Poincaré. [UNGAR 1998:1293]

Examinando o conceito de giração (de Thomas) no âmbito da geometria hiperbólica, Ungar percebeu que ela associa a cada par de pontos uma isometria (do mesmo modo que, digo eu, na geometria euclidiana, a cada par de pontos está associada uma translação) e pôde desvelar que, ao lado da geometria hiperbólica usual se encontra uma forma dual. Na sua expressiva descrição, se verifica que "*na transição à geometria não euclidiana, a geometria euclidiana bifurca em dois ramos mutuamente duais da geometria hiperbólica*". (24) [UNGAR 2000:1258]

Resumindo tudo quanto foi visto no presente capítulo, a analogia constitui indício sugestivo na extensão de conceitos mas como um mesmo conceito pode apresentar analogia com diversas outras noções, não existe, *a priori*, um modo privilegiado de se proceder à extensão de cada conceito. Há apenas um critério (*a posteriori*): a fecundidade das novas ideias.

6.9 Fontes

(1) *A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories. One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.* [*Apud* http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/ history/Quotations/Banach.html

(2) *Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître; comme l'enseigne la Gita on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.* [André Weil, *De la métaphysique aux mathématiques* (1960), *apud* MAZUR 1997:201]

(3) *Cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées* théta-fuchsiennes. [POINCARÉ 1908B:450]

(4) *Dans la théorie des groupes de Lie, on est guidé par une analogie spéciale; une transformation finie est le résultat de la combinaison d'une infinité des transformations infinitésimales. Le cas le plus simple est celui où ces transformations infinitésimales se réduisent à une multiplication par* $1+\varepsilon$, ε *étant très petit. La répétition des ces transformations engendre alors la fonction exponentielle; c'est comme cela que Neper y est*

arrivé. Nous savons que la fonction exponentielle peut être réprésentée par une série très simple et très convergente, et l'analogie peut alors nous montrer la voie à suivre. [POINCARÉ 1908A:165]

(5) *Weber indique en particulier qu'on peut prendre pour K un corps Z/(p) (p nombre premier) faisant ainsi rentrer dans la théorie des corps les calcul des congruences 'modulo p'; ce dernier avait pris naissance dans la seconde moitié du XVIIIe siècle, chez Euler, Lagrange, Legendre et Gauss, et on n'avait pas manqué d'observer l'analogie qu'il présentait avec la théorie des équations algébriques; développant cette analogie, Galois (en vue de recherches sur la théorie de groupes) n'avait pas hésité à introduire des 'racines idéales' d'une congruence irréductible modulo p, et en avait indiqué les principales propriétés.* [BOURBAKI 1960:108]

(6) *Cependant, la théorie des corps de fonctions algébriques s'est constituée par de "nombreuses et merveilleuses analogies" avec la théorie des nombres algébriques qui généralise, elle, l'arithmétique classique des entiers rationnels. Cette filiation explicitement désignée par HILBERT dans la Préface à sa "Théorie des Corps algébriques" (1897), permet ainsi à l'arithmétique de "conquérir" "de vastes domaines de l'algèbre et de la théorie des fonctions". Que cette conquête n'ait pas eu lieu plus tôt vient de ce que l'arithmétique n'a atteint sa pleine maturité qu'avec la théorie récente des corps quadratiques qui apporte "un développement sûr et continu" à des questions où, même s'agissant d'un génie de la taille de GAUSS, les progrès se faisaient par sauts brusques et irréguliers. Mais depuis que KRONECKER, DEDEKIND et WEBER ont montré que les fonctions algébriques rationnelles sont justiciables des mêmes concepts que les nombres algébriques rationnels, il devient légitime d'importer systématiquement en algèbre les questions et les méthodes de l'arithmétique.* [SINACEUR 1984:271]

(7) *Mais les nombres imaginaires, les nombres transfinis, bien d'autres êtres mathématiques, sont de pures créations de l'esprit humain. Elles sont justifiées par le fait qu'elles ont permis de résoudre plus facilement des problèmes que se posaient les mathématiciens ou les physiciens et d'éclaircir des difficultés qu'ils avaient rencontrées.* [BOREL 1962:24]

(8) *Invective was a major part of the response of the mathematical community between 1543 and the 1830's to the square roots of negative quantities. Such terms as 'sophistic' (Cardan), 'nonsense' (Napier), 'inexplicable' (Girard), 'imaginary' (Descartes), 'incomprehensible' (Huyghens), and 'impossible' (many authors) remind us of the type of welcome accorded these new entities.* [CROWE 1975:162-163]

(9) [...] *dasz die Quadratwurzeln aus Negativzahlen weder gröszer als Nichts, noch kleiner als Nichts sind. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multipliziert 0 und also keine Negativzahl gibt. Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder gröszer oder kleiner als 0, oder etwa 0 selbst sind, so ist klar, dasz die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, dasz dies unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie blosz in der Einbildung vorhanden sind.* [EULER 1748:60]

(10) *For more than a century mathematicians accepted imaginary numbers without a formal justification for them because they proved useful in saving the fundamental theorem of algebra and in permitting the solution of various scientific problems.* [CROWE 1975:163]

(11) *With almost Pythagorean fervor, Coleridge believed in the supremacy of the number three and so aimed to develop a perfectly trichotomous philosophy. Hamilton and many of his friends and correspondents labored to undestand the meaning and significance of Coleridge's views. In Hamilton's case, the search for algebraic triplets became a quest for further trichotomy in the world.* [PARSHALL 1985:228]

(12) *Since √-1 is, in a certain well-known sense, a line perpendicular to the line 1, it seemed natural that there should be some other imaginary to express a line perpendicular to both the former; and, because the rotation from 1 to this also being doubled, conduts to -1, il also ought to be a square root of negative unity, though non to be confounded with the former.* [William Hamilton, *apud* O'NEILL 1986:366]

(13) C'était lá en arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait faite Lobachevski en géométrie. [POINCARÉ 1913:163]

(14) *A set of symbols 1, α, β, ..., all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set, is said to be a group.* [Arthur Cayley, *apud* KLEINER 1986:208]

(15) [...] *each subject of physical enquiry has its appropriate mathematics [...] but where there is a great diversity of physical appearance, there is often a close resemblance in the processes of deduction [...] mathematics treated by such symbols is called algebra. Algebra, then, is formal mathematics.* [PEIRCE 1881:98]

(16) *An algebra in which every expression is reducible to the form of an algebraic sum of terms, each of which consists of a single letter with a quantitative coefficient, is called* ***a linear algebra****. (...) An algebra in which there can be complete interchange of its independent units, without changing the formulae of combination, is a* ***completely symmetrical*** *algebra (...) An algebra in which the interchange is effected in a certain order which returns into itself is a cyclic algebra. Thus, quaternions is a cyclic algebra* (...). [PEIRCE 1881:107]

(17) *It is in the nature of a mathematician, once given an interesting concept arising from a particular situation, to try to strip this concept away from the particularity of its origins and to employ the key properties of the concept as a means of abstracting it!* [HERSTEIN 1964:275]

(18) [...] *is the crowning theorem of elementary number theory. One might almost say that it is the theorem with which elementary number theory ceases to be elementary. Gauss, who did not waste time with trivialities, was fascinated by this theorem, so simple to state and so difficult to prove, and he returned to it many times in his career, giving six different proofs of it.* [EDWARDS 1983:290]

(19) *Unfortunately, neither of them gives a reason for this definition or explains how it was arrived at. Insofar as this is the crucial idea of the theory, the genesis of the theory appears, therefore, to be lost.* [EDWARDS 1980:332]

(20) *De plus en plus, les mathématiques apparaissent comme la science qui étudie les relations entre certains êtres abstraits définis d'une manière arbitraire, sous la seule condition que ces définitions n'entraînent pas de contradiction. Il faudrait toutefois ajouter, pour ne pas risquer de confondre les mathématiques, ni avec*

la logique, ni avec des jeux tels que le jeu d'échecs, que ces définitions arbitraires ont été tout d'abord suggérées par des analogies avec des objets réels [...]. [BOREL 1962:24]

(21) *Symmetrization is the abstract counterpart to the introduction of the negative integers.* [ARTIN 1953:475]

(22) *A fully-fledged realization of the structural image of algebra first appeared in print in van der Waerden's Moderne Algebra. Van der Waerden did not explicitly say so, but his book represented a clear departure from any previous image of algebra; it presented algebra as the mathematical discipline whose aim is the definition of the various algebraic systems, and the elucidation of their respective structures. By contrast, the classical image of algebra saw the discipline as concerned with polynomial equations and the problems of their solvability.* [CORRY 1993:115]

(23) *Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun. Une fonction continue, aurait-on dit, est par essence susceptible d'être représentée par une courbe et une courbe a évidemment toujours une tangente.* [POINCARÉ 1898:5]

(24) *The novel analogies, in turn, uncover duality symmetries that demonstrate that in the transition to non-Euclidean geometry, Euclidean geometry bifurcates into two mutually dual branches of hyperbolic geometry one of which is the standard hyperbolic geometry.* [UNGAR 2000:1258]

Capítulo sétimo

Do método axiomático e das definições implícitas

> "As aquisições do século XIX podem ser consideradas de diversos modos. De uma perspectiva, essas aquisições se distribuem em duas classes, que não se excluem: algumas ampliaram o domínio da matemática; outras aperfeiçoaram as técnicas disponíveis. [...] De outra perspectiva, alguns desses descobrimentos ajudaram a produzir novas áreas de emprego da matemática, enquanto outros concorreram para aprofundar áreas tradicionais. [...] Uma terceira perspectiva acentuaria a abstração crescente na matemática, no século XIX, e apontaria os deslocamentos em suas fundações. Dar-se-ão, abaixo, exemplos para mostrar que, realmente, pareceu a muitos contemporâneos que a matemática estivesse saindo da realidade [...], habituando-se a suplantar conceitos intuitivos [...] por uma linguagem opaca da análise matemática que trouxe rigor a um alto custo de inteligibilidade." (1) [GRAY 2004:24]

> "Na concepção axiomática, a matemática aparece, em suma, como um reservatório de *formas* abstratas — as estruturas matemáticas; e acontece, sem que saibamos exatamente a razão, que certos aspectos da realidade experimental venham acomodar-se a algumas dessas formas, como por um tipo de preadaptação. Não se nega que a maior parte dessas formas tivesse, inicialmente, um conteúdo intuitivo bem determinado; mas foi precisamente esvaziando-as, deliberadamente, desse conteúdo que se pôde dar-lhes toda a eficácia que elas encerravam potencialmente e que se pôde torná-las susceptíveis de receber interpretações novas e de preencher plenamente seu papel elaborador." (2) [BOURBAKI 1962:46-47]

Sumário

7.1 Antelóquio

7.2 Antecedentes geométricos do método axiomático

7.3 Primeiro exemplo de definição axiomática: **Os reticulados**

7.4 Segundo exemplo de definição axiomática: **Os números naturais**

7.5 Terceiro exemplo de definição axiomática: **As noções de proximidade e de espaço topológico**

7.6 Quarto exemplo de definição axiomática: **Uma plenificação do corpo dos números racionais**

7.7 Quinto exemplo de definição axiomática: **Dos espaços dotados de produto interno aos espaços métricos**

7.8 Sexto exemplo de definição axiomática: **A teoria dos corpos valorados**

7.9 Conclusão

7.10 Fontes

7.1 Antelóquio

> "Um matemático que inicia a construção de uma prova tem na mente objetos matemáticos bem definidos, os quais então está investigando. Quando pensa que encontrou a prova e começa a verificar todas as conclusões, ele percebe que apenas umas poucas dentre as propriedades especiais dos objetos considerados são relevantes nessa prova. Então descobre que pode usar a mesma prova para outros objetos que tem somente as propriedades que ele acabou de usar. Nisso podemos ver a ideia simples que subjaz ao método axiomático: Em vez de declararmos quais os objetos que estão sendo investigados, temos apenas de compor um rol das propriedades dos objetos que serão usadas na investigação. Então, tais propriedades, expressas por axiomas, são realçadas. Depois disso, deixa de ser importante explicar o que *são* esses objetos que estão sendo estudados. Em vez disso, podemos construir a prova de tal modo, que seja válida para todos os objetos que satisfaçam aos axiomas. É notabilíssimo que o emprego dessa ideia tão simples tenha sacudido vigorosamente a matemática." (3)
> [Henri Cartan (1958), *apud* CORRY 1997A:273]

O presente capítulo consiste em duas partes.

Na primeira parte, far-se-á uma breve exposição do método axiomático, através da descrição de sua evolução.

Na segunda parte, descrever-se-á o emprego do método axiomático, tanto na **extensão** quanto na **redefinição** de conceitos.

De um certo modo, a discussão do método, de sua validade e de seu alcance constituem temas da Lógica, enquanto o emprego desse método se configura em uma prática de todos que recorram a ele (como os matemáticos e os físicos).

7.2 Antecedentes geométricos do método axiomático

> "Axiomas são delineados para insularmos temporariamente uma classe de problemas, a fim de que possamos elaborar técnicas de solução. Algumas pessoas pensam em axiomas como um modo de se definir toda uma área autônoma da matemática. Penso que isso seja errado. Quanto mais restritos forem os axiomas, tanto mais expungimos dessa área. Em matemática, quando abstraímos alguma coisa, separamos aquilo em que desejamos concentrar-nos daquilo que consideramos irrelevante. Ora, isso pode ser conveniente por um lapso de tempo, pois concentra a atenção. Porém, por definição, excluímos um acervo de coisas nas quais dizemos não estarmos interessados e, em um curso longo, eliminamos assim uma parcela de raízes. Podemos desenvolver axiomaticamente alguma coisa mas, em alguma fase, deveremos retornar às origens, fundindo e produzindo fertilização cruzada." (4) [ATIYAH 1984:12]

A Lógica nasceu da observação, na Academia platônica, do método usado pelos matemáticos Arquitas, Teeteto e Eudoxo nas discussões acerca das propriedades aritméticas e geométricas; portanto, a Lógica teve origem empírica, entendendo-se por *empírica* qualquer atividade associada à experimentação. No caso vertente, experimentavam-se argumentos dedutivos.

Essa opinião não se mostra destoante do parecer de Bruno Latour. Com efeito, confronte-se o excerto seguinte.

> "Os vocábulos *apodixe* e *epidixe* têm quase a mesma raiz etimológica e, por muito séculos, eram completamente indistinguíveis. Foram somente os filósofos platonicistas que, conformando sua linguagem pelo efeito persuasivo que resultava das

demonstrações geométricas, introduziram na filosofia uma diferenciação radical entre um modo de se convencer (por demonstrações rigorosas) — a apodixe — e outro modo que dependia de floreados de retórica, de sofística, de poética, da imaginação e de artifícios políticos — a epidixe. Terá sido esse o efeito real das práticas filosóficas? [...] É como se Platão houvesse extraído apenas um estilo de convencimento da geometria e lhe acrescentasse um conteúdo totalmente estranho; é como se o tipo de persuasão que os matemáticos obtinham com árduo esforço (porque se restringiam a formas) pudesse, todavia, ser alcançado por filósofos, com quase nenhum custo demonstrativo, relativamente ao que consideravam fosse o único conteúdo relevante. Uma imitação da matemática, exatamente suficiente para expulsar os sofistas da filosofia." (5) [LATOUR 2008:445-446]

Tampouco parece ser outra a opinião de DA COSTA [1994: 76]: "Nada impediria que nos alongássemos nas reflexões históricas, para justificar o seguinte: As leis lógicas vão sendo descobertas e refinadas *pari passu*, **como ocorre com as leis científicas em geral**, embora sua evolução seja mais lenta, por motivos patentes." (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

DA COSTA [1994: 45-46) enuncia três princípios pragmáticos da razão, dos quais o terceiro, denominado **princípio da adequação**, assim se formula: "A Lógica subjacente a um dado contexto deve ser a que melhor se adapte a ele". E acrescenta (p. 47) a doutrina de Ferdinand Gonseth de que "os sistemas lógicos têm suas jurisdições delimitadas **pela experiência** e **por fatores de natureza pragmática**". (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Atribui-se a Aristóteles de Estagiros, na obra *Primeiros Analíticos*, a sistematização inicial dos rudimentos da Lógica, qual seja, a teoria dos silogismos. Embora, com o descenso dos tempos, a construção da Lógica tenha sofrido profunda modificação, parece ser permanente a ideia constitutiva, já patente nos escritos do Estagirita, de que a Lógica (formal) se ocupe das regras que permitem extrairem-se conclusões válidas, independentemente do conteúdo semântico das premissas. Note-se que o vocábulo *lógica*, na acepção da doutrina discutida por Aristóteles ao longo de sua obra *Organon* (reunião de escritos produzidos em diferentes datas), foi empregada, pela primeira vez, por Alexandro de Afrodísias, no começo do século III d.C. [BOCHENSKI 1951:1; FEYS 1993:301; KNEALE & KNEALE 1972:189]

Na obra *Segundos Analíticos*, Aristóteles, possivelmente baseado no modelo da geometria contemporânea, definiu uma ciência dedutiva, notando que é impossível tanto definir tudo quanto demonstrar tudo (uma tentativa de fazê-lo conduziria a um regresso *ad infinitum*). Escolheu, portanto, como primitivos os conceitos que dispensam definição (por ser patente o seu significado) e os juízos que prescindem de demonstração (por ser patente a sua veracidade).

Assim, segundo a visão do Estagirita, uma ciência dedutiva é um sistema S de termos e de enunciados tais, que

(1) Todos os enunciados de S se referem a um mesmo domínio de objetos reais.

(2) Todos os enunciados de S são verdadeiros.

(3) Pertencem a S todos os enunciados que sejam consequência lógica de enunciados de S.

(4) Existe em S um conjunto finito de termos cujo significado prescinde de explicação e mediante os quais se podem definir todos os outros termos de S.

(5) Existe em S um conjunto finito de enunciados cuja veracidade é evidente e dos quais decorrem todos os outros enunciados de S.

[BETH 1955:1-2; DE JONG & BETTI 2010:186; FEYS 1993:302-303; KNEEBONE 2001:134-135]

Tem sido frequente afirmar-se que os *Elementos* (Στοιχεια) de Euclides de Alexandria (século III a.C.) foram redigidos consoante a formulação descrita pelo Estagirita. Por exemplo, Evert BETH [1955:4} declarou que "a matemática clássica constitui o exemplo por excelência, e talvez o único exemplo, de uma teoria dedutiva, consoante a teoria das ciências de Aristóteles". (6)

E, ao se perceberem discrepâncias entre o método preconizado por Aristóteles e o método adotado por Euclides, apontaram-se as diversas falhas na obra do alexandrino: "Euclides, por exemplo, descurou os axiomas da ordem em relação às linhas retas e ao plano." [FRAENKEL 1993:324]

Estudos mais recentes têm apontado em outra direção. MUELLER [1969:292] sugere que as provas euclidianas são versões padronizadas do tipo de discussão que Sócrates teve com o jovem escravo descrita no diálogo platônico *Menão*.

SEIDENBERG [1975:263-264] indica que os *Elementos* constituem uma compilação de diversos textos que não foram escritos segundo um mesmo modelo e que talvez apenas a teoria das proporções de Eudoxo, apresentada no *Quinto Livro*, tenha sido elaborada segundo o cânone peripatético.

HARARI [2003:2] adverte que a ocorrência de dois tipos de **proposições primitivas** ou **princípios primários** e de dois tipos de **proposições derivadas** implica uma distinção entre os dois tipos de relação existentes entre as proposições primitivas e as proposições derivadas. No caso dos axiomas (ou noções comuns) e os teoremas, se trata de uma relação dedutiva, mediante a qual um valor de verdade, associado às noções comuns, é

transferido aos teoremas. Mas que isso não ocorre, no caso da relação entre os postulados e as construções.

Talvez se inscreva em uma visão mais ampla de que toda a ciência remonte à Grécia o aforismo de W. W. R. Ball: "Certamente que a história da matemática não pode ser rastreada a uma escola ou a um período anterior ao dos gregos jônicos." [*The history of mathematics cannot with certainty be traced back to any school or period before that of the Ionian Greeks.*] [*Apud* SEIDENBERG 1975:285]

Mas os estudos recentes têm evidenciado que tal aforismo é apenas a manifestação de uma ideologia. [SEIDENBERG 1975:285-286]

Embora se possa afirmar que Os *Elementos* de Euclides de Alexandria contenham uma descrição teórica de nossa percepção espacial, incumbe notar-se que essa descrição não é a única possível. Também os axiomas da geometria projetiva se verificam no âmbito de nossa experiência quotidiana. [BRACHO 1989:61]

A obra de Euclides é iniciada com uma lista de definições, das quais a primeira consiste em asseverar que "um ponto é aquilo que não tem partes". Alguns críticos supõem que definições desse tipo constituíam declarações explícitas de que não seria adotada a concepção atômica esposada por Demócrito de Abderos. Após as definições, Euclides expôs alguns enunciados primitivos, classificando-os em axiomas e postulados. Os axiomas parecem tratar de fatos gerais (são juízos concernentes a qualquer espécie de grandeza), enquanto os postulados se referem a fatos específicos da ciência vertente (são juízos cuja veracidade é proposta). Essa distinção esmaeceu ao longo dos séculos mas, como logo veremos, parece haver sido restaurada no pensamento hodierno.

Eis os oito axiomas de Euclides:

(1) Coisas iguais a uma coisa são iguais entre si.

(2) Se a coisas iguais foram somadas coisas iguais, as somas também serão iguais.

(3) Se de coisas iguais forem subtraídas coisas iguais, os restos também serão iguais.

(5) E coisas iguais ao dobro da mesma coisa são iguais entre si.

(6) E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

(7) Coisas que coincidem entre si são iguais.

(8) O todo é maior que suas partes.

Existe dúvida quanto à autenticidade do quarto axioma que, por isso, não foi referido. [KUTUZOV 1960:450] Aliás, existe um claro dissenso entre os escoliastas acerca

da credibilidade das versões disponíveis dos *Elementos*. Paul Tannery (1912), por exemplo, negou que algum dos axiomas fosse autêntico. [SEIDENBERG 1975:264]

Os cinco postulados de Euclides já foram enunciados na seção *Os triângulos retilíneos e a emergência do modelo euclidiano*, do terceiro capítulo.

Euclides foi particulamente feliz na formulação do seu quinto postulado que, enunciado apenas após o teorema XXVIII, incomodou longamente os matemáticos subsequentes que se detiveram no exame do ordenamento das proposições. (Se houvesse apresentado o quinto postulado anteriormente, Euclides teria simplificado alguns argumentos.) Muitos comentadores arguíram tal postulado de falta de evidência. Declaram NAGEL & NEWMAN [1958:9] que a relutância em aceitá-lo decorreu de esse postulado descrever o comportamento de retas em regiões infinitamente afastadas.

Desde o século I a.C., houve tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides, as quais repousavam na admissão (tácita ou expressa) de outros postulados (BONOLA, p. 2 et passim). COOLIDGE (p. 68) informa que Proclo de Constantinópole (comentador do século V d.C.) sustentava dever o quinto postulado de Euclides ser excluído do elenco de postulados, por ser um teorema (cuja demonstração já teria sido tentada por Ptolemeu).

Por outro lado, a proposição 1.27 dos *Elementos* é o teorema: "São paralelas duas retas que, intersecadas por uma terceira, formam com esta ângulos alternos internos suplementares."

Já foi assinalado, no capítulo III, que, intensamente perplexo, Proclo perguntava: "Pode uma proposição ser um teorema e, simultaneamente, pode sua recíproca ser um postulado?"

Dúvidas dessa natureza suscitaram a busca de um critério que permitisse reconhecer o caráter de um enunciado (axioma ou teorema). E porque foi no contexto dessas discussões que nasceu a noção de postulados independentes, isto é, de postulados que integram um sistema que empobrece, se algum dos postulados for excluído. Isso significa que nenhum dos postulados pode ser deduzido dos outros. A um postulado dedutível dos outros chamamos redundante. [MOISE 1963:131] A um sistema composto apenas de postulados independentes chamamos sistema irredutível. [SCANLAN 1991:985]

Note-se que, ao longo de toda essa discussão, não se pôs em dúvida a veracidade do sistema geométrico erigido por Euclides de Alexandria. O questionamento incidia sobre o modo de se escolherem os postulados.

Mas, com o passar dos séculos, também se passou a suspeitar que fosse possível construirem-se outros sistemas de axiomas geométricos. Na verdade, um tal sistema já fora construído por Menelaus (circa 100 d.C.), ao estudar a geometria sobre a superfície esférica. Talvez por tal esfera estar imersa no espaço usualmente descrito pelo sistema euclidiano, *não*

se reconheceu que a geometria intrínseca da esfera constituísse um novo modelo de geometria planar. [STRUIK 1987:57]

Dentre as tentativas de se demonstrar o quinto postulado de Euclides a mais notável foi conduzida por Gerolamo Saccheri, que recorreu ao método denominado *reductio ad absurdum*, aplicado à figura obtida, quando se traçam, pelas extremidades de um segmento de reta AB, as perpendiculares r e s e, sobre essas retas, no mesmo semiplano, se marcam os segmentos congruentes AC e BD. Saccheri mostrou (recorrendo aos critérios de congruência de triângulos) que são congruentes os ângulos ACD e BDC e considerou os três casos: (a) Ambos os ângulos são agudos. (b) Ambos os ângulos são retos. (c) Ambos os ângulos são obtusos. Em seguida, Saccheri mostrou que a segunda hipótese implica o postulado de Euclides e tentou mostrar que as duas outras eram falsas. Na verdade, sua tentativa de mostrar a falsidade das duas outras hipóteses produziu enunciados de um sistema geométrico distinto do euclidiano, os quais ele, falaciosa mas involuntariamente, supôs serem impossíveis. [KNEEBONE 2001:182]

Coube a Nikolai Lobachevski a glória de haver composto, em 1826, o primeiro estudo explícito de um sistema geométrico distinto do adotado até então. Lobachevski iniciou seu trabalho, tentando demonstrar o enunciado que Euclides expusera como o quinto postulado, recorrendo também à *reductio ad absurdum*, mediante o uso explícito do argumento seguinte: Sejam α o quinto postulado de Euclides e β um juízo que se obtém a partir de $\neg\alpha$. Se β for incompatível com o sistema axiomático que se obtém, excluindo-se o quinto postulado do sistema de Euclides, então também $\neg\alpha$ será incompatível com tal sistema. Isso comprovaria α. [BACHELARD 1978:29; KNEALE & KNEALE 1972:388; SMOGORZHEVSKI 1976:13-14]

Para sua surpresa, Lobachevski não obteve, assim, nenhum enunciado que contradissesse o sistema geométrico de Euclides. Isso sugeria que *o quinto postulado* era efetivamente um postulado do sistema euclidiano (isto é, era um enunciado independente dos demais enunciados do sistema euclidiano). Assim, Lobachevski foi precursor do método de verificação da **independência** de um enunciado α relativamente a um sistema axiomático Γ: Tal método consiste em exibirem-se modelos de estruturas que satisfaçam tanto a $\Gamma \cup \{\alpha\}$ quanto a $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$.

Em oposição ao sistema de Euclides, o sistema axiomático obtido pela substituição do quinto postulado pelo asserto de que existem diversas retas paralelas a uma mesma reta por um mesmo ponto foi denominado não euclidiano por Carl Gauss, em uma carta de 8 de novembro de 1824. [BARBOSA 1995:39]

Incumbe notar que os qualificativos anti-euclidiano e não-euclidiano, empregados, inicialmente, por Gauss para designar sistemas de postulados geométricos distintos do sistema euclidiano, não têm caráter matemático mas tão somente sabor histórico. De fato, como até então somente se conhecesse o sistema euclidiano (que então era descrito simplesmente como a geometria), os novos sistemas receberam tais qualificativos por oposição ao já estabelecido (e, desde então, também o sistema previamente instituído foi

adjetivado). Mas tal episódio constituiu apenas uma vicissitude ou uma contingência histórica e não um critério classificativo. Creio que, já em 1871, Felix Klein estava fortemente convencido disso pois, nesse ano, escreveu sobre "a assim denominada geometria não euclidiana" [*die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*]. [BONOLA 1955:67; YAGLOM 1979:214]

Contudo, o problema da consistência não foi resolvido. Bolyai e Lobachevski, efetivamente, não encontraram contradições em seus incursos por esse novo domínio. Mas nada certificava que, no futuro, não se manifestassem tais contradições. E assim foi suscitado **o problema da consistência**. [KNEALE & KNEALE 1972:388]

Já foi referido, no terceiro capítulo, que, baseando-se em uma memória de Eugenio Beltrami, Jules Houël (1869-1870) ofereceu a primeira solução ao problema da consistência do sistema de Lobachevski, construindo-lhe um modelo euclidiano. Com efeito, Beltrami havia mostrado que os teoremas obtidos por Lobachevski eram verificados em uma superfície de curvatura constante negativa [KAGÁN 1986:320-321; DO CARMO 1987:32-33].

Nessas condições, a qualquer contradição na geometria de Lobachevski corresponderia uma contradição na geometria de Euclides. E assim também mostrou que não se poderia provar o quinto postulado de Euclides, já que tal prova implicaria a falsidade do postulado correspondente de Lobachevski. A esse tipo de solução do problema da consistência chamou-se **prova relativa de consistência**. [KNEALE & KNEALE 1972:388; FRAENKEL 1993:325].

A segunda solução foi dada por Felix Klein, em 1871, ao mostrar que a geometria de Bolyai e Lobachevski poderia ser considerada como uma geometria projetiva com uma métrica de Cayley. Assim, "se houvesse incongruências na geometria de Bolyai e Lobachevski, também se poderiam encontrar incongruências na geometria projetiva e poucos matemáticos estavam dispostos a admitir tal heresia". (7) [STRUIK 1987:178]

Também o argumento de Klein constituiu **uma prova relativa de consistência** da geometria de Bolyai e Lobachevski.

Impuseram-se, assim, dois novos problemas: a prova de consistência da geometria euclidiana e a prova de consistência da geometria projetiva. Ambos esses problemas podem resumir-se nas palavras atribuídas a Henri Poincaré: "Para preservar dos lobos um rebanho, não é suficiente guardá-lo no redil; é necessário verificar, além disso, que, no redil, não existe lobo algum." [BABINI 1974:59]

Um avanço na solução desses novos problemas foi obtido por Moritz Pasch que, nas *Preleções sobre a nova geometria* [*Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882)], mediante a escolha judiciosa dos conceitos e dos juízos primitivos, tentou "fundar empiricamente a geometria". (8) [PASCH 1924:151] Consoante a interpretação por DA COSTA [1992:193], Pasch "apresentou uma sistematização precisa da geometria comum como disciplina física".

Nessa obra, assim se exprimia Moritz Pasch: "Se quisermos que a geometria seja verdadeiramente dedutiva, o processo dedutivo deverá ser totalmente independente do significado [*Sinn*] dos conceitos geométricos assim como deverá ser independente das figuras. Somente as relações entre os conceitos geométricos que houverem sido explicitadas nas proposições e nas definições adotadas deverão ser consideradas. É verdade que, no curso de uma dedução, seja permitido e útil conservar no espírito a referência [*Bedeutung*] dos conceitos geométricos empregados mas isso não é absolutamente necessário." [*Apud* BOTTAZZINI 2001:283; *apud* GANDON 2005:654]

Ao propor axiomas para a geometria projetiva, Pasch acentuou, pela primeira vez, a relevância das noções não definidas explicitamente. [KLEINER 1992B:859]

Contudo, não parece adequado considerar a obra de Pasch apenas como um passo na transição da formulação contida nos *Elementos* do alexandrino para a obra de Hilbert. Adverte Gandon [2005:655-656] que as *Vorlesungen* de Pasch é o ponto culminante da tradição em geometria projetiva sintética inaugurada por Poncelet.

É notável que, ainda em 1890, Felix Klein recusava a opinião de que, formulados os fatos da intuição espacial mediante axiomas adequadamente escolhidos, se tornasse supérfluo qualquer recurso ulterior à intuição:

> "Para concluir, teço ainda algumas considerações gerais sobre a essência dos axiomas geométricos. Parece-me que, a esse respeito, pelo menos na literatura matemática, se dissemina uma opinião, distinta da que me parece correta [...]. Essa opinião consiste em supor que os axiomas formulem os fatos da intuição espacial e, na verdade, o façam tão completamente que, nas considerações geométricas, seja desnecessário recorrer à intuição desses fatos; pelo contrário, que seja suficiente reportar-se aos axiomas. Desejo, antes de tudo, contestar a segunda parte dessa premissa. Para mim é impossível, em qualquer caso, conduzir uma reflexão geométrica de um modo puramente lógico, sem ter diante dos olhos a figura a respeito da qual se cogite." (9) [KLEIN 1890:380-381]

E, com respeito à primeira parte da premissa, afirma Klein:

> "No artigo sobre o conceito geral de função [...], expliquei detalhadamente (e nisso concordo com o sr. Pasch) que considero a intuição espacial como alguma coisa essencialmente imprecisa, quer se trate da intuição abstrata, que se torna familiar pela habituação, quer se trate da intuição concreta, que se impõe pela observação empírica. Por isso, o axioma é para mim a exigência, em virtude da qual se introduzem atributos precisos na intuição imprecisa. Já em uma reflexão geométrica, penso eu, devemos continuadamente contemplar a figura vertente e, em cada ocasião na qual conduzimos um raciocínio mais arguto, devemos reportar-nos aos axiomas como firme substrato lógico." (10) [KLEIN 1890:381]

Nos *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* (1891), Giuseppe Veronese defendia que "toda consideração geométrica deve ser interpretada no sentido de que esteja a figura perante os olhos." (11) [*Apud* BOTTAZZINI 2001:301]

Esses assertos peremptórios parecem tanto mais significativos, porque, quase duas décadas antes, na prefação ao ensaio sobre a *Continuidade e os números irracionais* [*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872], Richard Dedekind advertira na necessidade de "*um fundamento puramente aritmético e perfeitamente rigoroso dos princípios da análise infinitesimal*". (É possível que Dedekind não conhecesse a obra de Bernard Bolzano, o precursor de todos esses estudos.)

E, também, mais próximo sobretudo de Veronese, Giuseppe Peano sustentava uma concepção radicalmente oposta sobre o papel da intuição, nos "*Principii di geometria logicamente esposti*" (1889). Peano apontara que, embora as linguagens da geometria e da análise fossem, até certo ponto, conversíveis uma na outra, não seria lícito ao analista recorrer apenas à intuição para demonstrar fatos da análise. Já foi comentado que, nesse mesmo ano de 1890, mediante o exemplo de uma curva, definida no intervalo [0, 1], que preenche completamente um quadrado, Peano mostrou convincentemente que conclusões evidentes intuitivamente podiam não ser válidas, se os conceitos envolvidos fossem idealizados teoricamente. [KNEEBONE 2001:143]

Também em 1891, Gino Fano apresentou, em *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva*, o resultado de sua perquisição sobre um conjunto mínimo de hipóteses suficiente para fundar a geometria projetiva em um espaço de n dimensões. [BOTTAZZINI 2001:305]

Em 1894, Federigo Enriques, em "*Sui fondamenti della geometria proiettiva*", enfatizou que uma geometria abstrata pode admitir diversas interpretações. Por exemplo, a geometria planar abstrata se pode interpretar tanto como a geometria intuitiva sobre o plano quanto como a geometria sobre uma superfície desenvolúvel e a geometria projetiva abstrata do espaço se pode interpretar tanto como uma geometria dos sistemas lineares de curvas planares algébricas de uma dada ordem quanto como uma geometria das involuções de ordem superior a 2, de terceira espécie, sobre a reta. [BOTTAZZINI 2001:312]

Finalmente, após apresentar quatro ensaios desde 1894, Mario Pieri compôs os "*principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*" (1899), nos quais forneceu uma completa apresentação axiomática da geometria projetiva. [KNEEBONE 2001:226-227; BOTTAZZINI 2001:317]

Em seguida, David Hilbert publicou seus *Fundamentos da geometria* [*Grundlagen der Geometrie*, 1899], instaurando definitivamente a concepção de um sistema de postulados como definição implícita, concepção essa introduzida por Gergonne (1819) e praticada por Peano, Enriques e Pieri. Mediante esse método, se esvaziam as noções primitivas de qualquer conteúdo conceitual que não esteja implicado pelos postulados, cujos vínculos mútuos deixam de ser encarados como apenas a expressão de sua interdependência. Em um certo sentido, pode dizer-se que a adoção das definições implícitas marcam a transição da

axiomática *material* (proposta por Aristóteles) para a axiomática *formal*. [BETH 1955:115; KNEALE & KNEALE 1972:691; KNEEBONE 2001:201]

Esse trabalho de Hilbert mereceu uma resenha por Henri Poincaré, na qual esse insigne matemático francês comentou que fora denominada *geometria geral* uma exposição da qual se excluíra o quinto postulado de Euclides mas na qual se conservaram todos os outros postulados. Acrescentou Poincaré não haver um bom motivo, para se pensar que o citado postulado fosse o único susceptível de questionamento e comentou que muitos geômetras contemporâneos assim o pretendiam e que "*esse termo geral indica claramente que, em suas mentes, não é concebível outra qualquer geometria. Perderão essa ilusão, se lerem o trabalho do prof. Hilbert. Nele descobrirão que as barreiras atrás das quais gostariam de se refugiar foram completamente fragmentadas*". [POINCARÉ 1999:77-78]

Hilbert estendeu os trabalhos de Peano e de Enriques, ao estudar sistematicamente a **independência** mútua dos axiomas, mediante a construção de modelos. Segundo essa técnica, constrói-se um modelo que contradiga um dos axiomas mas que satisfaz a todos os outros. Assim, fica provado que o axioma que foi contrariado pelo modelo não é consequência dos outros axiomas. (Esse método já era praticado por alguns geômetras. Por exemplo, pouco antes do trabalho de Hilbert, Levi-Civita o aplicara no estudo da geometria não-arquimediana inventada por Veronese.)

Embora desde Descartes e Fermat se conhecesse a correspondência entre os pontos de uma reta e o corpo dos números reais, foi Hilbert quem primeiro apontou que a qualquer contradição verificada na formulação euclidiana da geometria corresponderia uma outra contradição na aritmética dos números reais. Para melhor tratar esse quesito, Hilbert propôs um conjunto simples e completo de axiomas para o corpo dos números reais.

Cabe realçar que o tratamento do quesito de independência mediante o recurso a modelos não é logicamente concludente, pois, como já foi apontado, apenas desloca o problema para outro local.

Isso também ocorre com o quesito da **plenitude**, propriedade de um sistema de postulados que consiste na possibilidade de que qualquer proposição nos termos da teoria vertente (ou acerca dos objetos sobre os quais a teoria versa) se possa obter por inferência, desde os axiomas. Ao nível do tratamento por modelos, a plenitude é substituída pela **categoricidade** (introduzida por Veblen, em sua tese de 1903, *A system of axioms of Euclidean geometry*, na qual, segundo O'CONNOR & ROBERTSON, o autor trilhou uma trajetória mais próxima de Pasch e Peano que de Hilbert e Pieri). A categoricidade de um sistema de postulados foi definida por Veblen como a isomorfia entre todos os possíveis modelos e o modelo mediante o qual é instituída a consistência do sistema considerado. [WEYL 1944B:638]

Pouco depois da publicação dos *Fundamentos da geometria* de Hilbert, Gottlob Frege lhe escreveu uma carta (datada de 27 de dezembro de 1899), submetendo o citado livro a uma crítica severa. Como qualquer referência a Frege evoque, frequentemente, a imagem do lógico rigoroso, devo consignar, para permitir uma melhor contextuação, que o seu

Inauguralschrift, intitulado *Sobre a representação geométrica das configurações imaginárias no plano* [*Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*, 1873], fora dedicado à geometria projetiva (complexa). [BELNA 2002:383]

Dois dias depois, Hilbert respondeu a essa carta, esclarecendo que a pesquisa sobre o método axiomático não era, para ele, um objeto que se justificasse inerentemente mas, antes, um instrumento que lhe permitisse obter um entendimento mais claro das teorias matemáticas. Nessa missiva, Hilbert afirmou que, "se axiomas dados arbitrariamente não se contradissessem em todas as suas consequências, então eles seriam verdadeiros e os objetos por eles definidos existiriam". E concluiu que, para ele, Hilbert, esse era o critério de existência e de veracidade. [CORRY 1997B:117]

Na sua réplica, Frege declarou lhe parecer que Hilbert quisesse "desvincular a geometria da intuição espacial e convertê-la em uma ciência puramente lógica, como a Aritmética". Nessa imputação, percebemos o eco da carta de Gauss a Olbers (de 28 de abril de 1817), na qual o príncipe dos geômetras afirmara que a geometria não se encontrava na mesma categoria que a Aritmética (a qual era inteiramente *a priori*) mas antes na vizinhança da Mecânica. [CORRY 1997B:117; MOSTERÍN 1987:113; BELNA 2002:382]

Hilbert apenas acusou o recebimento da réplica mas não se estendeu na resposta, alegando estar oprimido de tarefas. Na verdade, Hilbert poderia responder-lhe que a axiomatização completa da geometria permitiria que todos os teoremas fossem deduzidos sem recurso à intuição. Mas, para Hilbert (assim como, antes dele, para Pasch), os próprios axiomas não estavam desconectados da intuição espacial. Pelo contrário, os axiomas seriam escolhidos de tal modo que capturassem e recolhessem integralmente os dados da intuição espacial. Assim, não a geometria mas a dedução dos teoremas seria independente da intuição espacial. [CORRY 1997B:117]

Embora esporadicamente tornasse a discorrer sobre o método axiomático (como na palestra *Axiomatisches Denken*, proferida em Zurique, em 1917), nos anos iniciais do século XX Hilbert se deixou absorver, primeiramente, pelas equações integrais e, pouco depois pela física que, desde 1916, era intensamento revigorada pela teoria geral da relatividade.

Entrementes, a dificuldade em fundamentar a matemática tinha atingido um nível crítico, sob o impacto de intoleráveis antinomias na teoria dos conjuntos. "Houve especialmente uma antinomia encontrada por Zermelo e Russel, cuja propagação no meio matemático teve diretamente um efeito devastador. Diante desses paradoxos, Dedekind e Frege revocaram efetivamente seus pontos de vista e abandonaram o campo: Dedekind hesitou muito em permitir uma reedição de sua sensacional dissertação '*Que são e que devem ser os números*'; e também Frege teve de reconhecer como viciosa a orientação impressa a seu livro '*Fundamentos da aritmética*', como confessou em um pós-escrito." (12) [HILBERT 1926:169]

Por outro lado, Bertrand Russell chamou a atenção para a hierarquia dos tipos, que corroía a teoria aritmética do contínuo, e Luitzen Brouwer advertiu quanto ao grau de

generalidade alcançado pelas proposições matemáticas, exigindo que se abandonasse o princípio da exclusão do terceiro (o "*tertium non datur*" medieval).

Hilbert não aceitava impor-se o pesado sacrifício exigido pela crítica feita por Brouwer e comparou a proibição, em matemática, de se usar o princípio da exclusão do terceiro com a proibição a um astrônomo de usar o telescópio. [WEYL 1944B:639]

Vislumbrou, então, um modo de se evitar a cruel mutilação da matemática até então construída, notando que as sentenças matemáticas não podiam ser, elas mesmas, objeto de uma investigação matemática cujo escopo fosse examinar sua consistência, a menos que tais sentenças fossem reduzidas a meras fórmulas. O processo de dedução mediante o qual fórmulas previamente obtidas suscitassem novas fórmulas deveria ser descrito sem qualquer referência ao seu significado. Nos *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert esvaziara os termos geométricos mas os termos lógicos, como 'e', 'ou' e 'então' ainda conservavam significado preciso. Agora, Hilbert defendia que também os significados dos termos lógicos deveriam ser expungidos. [WEYL 1944B:640]

Decorre dessa obliteração que os símbolos lógicos, tais quais '$\rightarrow$', deveriam ser considerados como integrantes das fórmulas. Hilbert concordava plenamente com Brouwer em que a maior parte das sentenças matemáticas não admitisse um significado preciso, verificável à luz da evidência, mas se desviou de Brouwer, ao afirmar que sua meta não seria **a veracidade das sentenças matemáticas** mas **a consistência do sistema**. Assim, o jogo de dedução, se praticado em consonância com as regras, jamais conduziria à fórmula $0 \neq 0$. Nessa acepção (e somente nela), Hilbert propôs-se a preservar toda nossa herança clássica. Àqueles que o acusam de degradar a matemática a um mero jogo, ele responde que tampouco na Física as sentenças individuais são verificáveis por experimentação mas somente uma teoria completa pode ser confrontada com a experiência. [WEYL 1944B:640]

A estratégia adotada por Hilbert permitiu-lhe obter uma prova absoluta de consistência. Ao considerar também os símbolos lógicos como vazios de conteúdo [*inhaltlichleer*], Hilbert submeteu o próprio raciocínio a uma axiomatização, convertendo-o em um cálculo lógico, isto é, em um conjunto de símbolos que se podem combinar, consoante regras explicitamente formuladas (procedimentos sintáticos), formando cadeias de comprimento finito (fórmulas). Um argumento reduz-se, portanto, na conversão de certas fórmulas em outras fórmulas, de acordo com regras (regras de transformação) também enunciadas explicitamente.

Hilbert baseou sua tentativa em construir provas absolutas de consistência de um sistema de postulados, na distinção entre um cálculo formal e sua descrição. Resumidamente, podemos construir tal prova, se aceitarmos a validade do teorema $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, cuja dedução é fornecida adiante, e as duas regras de transformação seguintes:

(a) A regra de substituição para variáveis sentenciais: É permitido, em uma fórmula que contenha variáveis sentenciais, substituírem-se, uniformemente, todas essas variáveis

por fórmulas, desde que a mesma substituição seja efetuada em cada ocorrência de uma mesma variável sentencial.

(b) O *modus ponens*: $(S \wedge (S \rightarrow T)) \rightarrow T$.

De fato, suponhamos que tanto a fórmula T quanto a fórmula $\neg T$ sejam dedutíveis dos axiomas de nosso sistema. Se substituirmos, no teorema acima, a variável p por T (consoante a primeira regra de transformação), obteremos a fórmula $T \rightarrow (\neg T \rightarrow q)$.

Como T é suposta dedutível dos axiomas do nosso sistema, aplicando uma vez a segunda regra de transformação, obtemos $\neg T \rightarrow q$. Como também $\neg$ T é suposta dedutível dos axiomas do nosso sistema, aplicando outra vez a segunda regra de transformação, obtemos q. Porém, se nessa fórmula a variável q é demonstrável, então decorrerá da primeira regra de transformação que qualquer fórmula será demonstrável. Resumidamente, se tanto uma dada fórmula T quanto sua negação $\neg T$ forem dedutíveis dos axiomas, então qualquer fórmula também será dedutível. Em outros termos, se o cálculo não for consistente, então qualquer fórmula será demonstrável ou, como se soía dizer, qualquer fórmula é demonstrável em um sistema contraditório de axiomas. Daí se conclui que, se em um dado sistema de axiomas houver uma fórmula não demonstrável, então o respectivo cálculo será consistente. Assim, a tarefa se resume na enunciação de uma fórmula que *não* seja dedutível no âmbito do sistema vertente de axiomas. [NAGEL & NEWMAN 1958:50-51]

Hilbert adotara, como axiomas do cálculo, quatro fórmulas que, essencialmente, já figuravam nos *Principia* de Russell & Whitehead. Na verdade, Russell e Whitehead enunciaram um quinto axioma mas, em 1926, P Bernays mostrou que ele era redundante [NAGEL & NEWMAN 1958:48-49; KNEALE & KNEALE 1972:532, 700]:

(1) $(p \vee p) \rightarrow p$

(2) $p \rightarrow (p \vee q)$

(3) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$

A fim de obter a fórmula não dedutível, Hilbert buscou uma característica ou propriedade estrutural de fórmulas que atendessem às três condições seguintes:

(a) A propriedade deve ser comum aos quatro axiomas.

(b) A propriedade deve ser hereditária sob as regras de transformação, isto é, se todos os axiomas gozarem dessa propriedade, então também deverá gozar dessa propriedade toda fórmula adequadamente obtida mediante as regras de transformação. (Como qualquer fór-

mula assim obtida é um teorema, então todo teorema nesse sistema de postulados deve gozar da propriedade vertente.)

(c) Tal propriedade não deve ser comum a todas as fórmulas que se podem construir em consonância com as regras de formação do sistema, isto é, devemos exibir pelo menos uma fórmula (composta de acordo com as regras de formação) que não exiba a dita propriedade.

A fim de encontrarmos uma tal propriedade, concordemos em distribuir qualquer fórmula elementar em uma das duas classes disjuntas (e exaustivas) H e L, segundo a seguinte regra:

(A) Uma fórmula do tipo $S \vee T$ será colocada na classe L, se ambas as fórmulas S e T estiverem em L; senão, $S \vee T$ será colocada na classe H.

(B) Uma fórmula do tipo $S \rightarrow T$ será colocada na classe L, se S estiver em H e T estiver em L; senão, $S \rightarrow T$ será colocada na classe H.

(C) Uma fórmula do tipo $S \wedge T$ será colocada na classe H, se tanto S quanto T estiverem em H; senão, $S \wedge T$ será colocada na classe L.

Diremos, agora, que uma fórmula é uma tautologia, se ela estiver na classe H.

Esse modo de se definir uma tautologia libera o conceito de qualquer interpretação que se lhe queira atribuir. [NAGEL & NEWMAN 1958:110-111]

A aplicação da regra vertente aos quatro axiomas mostra que todos eles são tautologias. De fato,

(1) É imediato, por (A), que $p \vee p$ está na mesma classe que p; e, por (B), que $p \vee p \rightarrow p$ está em H.

(2) Decorre de (A) que, se $p \vee q$ estiver em L, então p estará em L. Logo, por (B), $p \rightarrow (p \vee q)$ estará em H.

(3) Se $q \vee p$ estiver em L, então, por (A), estarão em L p, q e $p \vee q$. Logo, por (B), $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ estará em H.

(4) Se $r \vee q$ estiver em L, então, por (A), r e q também estarão em L. Se p estiver em H, então, por (A), $r \vee p$ estará em H e, por (B), $(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)$ estará em L. Mas, ainda por (A), $p \vee q$ estará em L e $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$ estará em H. Se, por outro

lado, p estiver em L, também $r \vee p$ estará em L (por A) e $(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)$ estará em H. Logo, por (B), também $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$ estará em H.

Mostremos, agora, que ser uma tautologia é uma propriedade hereditária sob a segunda regra de transformação (o *modus ponens*).

Segunda regra: $(S \wedge (S \rightarrow T)) \rightarrow T$.

Suponhamos que S e $(S \rightarrow T)$ sejam tautologias. Decorre de (B) que T é tautologia e que $(S \wedge (S \rightarrow T)) \rightarrow T$ também o é.

Como todo teorema dedutível nesse sistema de axiomas é obtido mediante o emprego dos axiomas e das regras de transformação, então todo teorema será uma tautologia. Assim, se conseguirmos enunciar uma fórmula que não seja uma tautologia, tal fórmula não será demonstrável. Um exemplo simples é a fórmula $p \vee q$, que não é uma tautologia, consoante a regra de distribuição das fórmulas pelas classes H e L. Assim, se conclui a prova absoluta de consistência do cálculo adotado nos *Principia Mathematica*.

Cabe apontar que, **no argumento anterior, está embutido o princípio da exclusão do terceiro**. De fato, mostramos que, se no sistema vertente figurarem a fórmula α e sua negação $\neg\alpha$, qualquer fórmula β será demonstrável. Em seguida, exibimos uma fórmula γ não demonstrável e concluímos que, nesse sistema, não podem figurar uma qualquer fórmula e sua negação. Isso significa que em um cálculo no qual não se admita o princípio da exclusão do terceiro ou, equivalentemente, em um cálculo no qual a fórmula $(\neg p) \vee p$ não seja uma tautologia, não é válida a prova absoluta de consistência proposta por Hilbert.

Também o princípio da exclusão do terceiro será invocado na dedução do teorema $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

De fato, se $p \in H$, então $(\neg p) \in L$ (pelo citado princípio). Logo, $(\neg p) \rightarrow q) \in H$ e $(p \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \in H$.

Se, por outro lado, $p \in L$, então $(p \rightarrow r) \in H$, para toda fórmula r. Em particular, para $r = (\neg p) \rightarrow q$.

7.3 Primeiro exemplo de definição axiomática: Os reticulados

Distinguiremos a locução 'definir axiomaticamente' da locução 'caracterizar axiomaticamente'. Pela locução 'caracterizar axiomaticamente uma estrutura E' entende-se

fornecer um sistema de axiomas do qual E seja modelo e cujos outros modelos sejam todos isomorfos a E. [OLIVEIRA 1991:130]

Em outros termos, caracterizar axiomaticamente uma estrutura E equivale a fornecer um sistema *categórico* de axiomas do qual E seja modelo. Não se impõe essa exigência às *definições* axiomáticas.

Nicolas BOURBAKI [1962:41-42] distingue três classes de estruturas matemáticas, consideradas *genetrizes*, das quais uma consiste nas **relações de ordem**. Também o psicólogo Jean Piaget admite que a ordem seja uma das 'estruturas primárias' da psique humana. [BETH & PIAGET 1961:177-179, 200]. É pois natural que essa experiência primordial seja enfeixada em uma formulação assaz geral.

Talvez haja um consenso sobre a definição seguinte descrever, com o maior grau possível de generalidade, o que se pode entender por ordem. [HALMOS 1974:55]

Dado um conjunto não vazio C, uma relação em C, denotada por $\leq$, é denominada uma **ordem** (parcial), se essa relação gozar das três propriedades seguintes:

- Reflexividade: $\forall x \in C, x \leq x$.
- Antissimetria: $\forall x, z \in C$, de $x \leq z$ e $z \leq x$ decorre que $x = z$.
- Transitividade: $\forall x, u, z \in C$, de $x \leq u$ e $u \leq z$ decorre que $x \leq z$.

Diremos que um conjunto não vazio é **ordenado**, se nele estiver instituída uma ordem.

Um exemplo trivial de conjunto ordenado é a família das partes de um conjunto. Nesse caso, a ordem é a própria inclusão.

Um exemplo não trivial de conjunto ordenado é o sistema dos números naturais dotado da seguinte relação: Diremos que $a \leq c$, se a for um fator de c. Esse exemplo pode ser descrito minuciosamente pelas propriedades seguintes, nas quais designamos o maior divisor comum e o menor múltiplo comum de dois números naturais, respectivamente pelos símbolos $\wedge$ e $\vee$.

$\forall x, z, u \in \mathbb{N}$:

- $x \wedge x = x$
- $x \wedge z = z \wedge x$
- $(x \wedge z) \wedge u = x \wedge (z \wedge u)$
- $x \wedge (z \vee u) = (x \wedge z) \vee (x \wedge u)$
- $x \vee x = x$
- $x \vee z = z \vee x$
- $(x \vee z) \vee u = x \vee (z \vee u)$
- $x \vee (z \wedge u) = (x \vee z) \wedge (x \vee u)$

- $1 \wedge x = 1$
- $1 \vee x = x$

Note-se que a relação 'a ≤ c ⇔ a é um fator de c', não constitui uma ordem em anéis (como $\mathbb{Z}$) nos quais existem elementos inversíveis distintos da unidade, já que, em tais anéis, não se verifica a antissimetria. No caso do anel $\mathbb{Z}$, a ordem de $\mathbb{N}$ é estendida a uma **ordem estrita** em $\mathbb{Z}$, dizendo-se que $a < c$, se $(c - a) \in \mathbb{N}$. [BIRKHOFF & Mac LANE 1965:7-8]

A noção de ordem permite definir a noção de reticulado, conceito introduzido simultaneamente por Garrett Birkhoff (sob o nome de *lattice*) e por Oystein Ore (sob o nome de *structure*). "Evidentemente, a ideia de Ore era que o objeto L descrevesse a *estrutura* real do grupo ou do anel vertente. Depois, nessa acepção axiomática, o vocábulo 'estrutura' foi substituído pelo vocábulo 'reticulado'. Mas um reticulado de subojetos ainda é considerado como uma descrição estrutural." (13) [MAC LANE 1996:178]

Um reticulado é um sistema constituído de um conjunto não vazio L e de duas leis de composição (denotadas habitualmente por ∧ e ∨) que são associativas, comutativas e idempotentes e que gozam da propriedade de absorção, isto é, para quaisquer elementos *a*, *b* e *c* de L,

- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ $\quad$ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- $a \wedge b = b \wedge a$ $\quad$ $a \vee b = b \vee a$
- $a \wedge a = a$ $\quad$ $a \vee a = a$
- $a \wedge (a \vee b) = a$ $\quad$ $a \vee (a \wedge b) = a$

[BIRKHOFF & Mac LANE 1965:317-318]

7.4 Segundo exemplo de definição axiomática: Os números naturais

Giuseppe Peano apresentou a seguinte formulação dos números naturais (1898). [SEGRE 1994:299]

- Primeiro: Um é um número.
- Segundo: O sequente de qualquer número é outro número.

- Terceiro: Não existem dois números que tenham o mesmo sequente.
- Quarto: O número um não é sequente de nenhum número.
- Quinto: Toda propriedade do número um que seja propriedade do sequente de qualquer número que goze dessa propriedade é comum a todos os números.

É usual apresentarem-se esses postulados na linguagem conjuntual, escrevendo-se:

- Primeiro: $1 \in \mathbb{N}$.
- Segundo: $\forall x,z \in \mathbb{N}$, de $x = z$ decorre que seq x = seq z.
- Terceiro: $\forall x,z \in \mathbb{N}$, de seq x = seq z decorre que $x = z$.
- Quarto: $\forall x \in \mathbb{N}$, $1 \neq$ seq x.
- Quinto: Sejam p um sentença que depende de $\mathbb{N}$ e $S = \{x \in \mathbb{N}: p(x)\}$. De $1 \in \mathbb{N}$ e de '$p(x) \Rightarrow p(\text{seq } x)$' decorre que $S = \mathbb{N}$.

A formulação inicial de Peano sofreu, depois, pequenas mudanças, como a substituição do número um pelo número zero.

Logo se percebeu que esse sistema de axiomas não é categórico, pois apenas caracteriza qualquer sequência. [PASTOR et alii 1958:17]

Além disso, Lakatos indicou que "aos axiomas de Peano podem satisfazer estruturas muito estranhas, as funções de Skolem, que estão longe de ser isomorfas ao conjunto dos números naturais". (14) [DUMONCEL 2002:122]

Tem sido propostas outras definições axiomáticas do sistema dos números naturais. MAC LANE [1986:47], por exemplo, propõe que $\mathbb{N}$ seja um conjunto dotado de um objeto notável, o zero, e de uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfaz ao **teorema da recursão**: "Se X é um conjunto, a um objeto de X e $g:X \to X$ uma função, então existe uma única função $f:\mathbb{N} \to X$ tal, que $f(0) = a$ e $f(sm) = g(fm)$." [Cf. HALMOS 1974:48]

Por sua vez, DIEUDONNÉ [1990:227-228], citando Dedekind, supõe como primitivos um conjunto $\mathbb{N}$, um elemento 1 de $\mathbb{N}$ e uma aplicação $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que atende aos três axiomas seguintes:

- s é injetiva.
- $s(m) \neq 1, \forall m \in \mathbb{N}$.
- Uma parte E de $\mathbb{N}$ que contenha o elemento 1 e que contenha sua imagem s(E) coincide com $\mathbb{N}$.

Esses três axiomas são independentes. Isso se comprova, facilmente, considerando-se os seguintes modelos de sistemas que atendem a apenas dois dos axiomas.

(a) Sejam S = {1, a, b} e s definida por s(1) = a, s(a) = b, s(b) = a. Essa estrutura não atende ao primeiro axioma.

(b) Sejam S = {1, a, b} e s definida por s(1) = a, s(a) = b, s(b) = 1. Essa estrutura não atende ao segundo axioma.

(c) Sejam S = $\mathbb{N}$ (o sistema usual dos números naturais) e s(n) = n + 2. Essa estrutura não atende ao terceiro axioma.

Logo, os axiomas são compatíveis e o sistema é consistente. Além disso, contrariando a situação apontada acima por DUMONCEL, assevera DIEUDONNÉ [1990:228] que esse sistema é único, na acepção seguinte: Sejam dados outro qualquer sistema P de objetos primitivos e uma função $t:P \rightarrow P$ que atenda aos três axiomas seguintes

- t é injetiva.
- Existe em P um elemento ω tal, que $t(m) \neq \omega$, $\forall$ m.
- Uma parte F de P que contenha o elemento ω e que contenha sua imagem t(F) coincide com P.

Então, haverá uma *única* bijeção $b: \mathbb{N} \rightarrow P$ tal, que $b(1) = \omega$ e $t(b(n)) = b(s(n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7.5 Terceiro exemplo de definição axiomática: A noção de proximidade

> "Constitui um dos grandes triunfos da matemática que ela tenha conseguido, de algum modo, converter a continuidade em um conceito genuinamente preciso e sutilmente definido, o que não foi alcançado por nenhuma outra área acadêmica de cognição, embora, antes de tudo, a continuidade não seja absolutamente uma categoria de cognição caracteristicamente matemática. Pelo contrário, a continuidade é uma noção que permeia tudo extensamente, ocorrendo em todos os distritos da percepção e da intelecção, da ideação e da abstração. E, fora da matemática, a continuidade é concebida ambiguamente e empregada frouxamente. E se mistura e se funde com conceitos vizinhos, como uniformidade, permanência e constância,

todos os quais têm definições próprias, no hodierno contexto matemático." (15) [BOCHNER 1974:840]

Segundo BOURBAKI [1962:41-42], **a noção de proximidade** constitui uma das *estruturas genetrizes*. Para chegarmos a formulação axiomática desse conceito, iniciarei a discussão pelas noções de continuidade de funções e de convergência de sequências.

A noção matemática de continuidade começou por ser plasmada concomitantemente com o conceito de função que, inicialmente, tinha caráter qualitativo. Talvez os dois principais motores do caráter quantitativo do conceito de função tenham sido o estudo do movimento como problema fundamental do mecanicismo e as núpcias entre a geometria e a álgebra, desde o advento da geometria com coordenadas. Com efeito, segundo a premissa fundamental do mecanicismo, o fim primário da filosofia da natureza consistia em determinar o movimento das partículas materiais sob diversas condições físicas. Além disso, a ciência do movimento exigia a descrição de trajetórias que, na fase inicial da cinemática, seriam curvas planares, estudadas segundo 'a geometria sintética'. (A cicloide, por exemplo, fora introduzida cinematica e geometricamente e fora amplamente estudada, antes que se formulasse sua equação.) Assim, o mesmo tipo de problemas que suscitou a criação do cálculo infinitesimal também ocasionou a descrição das trajetórias mediante relações entre coordenadas, provocando a necessidade de se exprimirem quantitativamente essas relações. [KLEINER 1989:282-283; PULTE 2005; YOUSCHKEVITCH 1976:49].

Um outro defluente do conceito de função foram as séries de potências. No âmbito do estudo dessas séries, as funções eram descritas mediante fórmulas ou expressões analíticas, isto é, uma quantidade era uma função de outra, se se pudesse exprimir, mediante uma notação simbólica finita, na qual interviessem as operações usuais (adição, multiplicação, exponenciação e radiciação) e a outra quantidade. [FERRARO 2003:19]

KLEINER [1989:284] refere uma carta de Johann Bernoulli a Gotfried Leibniz (1718), na qual figura a definição: "Chamamos função de uma variável a uma quantidade composta, de um modo qualquer, dessa quantidade e de constantes."

Leonhard Euler, por exemplo, em um trabalho de 1736, admitia que, se a quantidade y fosse expressa, por qualquer meio, mediante a quantidade x e constantes, essa quantidade y poderia expandir-se em uma série de Taylor. [FERRARO 2000:110] De nossa perspectiva, Euler admitia que a quantidade y fosse função contínua e diferenciável da quantidade x.

Parece haver sido Isaac Newton quem, primeiro, esteve mais próximo de nosso conceito de função contínua, quando explicou o limite de razões últimas: "Essas razões últimas [...] não são, na verdade, razões de quantidades últimas porém limites [...] das quais elas se podem aproximar tanto, que a sua diferença seja menor que qualquer quantidade dada". (16) [POURCIAU 2001:19]

A descrição da propriedade de que tal diferença se pudesse reduzir arbitrariamente foi, posteriormente, aprimorada por Augustin Cauchy e, finalmente, foi expressa por Carl Weierstrass, mediante dois números positivos ε e δ, dizendo-se que uma função f é contínua em um ponto u de seu domínio, quando, dado arbitariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal, que, para todo elemento x do domínio de f, a condição $|x - u| < \delta$ implique a condição $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Essa é a definição usual de continuidade de funções reais de uma variável.

A consideração da continuidade no âmbito de funções de duas variáveis reais exigiu que o conceito de função contínua fosse estendido. Procurou-se uma propriedade que desempenhasse, no espaço $\mathbb{R}^2$, papel **análogo** ao papel exercido pelo valor absoluto no espaço $\mathbb{R}$. A interpretação geométrica do conceito de valor absoluto da diferença entre dois números reais apontou a distância entre dois pontos no espaço $\mathbb{R}^2$, que se exprime mediante o celebrado teorema de Pitágoras, dizendo-se que a distância entre os pontos P e Q se exprime como $|P - Q| = \sqrt{\{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2\}}$, onde $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$.

A transição do contexto de funções de duas variáveis ao contexto de funções de três variáveis não exigiu esforço suplementar, pois o emprego sucessivo do citado teorema de Pitágoras permite que se exprima de modo análogo a distância entre dois pontos do espaço $\mathbb{R}^3$. Assim procederam Clairaut (em 1731) e, posteriormente, Lagrange (em 1773). [BOYER 1948:556-557]

Entrementes, diversas situações suscitaram a consideração de espaços de dimensão maior que três.

Por um lado, colocou-se o estudo dos sistemas de equações lineares de diversas variáveis. Já em 1750, ao discutir a interseção de duas curvas algébricas planares, Euler dera exemplos de sistemas de equações lineares de quarta ordem e estendera sua observação para sistemas de ordem n. [DORIER 1995:229-230]

Por outro lado, também se impôs o estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem. Nesse estudo, cedo se verificou que duas soluções linearmente independentes da equação homogênea eram suficientes para gerar todas as outras soluções. Esse fato foi naturalmente estendido a equações de terceira ordem e de ordem superior à terceira, provocando a consideração de espaços de dimensão maior que três na obra de Euler, d'Alembert e Lagrange. [DORIER 1995:252]

Também no contexto das equações diferenciais parciais, já quando se operavam com funções de duas variáveis, o conceito de dimensão foi percebido como o grau (máximo) de liberdade do sistema. Segundo DEMIDOV [1982:329-330], a primeira fase do estudo das equações diferenciais parciais foi caracterizada por um tratamento formal, no qual a ênfase era conferida aos modos astutos de se reduzirem as equações a formas nas quais se pudessem integrar, associado à ausência de interpretação geométrica. Foi esse formalismo o responsável por Euler haver podido admitir que, em uma equação escrita na forma $z = f(x, y, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, as derivadas parciais da função z poderiam ser consideradas como variáveis, o

que equivale a transformar o problema inicial, concebido em um espaço de duas dimensões, em um problema por ser resolvido em um espaço de quatro dimensões.

Finalmente, a perquisição, por Hamilton, Cayley e outros contemporâneos, dos sistemas de números hipercomplexos forçou a consideração de números cuja descrição exigia n coordenadas.

Assim, se pôs a extensão do conceito de funções contínuas definidas em partes do espaço R^n e a noção de distância entre dois pontos se obteve naturalmente, pondo-se $|P - Q| = \sqrt{\Sigma(p_h - q_h)^2}$, onde $P = (p_1, ..., p_n)$ e $Q = (q_1, ..., q_n)$.

Essa interpretação permitiu a imediata extensão do conceito de funções contínuas ao caso das funções definidas no espaço R^n.

A convergência de sequências e, mais frequentemente, de séries foi um fenômeno cuja percepção se efetuou muito lentamente.

Já foi narrado (na seção sobre a gênese do culto do rigor, do terceiro capítulo) como a dificuldade que Euler e Lagrange enfrentaram, quanto à soma de certas séries, somente foi dirimida, quando Bolzano e Cauchy propuseram uma conceituação clara da noção de convergência, que se pode, hoje, expor, dizendo-se que a sequência (u_n) converge ao número L, se, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice m tal, que, para todos os índices n superiores a m, se verifique a condição $|u_n - L| < \varepsilon$.

Como essa última condição é expressa mediante a distância entre o número L e os termos da sequência considerada, facilmente se estende a noção de convergência a sequências cujos termos são pontos do espaço R^n.

O caso das sequências de funções exigiu que se considerasse o domínio de convergência D, isto é, a sequência de funções (f_n) converge à função g, se, dado $\varepsilon > 0$, para cada ponto x de D existe um índice m (que pode depender do ponto x) tal, que, para todos os índices n superiores a m, se verifique a condição $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Como também essa última condição é expressa, **para cada ponto x de D**, mediante a distância entre o número g(x) e os valores que os termos da sequência assumem no ponto x, facilmente se estende a noção de convergência a sequências cujos termos são pontos do espaço R^n.

Logo, se verificou a insuficiência desse conceito, no estudo da convergência de funções contínuas.

De fato, a expectativa inicial era a de que, se uma sequência de funções *contínuas* fosse convergente, o seu limite seria uma função contínua. O surgimento de casos nos quais isso não ocorria suscitou a introdução de um conceito mais restritivo.

Assim, dizemos que uma sequência de funções contínuas (f_n) no domínio D converge **uniformemente** à função g, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um índice m tal, que, para todos os índices n superiores a m, se verifique a condição $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, independentemente do ponto x. (Em oposição à convergência **uniforme**, a noção inicial de convergência foi, posteriormente, qualificada como **pontual**.)

O episódio da invenção dos conceitos de convergência uniforme e de continuidade uniforme já foi discutido minuciosamente por LAKATOS [1966], CLEAVE [1971], GRATTAN-GUINNESS [1970], FREUDENTHAL [1971], GRATTAN-GUINNESS [1986], RUSNOCK & KERR-LAWSON [2005] e BRATING [2007], o que me exime de fazê-lo.

Após a conceituação dos espaços métricos (quinto exemplo, adiante) e dos espaços vetoriais normados, poderemos dizer que, no espaço normado das funções contínuas definidas em um conjunto D com valores em um espaço métrico M, a sequência de funções contínuas (f_n) converge uniformemente à função g, se, dado $\varepsilon > 0$, existir um índice m tal, que, para todos os índices n superiores a m, se verifique a condição $|f_n - g| < \varepsilon$. Nesse caso, se define a distância d(u, v) entre as funções u e v como $\sup\{ d_M(u(x), v(x)): x \in D\}$, onde d_M denota a distância no espaço métrico M. [LIMA 1976:115]

Formulada essa definição, pode provar-se que "é contínuo o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas". [LIMA 1976:117]

O conceito de continuidade adquiriu todo o vigor, quando se depurou essa ideia da noção de distância. Isso foi obtido, mediante a introdução do conceito de estrutura topológica.

Diremos que uma família τ de partes de um conjunto não vazio X constitui uma estrutura topológica em X, se

- $X \in \tau$.
- $\varnothing \in \tau$.
- Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$.
- Se todos os membros de uma família arbitrária de partes de X pertencerem a τ, então também sua reunião pertencerá a τ.

A um conjunto não vazio dotado de estrutura topológica chamamos espaço topológico. Dado um ponto p em X, a um membro de τ que contenha p chamamos uma **vizinhança** de p. (Também se chama **aberto** a qualquer membro de τ.) [LIMA 1976:60]

No âmbito dos espaços topológicos, o conceito de função contínua admite a seguinte descrição.

Sejam X e Z espaços topológicos, f uma função de X em Z e p um ponto de X. Diremos que **f é contínua no ponto p**, se a toda vizinhança V de f(p) se puder associar uma vizinhança U de p tal, que sua imagem f(U) esteja contida em V. E diremos que f é contínua em X, se o for em todos os pontos de X.

A uma função contínua do espaço topológico X no espaço topológico Z que seja inversível e cuja inversa também seja uma função contínua chamamos **homeomorfismo** entre os espaços X e Z. Às propriedades dos espaços topológicos que sejam invariantes sob a ação de homeomorfismos chamamos propriedades topológicas.

Nesse contexto, podemos definir a topologia (geral) como a geometria das transformações contínuas, no espírito do programa de Erlangen, de Felix Klein.

7.6 Quarto exemplo de definição axiomática: Uma plenificação do corpo dos números racionais

Muito resumidamente, podemos dizer que a extensão dos sistemas numéricos, desde os números naturais, foi feita sob a pressão de necessidades operacionais. Assim, os números negativos, os números racionais e os números imaginários surgiram da necessidade de se encontrarem raízes de polinômios com coeficientes inteiros e das operações com essas raízes. Em oposição aos números imaginários, todos os outros espécimes de números foram nomeados **reais**. Mas, inicialmente, não se sabia exatamente o que fosse um número real.

Aliás, a própria noção de número era tão obscura que, nas primeiras discussões do 'teorema fundamental da álgebra', não havia consenso a esse respeito. Christopher Baltus lembra que, desde a publicação da *Ars magna* por Hieronimo Cardano (1545), se conheciam procedimentos para o cálculo das raízes das equações de terceiro ou de quarto grau. "Contudo, não era aceito consensualmente que as raízes não reais obtidas por esses procedimentos fossem números complexos e tais raízes eram simplesmente nomeadas 'imaginárias' como o eram as raízes não reais de qualquer polinômio." (17) [BALTUS 2004:415]

Assim, em 1746, d'Alembert escreveu, em uma nota consequente a sua prova do teorema fundamental da álgebra: "Devemos notar que, nas demonstrações precedentes, não se supôs absolutamente que a raiz *imaginária* do polinômio admitisse ou pudesse admitir uma expressão *imaginária*, antes de a reduzir à forma $p + q\sqrt{-1}$." (18) [BALTUS 2004:416] Observemos que, nesse passo, d'Alembert empregou o qualificativo 'imaginário' em duas acepções distintas. (O realce gráfico foi introduzido por mim.)

E, em 1772, Lagrange publicou um escrito intitulado "Sur la forme des racines imaginaires des équations", no qual provou que as raízes imaginárias eram efetivamente complexas (na acepção que hoje emprestamos a esse termo). [BALTUS 2004:415-416]

O emprego da definição vigente de convergência de sequências depende de um procedimento heurético que indique um possível limite. No que tange à convergência de séries de termos positivos, já fora proposto por Bolzano um teorema muito útil. Segundo esse teorema, é convergente toda sequência crescente e delimitada. Assim, demonstrada a existência de um majorante de uma série de termos positivos, sua convergência estaria imediatamente certificada (embora não se soubesse qual seria o limite). As proposições dessa natureza foram denominadas **critérios de convergência**.

Na verdade, um critério de convergência já fora introduzido por Leibniz, ao afirmar que, dada uma sequência (u_n) de termos positivos que convergisse a zero, a série *alternada* associada, isto é, $\Sigma(-1)^{n+1}u_n$, seria convergente. Assim, desde então se sabia, por exemplo, que era convergente a série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5$ ..., embora então não se soubesse qual o seu limite.

Por volta de 1821, Augustin Cauchy procurava um critério de convergência de séries cujos termos não fossem necessariamente positivos. Cauchy notou que, se uma sequência numérica convergisse a um número L, então os seus termos se aglomerariam na vizinhança desse número L e definiu essa propriedade como **regularidade**, isto é, segundo Cauchy, uma sequência (u_n) seria **regular**, se, dado $\in > 0$, existisse um índice m tal, que, dados dois quaisquer índices h e k, se $\min\{h, k\} > m$, então $|u_h - u_k| < \varepsilon$.

Em seguida, Cauchy inverteu o procedimento, perguntando-se o que ocorreria a uma sequência regular. É intuitivo que, se os termos de uma sequência se aproximassem uns dos outros (na acepção descrita como regularidade), então tais termos poderiam estar aproximando-se de um número **único**. (A unicidade é imediata. Se supusermos uma sequência regular convergente a dois números distintos L e M, então, tomando-se $\varepsilon < (1/2)|M - L|$, obteríamos uma contradição.) Assim, Cauchy conduziu a uma mudança de perspectiva, afirmando, em seu *Cours d'Analyse* (1821), que os números reais fossem limites de sequências [convergentes] de números racionais.

Impunha-se imediatamente o quesito da natureza desses números reais, tanto que, em uma monografia de 1867, Wilhelm Hankel perguntava se existiriam outros sistemas numéricos que gozassem das mesmas propriedades que os números reais. [O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Hankel.]

Em 1869, Charles de Méray retomou as sequências regulares e, intuitivamente, associou a cada número racional q a sequência cujos termos fossem todos iguais a q, isto é, cada número racional corresponderia a uma sequência constante (que é trivialmente regular). Às demais sequências regulares corresponderiam os outros números reais.

Essa ideia foi formulada mais claramente por Eduard Heine e pode ser descrita nos passos seguintes.

Primeiramente, mostra-se que a família das sequências regulares S_R de números racionais é estável sob adição e sob multiplicação, entendendo-se por produto das sequências (u_n) e (v_n) a sequência (w_n) cujos termos satisfazem à condição $w_n = u_n.v_n$. As propriedades estruturais de $\mathbb{Q}$ certificam que S_R seja um domínio de integridade.

Para abreviar a prosa, diremos que uma sequência de números racionais é **nula**, se ela convergir a zero. Em seguida, mostra-se que a família das sequências nulas S_N de números racionais é estável sob adição e sob multiplicação por uma sequência regular. Isso significa que S_N é um ideal do domínio de integridade S_R.

Finalmente, mostra-se que S_N é um ideal **maximal** do domínio de integridade S_R e chama-se número real aos elementos do quociente S_R/S_N. Como S_N é um ideal **maximal** de um domínio de integridade, esse quociente é um corpo. Intuitivamente, estamos identificando as sequências regulares de números racionais cuja diferença converge a zero e dizendo que a toda sequência regular de números racionais corresponde um número real, que é a projeção canônica da citada sequência no quociente S_R/S_N.

Agora, torna-se fácil instituir o critério, conhecido como critério de Cauchy, de que é convergente toda sequência regular de números reais e demonstrar que tal sequência converge a um número real. Essa propriedade é denominada **plenitude** do corpo dos números reais.

Esse critério mostrou-se tão cômodo, que houve interesse em estendê-lo a outras situações. Assim, dizemos que **um espaço métrico é completo**, se toda sequência regular com termos nesse espaço convergir a um ponto desse espaço.

Esse modo de definir o corpo dos números reais foi novamente exposto por Georg Cantor (1872), aparentemente, desconhecendo o trabalho de Méray.

7.7 Quinto exemplo de definição axiomática: Dos espaços dotados de produto interno aos espaços métricos

Durante a primeira fase do estudo das álgebras (mais ou menos o interstício de 1850 a 1900), notou-se que todo quaternião $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ se decompunha na 'parte escalar', a_0, e na 'parte vetorial', $a_1i + a_2j + a_3k$. A parte vetorial era nomeada 'quaternião

puro' e se verificou que o produto de dois quaterniões puros se podia decompor na diferença entre uma parcela, bilinear e antissimétrica, e uma outra parcela, também bilinear mas simétrica. Essas parcelas foram chamadas por Josiah Gibbs (1881), respectivamente, de produto vetorial [*cross product*] e produto escalar [*dot product*] dos quaterniões puros, considerados como vetores do espaço R^3. [BIRKHOFF & MAC LANE 1965:223-224]

Logo se percebeu que o produto escalar de um vetor A por um vetor C coincidia com o produto da norma do vetor A pela medida (dotada de sinal) da projeção sobre esse vetor A do vetor C. Esse fato permitiu conectar o conceito geométrico (e físico) de projeção com a noção de produto escalar de dois vetores. Além disso, como a noção de projeção de um vetor sobre outro envolvia a ideia do comprimento dos vetores considerados, logo se percebeu o vínculo entre o conceito de produto escalar e o conceito de norma de um vetor, definido como a distância entre a origem do sistema de coordenadas e a extremidade do vetor considerado. Explicitamente, dado o vetor A, vigora a igualdade $|A|^2 = A \bullet A$.

Uma característica do método axiomático consiste em se insularem, de cada conceito, as propriedades que forem mais cômodas para a ulterior articulação das definições e dos axiomas. Não existe um critério que permita escolher antecipadamente, em cada teoria, os conceitos que devam ser eleitos como noções primitivas e as proposições que devam ser eleitas como axiomas. Esse fato será acentuado, quando expusermos duas definições axiomáticas para a estrutura de anel, uma proposta por Adolf Fraenkel e outra por Emmy Noether.

No caso vertente, optou-se por considerar que a noção de norma de um vetor A fosse definida como o número positivo (ou nulo) que satisfaz à condição $|A|^2 = A \bullet A$. E o produto interno (ou produto escalar) foi definido como uma forma bilinear e simétrica que atendesse a condição de que, se $A \neq 0$, então o produto $A \bullet A$ fosse positivo.

Assim, definido o produto interno entre dois vetores, obtemos um procedimento do cálculo de sua norma e, recorrendo a essa norma, definimos **a distância entre dois vetores A e C** como **a norma da diferença C - A** entre esses dois vetores. Esse fato permitiu estender as noções de convergência de sequências e de continuidade de funções a outras situações mais gerais.

Um fato relevante é que, usando-se apenas essas definições de produto interno e norma, se pode demonstrar a desigualdade $| A \bullet C | \leq |A|.|C|$, provada por Cauchy para o caso específico de vetores do espaço R^n.

Consideremos, como exemplo de uma situação mais geral, o estudo da rotação de uma placa cuja espessura e cuja densidade sejam constantes em torno de um eixo situado no plano que contém essa placa. Podemos considerar que essa chapa seja uma região planar Ω e estudar o seu momento de inércia segundo uma reta E que passe por um ponto O da região Ω, que esteja situada no plano que contém essa região Ω e que forme o ângulo θ com o eixo

das abscissas, escolhido de tal modo que O seja a origem do sistema de coordenadas. Queremos, portanto, exprimir o momento de inércia $J(\theta)$ como $\int_\Omega \rho^2 dA$.

Como a distância ρ entre a reta considerada e um qualquer elemento de área, situado no ponto de coordenadas x e y, se exprime como $|x.\sin\theta - y.\cos\theta|$, o momento (total) de inércia é descrito pela fórmula

$$J(\theta) = \int_\Omega \{x.\sin\theta - y.\cos\theta\}^2 dA =$$

$$\sin^2\theta.\int_\Omega x^2 dA - 2\sin\theta.\cos\theta.\int_\Omega xy dA + \cos^2\theta.\int_\Omega y^2 dA.$$

Representando essas integrais (que exprimem os momentos de inércia e o momento centrífugo), respectivamente, por J_{yy}, J_{xy} e J_{xx}, podemos reescrever a última expressão como

$$J(\theta) = (J_{yy})\sin^2\theta - 2(J_{xy})\sin\theta.\cos\theta + (J_{xx})\cos^2\theta.$$

Finalmente, dividindo todos os termos por $J(\theta)$, obtemos que $1 =$

$$(J_{yy})\{(1/\sqrt{J(\theta)})\sin\theta\}^2 - 2(J_{xy})\{(1/\sqrt{J(\theta)})\sin\theta\}.\{(1/\sqrt{J(\theta)})\cos\theta + (J_{xx})\{(1/\sqrt{J(\theta)})\cos\theta\}^2.$$

Seja P um ponto situado sobre a reta E e cuja distância à origem do sistema se exprima por $1/\sqrt{J(\theta)}$. Então suas coordenadas X e Y serão dadas por $X = 1/\sqrt{J(\theta)}.\cos\theta$ e $Y = 1/\sqrt{J(\theta)})\sin\theta$. Logo, substituindo convenientemente por X e Y, obteremos que $1 = (J_{yy})Y^2 - 2(J_{xy})XY + (J_{xx})X^2$.

Assim, a cada ângulo θ corresponde um ponto P do plano cuja distância ao ponto O seja igual ao inverso do momento de inércia $J(\theta)$ da região Ω segundo a reta E. Se quisermos identificar o lugar dos pontos P que satisfazem à condição anterior, teremos que descobrir a relação entre os coeficientes J_{xx}, J_{xy} e J_{yy}. O modo mais simples de se obter essa relação foi descoberto por Viktor Bunyakovski (1859). Ele demonstrou que $(J_{xy})^2 \leq (J_{xx}).(J_{yy})$ e que, portanto, a curva vertente era uma elipse (hoje nomeada elipse de inércia associada à região Ω).

O argumento por ele usado para demonstrar essa desigualdade consistiu em duas partes.

Na primeira parte, Bunyakovski mostrou que a aplicação que a um par de funções contínuas (g, h) (definidas sobre Ω) associa $\int_\Omega g(x,y).h(x,y).dA$ é uma forma bilinear e simétrica; e que, se g e h não forem funções nulas, então essa integral será positiva (resumidamente, tal integral é uma forma bilinear, simétrica e definida positiva).

Em seguida, como a igualdade entre os dois membros ocorre trivialmente, quando g é um múltiplo de h, Bunyakovski supôs que g **não** fosse múltiplo de h e considerou $f(x,y) = g(x,y) - s.h(x,y)$, notando que, nesse caso, $0 < \int_\Omega \{f(x,y)\}^2.dA$. Daí inferiu que, nesse caso,

$$\{\int_\Omega g(x,y).h(x,y).dA\}^2 < \int_\Omega \{g(x,y)\}^2.dA \,.\, \int_\Omega \{h(x,y)\}^2.dA;$$

e que, no caso geral,

$$\{\int_\Omega g(x,y).h(x,y).dA\}^2 \leq \int_\Omega \{g(x,y)\}^2.dA \,.\, \int_\Omega \{h(x,y)\}^2.dA \,.$$

Esse é um dos argumentos que hoje se usam para demonstrar a desigualdade de Cauchy. [DELONE 1956:243-246; PISKUNOV 1974b:193-196]

Note-se que as considerações anteriores conduzem à extensão *natural* do conceito de produto interno ao espaço das funções contínuas definidas em um intervalo J como a integral do produto dessas duas funções, estendida ao intervalo J.

Essa breve narrativa pode sugerir que a consideração de funções como pontos de um espaço tenha sido imediata. Pelo contrário, essa aceitação somente ocorreu como consequência de dois defluentes. Um deles nasceu de um tipo linear de equação integral introduzido por Vito Volterra (1887) e o outro procedeu dos estudos conduzidos por Ivar Fredholm (1900-1903) acerca desse mesmo tipo de equação. Embora tanto Volterra quanto Fredholm houvessem resolvido o mesmo tipo de equação, o maior impacto decorreu dos resultados obtidos por Fredholm, através de uma palestra dada por seu aluno E. Holmgren, no inverno de 1900-1901, no seminário dirigido por Hilbert. [STRUIK 1987:197; WEYL 1944A:550]

Inicialmente, o estudo das equações integrais foi elaborado mediante **analogia com** a teoria dos sistemas de equações lineares.

De fato, seja, por exemplo, a equação $f(x) = \varphi(x) + \int K(x,t)\varphi(t)dt$, na qual φ é a função incógnita, f e K são funções conhecidas e a integração é estendida ao intervalo [0 , 1]. Se decompusermos o intervalo [0 , 1] em n intervalos de amplitude 1/n, obteremos um sistema de n equações da forma $f(x) = \varphi(x) + \Sigma(1/n)K(x,t_h)\varphi(t_h)$, sendo t_h um ponto do intervalo [(h - 1)/n, h/n].

Mas cedo, essa analogia forçou a consideração de sistemas de sequências, o que motivou a extensão das operações estruturais (adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares) ao espaço das sequências. Mas, nesse espaço de sequências, o conceito usual de norma conduzia ao problema da convergência. [GRAY 1984:166].

O escopo de Fredholm, descrito na memória *Sur une classe d'équations fonctionelles*, que seria publicada em 1903, fora obter uma teoria completa da equação integral (de segunda espécie) $\varphi(x) + \int K(x,t).\varphi(t).dt = \psi(x)$, sendo a integral estendida ao intervalo [0 , 1], φ a incógnita e K e ψ funções conhecidas. Fredholm acentuou (e, a esse respeito, é tido como lúcido precursor) que essa equação poderia ser considerada como *uma transformação*, dependente de K, que converte a função ϕ na função ψ. Além disso, Fredholm considerou a composição de duas tais transformações e investigou sob quais condições uma classe dessas transformações constituiria um grupo. Recorrendo a esses conceitos, construiu uma teoria análoga à teoria das equações lineares e pôde determinar sob quais condições a equação

integral vertente admitiria soluções e qual seria a dimensão do *espaço* de soluções linearmente independentes. [BERNKOPF 1965:8-9]

A palestra por Holmgren inflamou a mente de Hilbert, que devotou a década seguinte ao estudo das equações integrais. Percebeu a conexão desse quesito com a teoria do potencial e com a construção de funções de Green sob dadas condições de contorno; e reconheceu a analogia entre a determinação dos valores latentes (ou *Eigenwerte*) com a redução de formas quadráticas à forma canônica. O produto de seus estudos, nos quais sistematizou diversos teoremas anteriores e incluiu resultados contemporâneos (como o teorema da convergência de Friedrich Riesz e Ernst Fischer, de 1907), foi publicado nos *Elementos de uma teoria geral das equações integrais* [*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen*, 1912]. [STRUIK 1987:197]

Embora, nesse contexto, tenha sido concebida a noção de um espaço, dotado de produto interno, que fosse completo segundo a norma associada a esse produto interno (hoje denominado **espaço de Hilbert**), a motivação essencial de Hilbert fora forjar "uma teoria geral das equações integrais". [*Apud* BERNKOPF 1965:10]

E da apresentação feita pelo próprio Hilbert decorre que ele considerou seu método como a extensão das técnicas válidas nos espaços de dimensão finita: "O método [...] consiste em começar de um problema algébrico, a saber, o problema das transformações ortogonais de formas quadráticas em n variáveis em soma de quadrados, e, mediante rigorosa passagem ao limite, para $n = \infty$, conseguir resolver o problema transcendente considerado." [*Apud* BERNKOPF 1965:10]

O outro defluente nasceu de problemas nos quais as incógnitas das equações eram funções. Lagrange lhes reconheceu claramente a natureza, escrevendo, no *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les mimina des formules intégrales indéfinies* (1760-1761), que "por menos que se conheçam os princípios do cálculo diferencial, conhece-se o método para se encontrarem as maiores e as menores ordenadas de curvas. Existem, porém, questões de um gênero mais elevado aos quais, embora dependam do mesmo método, não se consegue aplicá-lo tão facilmente. São aqueles problemas em que se procuram as próprias curvas para as quais uma dada integral seja máxima ou mínima, relativamente às calculadas para todas as outras curvas." [*Apud* MAIA 1978:82]

Um exemplo desse tipo de problema é determinar a trajetória que conecta um ponto P a um ponto Q, descrita, em tempo mínimo, por uma partícula sujeita apenas a seu peso. (Supõe-se que os pontos P e Q não estejam em uma mesma reta vertical e que a altura do ponto P seja maior que a altura do ponto Q.) Essa incógnita foi denominada a curva **braquistócrona**. Esse problema, proposto por Johann Bernoulli em 1696, já fora discutido por Galilei que, na ausência de ferramenta adequada, não logrou resolvê-lo. Presentemente, constitui um simples emprego da equação de Euler-Lagrange. [ELSGOLTZ 1977:288; HILDEBRAND 1965:196; WEINSTOCK 1974:19-20]

Outro exemplo consiste em determinar a curva Γ, descrita sobre uma superfície regular, que circunscreve uma região Ω homeomorfa a um disco. Nesse caso, supõe-se que a curva Γ tenha comprimento fixo e que seja máxima a área da região Ω.

Problemas dessa natureza foram reunidos em uma disciplina que, desde Lagrange, se chamou cálculo das variações.

Por volta de 1879, Karl Weierstrass propôs uma definição da noção de proximidade entre duas funções. (Acredita-se que essa definição tenha constituído a primeira tentativa de se dotar uma família de funções de uma *estrutura métrica*.) [BERNKOPF 1965:34]

Dizemos que as funções f e g, definidas no intervalo J, se encontram em uma vizinhança de amplitude ε e ordem n (para $\varepsilon > 0$ e n número natural), se, para todo elemento x desse intervalo J, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ e as respectivas derivadas, até a ordem n, também satisfizerem à desigualdade análoga $|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| < \varepsilon$, para $1 \leq k \leq n$. Se apenas as funções f e g atenderem à citada desigualdade, diremos que a vizinhança tem ordem zero. [BERNKOPF 1965:34]

Apoiando-se nessa definição proposta por Weierstrass, Volterra iniciou, em 1887, a elaboração de uma teoria das *funções de linhas*. Ele fora induzido a esse questionamento por cogitações de natureza física, como a forma de uma espira que se move ou se deforma em um campo elétrico. [NACHBIN 1950:2; STRUIK 1987:196]

Volterra pôde considerar as noções de limite e de continuidade de funções cujos domínios eram famílias de funções. Volterra tentou mesmo definir a derivada de tais funções mas encontrou dificuldade. [BERNKOPF 1965:34-35]

Por outro lado, Cesare Arzelà tentou estender a teoria dos conjuntos pontuais de Georg Cantor a conjuntos cujos elementos fossem curvas ou funções. Seu interesse maior recaiu sobre o estudo de sequências de funções. [BERNKOPF 1965:34-35]

No primeiro Congresso Internacional em Zurique (1897), Jacques Hadamard proferiu uma palestra, intitulada *Certaines applications possibles de la théorie des ensembles*, na qual sugeriu que se estudassem conjuntos cujos elementos fossem funções contínuas. [GRAY 1984:151-152]

Esse programa foi parcialmente iniciado no estudo de conjuntos A de funções analíticas em uma certa região. Nesse caso, os 'pontos' ou 'vetores' desse espaço A eram as expansões em séries dessas funções. O projeto se restringiu em estudar equações do tipo $T(\alpha) = \beta$, nas quais α e β eram pontos do espaço A e T era um operador linear, e em descobrir sob quais condições não seria trivial o núcleo de tais operadores. [BERNKOPF 1965:36]

Por proposta de Jacques Hadamard, as funções cujos domínios são funções vetoriais foram nomeadas **funcionais**. Os primeiros exemplos dessa natureza já são antigos, como o funcional que a cada curva associa o seu comprimento. [FRÉCHET 1971:77]

Hadamard definiu como programa dessa nova disciplina descobrir quais os teoremas, obtidos na teoria das funções de variável real, que se poderiam estender a funções definidas em conjuntos cujos elementos já não fossem necessariamente números. Isso implicaria estender adequadamente as noções de convergência, de continuidade e de derivada de funcionais. [FRÉCHET 1971:77-78]

"Porém, para que um conjunto possa ter **qualquer analogia com um espaço**, é necessário que nele se possa instituir algum regulamento, que nele se possam reconhecer os pontos vizinhos." (19) [FRÉCHET 1962:124.] (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Guiado por essa ideia, o próprio Fréchet, na tese escrita sob a orientação de Hadamard, **axiomatizou a noção de distância** (1906), adotando como definição as propriedades usuais da distância, outrora concebida como a norma da diferença entre dois vetores: $d(A, C) = |C - A|$. Fréchet escolheu as seguintes propriedades:

(a) $\forall X, d(X, X) = 0$.

(b) $\forall A, C$, se $A \neq C$, então $d(A, C) > 0$.

(c) $\forall A, C, d(C, A) = d(A, C)$.

(d) $\forall A, X, C, d(A, C) \leq d(A, X) + d(X, C)$.

Note-se que, mediante essa definição, foram dados dois passos no procedimento de extensão conceitual. O primeiro passo consistiu na transição de conjuntos numéricos para conjuntos de funções; o segundo passo consistiu na transição de conjuntos de funções para conjuntos arbitrários, nos quais se pode definir uma função que goze das quatro propriedades anteriores. Segundo a lição do próprio FRÉCHET [1962:125], "um dos melhores meios de se raciocinar sobre elementos abstratos consiste em se empregarem, não definições construtivas, mas definições descritivas" (20).

Continua o autor, ensinando que, "pelo contrário, quando na situação considerada estiverem envolvidos somente elementos de natureza determinada, será melhor empregar uma definição construtiva". (21) [FRÉCHET 1962:125]

Assim, no conjunto das funções vetoriais contínuas definidas em D, é usual considerar-se $d(g, h) = \max \{|g(x) - h(x)|, x \in D\}$.

Por proposta de Felix Hausdorff (1912), a um conjunto não vazio dotado de uma distância chamar-se-ia **espaço métrico**.

Frigyes Riesz [1906] mostrou que "os métodos férteis da teoria dos conjuntos pontuais poderiam empregar-se na teoria dos conjuntos de funções". (22) [GRAY 1984:167]

Fréchet, então, pretendeu que a teoria dos conjuntos pontuais constituísse um caso particular de seu 'cálculo funcional'. Para isso, retomou diversas noções formuladas por Cantor, como o conceito de **derivado** de uma parte de um espaço métrico. E, para desempenhar o papel exercido pelos intervalos fechados, na análise real, Fréchet definiu os conjuntos compactos. (O conceito por ele introduzido sofreu uma pequena modificação semântica, de sorte que hoje chamamos sequencialmente compacto ao que ele chamava fechado e compacto.) [BERNKOPF 1965:37-38]

Nesse escrito de Fréchet aparece, pela primeira vez, o conjunto E_ω das sequências de números reais referido como um espaço. Nesse conjunto, Fréchet introduziu a distância entre dois pontos $A = (a_1, a_2, ...)$ e $C = (c_1, c_2, ...)$ pela expressão $d(A,C) = \Sigma(1/h!)\{|a_h - c_h|/(1 + |a_h - c_h|)\}$, para $1 \leq h < \infty$.

7.8 Sexto exemplo de definição axiomática: A teoria dos corpos valorados

Uma propriedade notável das definições axiomáticas consiste na capacidade de o conceito assim definido abranger todos os casos pretendidos e, geralmente, muitos outros que não foram inicialmente previstos pelo praticante do método axiomático.

Ilustrarei esse asserto, no caso da conceituação de **distância**, mediante o exemplo seguinte, no qual se detectam dois fenômenos, não raros na evolução da matemática: **a ressonância semântica** e **a fecundação recíproca**. No caso vertente, a fecundação recíproca ocorreu entre a teoria algébrica dos números e a teoria das funções.

Hermann Minkowski, em uma preleção acerca de Dirichlet, referiu o *outro* princípio de Dirichlet de "subjugar problemas com um mínimo de cálculo cego e com um máximo de pensamento perceptivo". Parece haver sido esse princípio que norteou a perquisição de Richard Dedekind, desde os primeiros trabalhos, e que lhe plasmou o estilo. [EDWARDS 1983:10]

O próprio Dedekind, em uma carta a Rudolf Lipschitz (de 1876), declarou haverem sido seus esforços "dirigidos a basear o trabalho não em representações ou em expressões arbitrárias mas em simples conceitos fundacionais e, desse modo, — embora a comparação pudesse soar um pouco pretenciosa — atingir na teoria dos números resultados análogos aos que Riemann obtivera na teoria das funções". [EDWARDS 1983:11]

Assim, em 1882, na *Teoria das funções algébricas de uma variável* [*Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*], Richard Dedekind e Heinrich Weber empregaram ideias

maturadas no contexto da teoria dos números algébricos. Esse trabalho pode inscrever-se no âmbito da **algebrização**, fenômeno que será comentado na segunda seção do capítulo nono.

No episódio que passo a narrar, ocorreu o movimento oposto, pois as ideias começaram a fluir da teoria das funções para a aritmética. Kurt Hensel baseou-se na técnica, finamente elaborada por Karl Weierstrass, de *representar* ou *definir* funções de uma variável complexa por séries de potências. [BASHMAKOVA & RUDAKOV 1995:269-270; CORRY 2000:33]

Hensel concentrou-se no fato de que, na vizinhança de todo ponto p, as funções algébricas de variável complexa se exprimem como uma série de potências (inteiras ou racionais) do monômio z - p. Talvez Hensel houvesse pensado que, se as funções algébricas se pudessem exprimir apenas na vizinhança do zero, a teoria correspondente encontraria as mesmas limitações que afligiam a teoria dos números algébricos; e que essas limitações talvez se pudessem eliminar, se se definissem números por séries de potências de um dado número primo, cujos coeficientes fossem resíduos *modulo* esse primo. [CORRY 2000:33]

Formalmente, escolhido o número primo p, consideremos as séries da forma $c_0 + c_1p + c_2p^2 + ...$, na qual os coeficientes c_h são inteiros racionais que atendem às condições $0 \leq c_h < p$.

Todo número natural pode ser expresso como uma série da forma $c_0 + c_1p + c_2p^2 + ... + c_np^n$. Logo, todo número natural se pode exprimir como uma série **quase nula** da forma $c_0 + c_1p + c_2p^2 + ...$, isto é, por uma série dessa forma na qual, desde um certo índice, todos os coeficientes sejam nulos. Logo, se designarmos por Z_p o conjunto das séries da forma $c_0 + c_1p + c_2p^2 + ...$ (às quais chamaremos **inteiros *p*-ádicos**), poderemos considerar que $N \subset Z_p$.

Em seguida, definamos em Z_p duas leis de composição interna (a adição e a multiplicação), de modo que a inclusão $N \subset Z_p$ seja um monomorfismo.

A fim de definir a soma $s_0 + s_1p + s_2p^2 + ...$ das séries $a_0 + a_1p + a_2p^2 + ...$ e $c_0 + c_1p + c_2p^2 + ...$, introduzamos a série auxiliar $r_0 + r_1p + r_2p^2 + ...$, definida pelas condições seguintes.

- $r_0 = 0$;
- $r_{h+1} = 0$, se $a_h + c_h + r_h < p$; $r_{h+1} = 1$, se $a_h + c_h + r_h > p-1$.

Finalmente, definimos a série $s_0 + s_1p + s_2p^2 + ...$, impondo que seja $s_h \equiv a_h + c_h + r_h \pmod p$. [Cf. MADORE 2000:2]

Note-se que, distintamente do que ocorre na adição usual de duas séries, no caso presente, a adição dos coeficientes de ordem h pode repercutir sobre a soma dos coeficientes de ordem h+1.

É imediato que a série cujos coeficientes são todos nulos (isto é, $c_h = 0$, $\forall h \in \mathbb{N}$) desempenhe o papel de elemento neutro da adição. Notemos que, além disso, todo elemento de $\mathbb{Z}_p$ admite um simétrico aditivo, isto é, se $\omega \in \mathbb{Z}_p$, existe um elemento, denotado por $-\omega$, tal, que $-\omega + \omega = 0$. A fim de obtermos a expressão da série $-\omega$, introduzamos a definição de uma série por um número natural.

Sejam n um número natural expresso como um elemento de $\mathbb{Z}_p$: $b_0 + b_1p + b_2p^2 + ... + b_mp^m$.

A fim de também se instituir um monomorfismo μ de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_p$, é necessário definir as imagens dos inteiros negativos. Ora, da condição $0 = \mu(-1 + 1) = \mu(-1) + \mu(1)$ decorre que $\mu(-1) = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + ...$. Definida a imagem $\mu(-1)$, fica definida a imagem de qualquer outro inteiro negativo, pois, para todo $z \in \mathbb{Z}$, se $z < 0$, então $\mu(z) = \mu\{(-1).(-z)\} = \mu(-1).\mu(-z)$.

Verifica-se que $< \mathbb{Z}_p, +>$ é um grupo abeliano e que $< \mathbb{Z}, +>$ é um subgrupo de $< \mathbb{Z}_p, +>$ ou, mais precisamente, $\mathbb{Z}$ está imerso monomorficamente em $\mathbb{Z}_p$.

A fim de definir o produto $m_0 + m_1p + m_2p^2 + ...$ das séries $a_0 + a_1p + a_2p^2 + ...$ e $c_0 + c_1p + c_2p^2 + ...$, introduzamos a série auxiliar $s_0 + s_1p + s_2p^2 + ...$, definida pelas condições seguintes.

- $s_0 = 0$;
- $s_{h+1} = t$, sendo tp o maior múltiplo de p que não é maior que $a_h . c_h + r_h$.

Finalmente, definimos a série $m_0 + m_1p + m_2p^2 + ...$, impondo que seja $m_h \equiv a_h . c_h + r_h \pmod p$.

Instituídas tais leis de composição interna, mostra-se que $\mathbb{Z}_p$ é domínio de integridade.

Também se mostra que $\mathbb{Z}_p/(p\mathbb{Z}_p)$ é (canonicamente) isomorfo a $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ e que, portanto, esse quociente é um corpo. Logo, $p\mathbb{Z}_p$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}_p$. Como $(p\mathbb{Z}_p)$ é o único ideal próprio de $\mathbb{Z}_p$, concluímos que $\mathbb{Z}_p$ é um anel local. [BÉLAIR 2008:1]

Devo consignar que apenas descrevi um defluente que nutriu o labor de Hensel mas não pretendi que o único motivo de Hensel haver introduzido o anel de números p-ádicos tenha sido a analogia com as séries de potências, como parecem sugerir as resenhas por MacDUFFEE [1938] e BELAIR [2008]. Apenas apontei a existência de uma analogia

entre os dois objetos, analogia essa evidente na primeira formulação dos números *p*-ádicos mas não necessária no processo genético. Aliás, o próprio Hensel declinou essa analogia, dizendo que "a analogia entre os resultados da teoria das funções algébricas de uma variável e os resultados da teoria dos números algébricos me sugeriu, há muitos anos, a ideia de, recorrendo a fatores primos ideais, substituir a decomposição dos números algébricos por um procedimento mais conveniente que correspondesse plenamente à expansão de uma função algébrica em uma série de potências, na vizinhança de um ponto arbitrário". [*Apud* KLEINER 1999B:860]

KLEINER [1998:30] sugere que Hensel se tenha inspirado no emprego, recente na última década do século XIX, das séries de potências na geometria algébrica.

O procedimento adotado por Hensel para definir os inteiros *p*-ádicos era incomum, pois ele usava séries que não convergiam (na acepção usual) e que, portanto, não representariam números, como então eram compreendidos. Por isso, havia um desconforto geral acerca desses números, duvidando-se mesmo de sua existência. [ROQUETTE 2003:6]

É possível que Josef Kürschák tenha percebido **uma analogia** entre a soma dos termos de uma série geométrica de números complexos,

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \{1/(1 - q)\}.\{(1 - q^n) + (q^n - q^{n+1}) + ...$$

e o inteiro *p*-ádico correspondente a –1, que se pode escrever

$$\mu(-1) = (p - 1) + (p^2 - p) + (p^3 - p^2) + ... + (p^{n+1} - p^n) + ...$$

No caso da série geométrica, a soma converge, quando $|q| < 1$ e, portanto, $q^n \to 0$. No caso do inteiro *p*-ádico, $\mu(-1) \to -1$, se também $p^n \to 0$. Isso obviamente não acontece, se interpretarmos $|p|$ como o valor absoluto de p. Mas uma outra interpretação é possível.

Inicialmente, em vez de definirmos o valor absoluto de um número racional m/n como max {m/n, -m/n}, substituamos essa conceituação por uma definição axiomática, que privilegie **as propriedades** da função valor absoluto. Embora o conceito de valoração já fosse usado, durante o século XIX, tanto na teoria dos números quanto na teoria das funções de variável complexa, a sua formulação axiomática somente foi proposta em 1912, por Josef Kürschák. [ROQUETTE 2003:5]

Um valor em um corpo K é uma função $v:K \to \mathbb{R}$, que goze das propriedades seguintes.

- $v(0) = 0$.
- $\forall x \in K, x \neq 0 \Rightarrow v(x) > 0$.

- $\forall$ x $\in$ K, v(1 + x) $\leq$ 1 + v(x).

- $\forall$ x, z $\in$ K, v(xz) = v(x).v(z)

- $\exists$ a $\in$ K: v(a) $\neq$ 0, v(a) $\neq$ 1.

Kürschák publicou o ensaio na língua alemã e, para designar essa função, usou o termo 'Bewertung'. Kürschák também disse que essa noção constituía uma extensão do conceito de 'valor absoluto', que fora inspirada no livro sobre números algébricos de Hensel (*Theorie der algebraischen Zahlen*, 1908) e que seu desígnio era dar aos números algébricos *p*-ádicos uma fundação sólida, semelhante à formulação do corpo dos números reais, proposta por Cantor (1872). Assim, o estímulo principal a formular uma teoria da valoração proveio da teoria dos números algébricos, enquanto o modelo dos axiomas e o método dimanaram da análise. [ROQUETTE 2003:5]

Também em 1912, foi proposta, por Adolf Fraenkel, uma outra descrição axiomática dos números *p*-ádicos, a qual foi publicada um pouco antes da de Kürschák e que, hoje em dia, está esquecida. Em suas memórias (1967), o próprio Fraenkel atribui esse esquecimento ao fato de que sua proposta de axiomatização era *puramente formal*, enquanto a axiomatização formulada por Kürschák considerava o conteúdo [*inhaltliche Begründung*] da teoria de Hensel. [ROQUETTE 2003:9] Em retrospectiva, talvez possamos dizer que **a construção proposta por Kürschák tenha sido mais sensível à atmosfera cultural contemporânea**. Outra opinião, talvez mais hagiográfica, seja afirmar que o escrito de Kürschák apontou a direção na qual outros escritos seriam lavrados.

Hoje em dia, é usual a formulação seguinte, possivelmente inspirada na noção de norma de um vetor e levemente distinta da proposta por Kürschák [MAC DUFFEE 1938:501]. Aliás, BÉLAIR [2008:2] chama norma a essa função.

- v(0) = 0.

- $\forall$ x $\in$ K, x $\neq$ 0 $\Rightarrow$ v(x) > 0.

- $\forall$ x, z $\in$ K, v(x + z) $\leq$ v(x) + v(z).

- $\forall$ x, z $\in$ K, v(xz) = v(x).v(z).

O quarto axioma implica que v(1) = 1 e que, se v $\neq$ 0, v(1/x) = 1/v(x). Do segundo e do quarto axiomas decorre que v(-1) = 1.

Notemos, finalmente, que um corpo dotado de uma função valor tem **a estrutura de um espaço métrico**. Com efeito, é suficiente definir-se d(a,c) = v(c-a), **em analogia com** o procedimento adotado nos espaços vetoriais.

Vejamos, agora, como as ideias de Hensel podem ser formuladas mediante o conceito de valoração. Inicialmente, definamos o valor (*p*-ádico) de um número racional.

Escolhido um primo p, todo número racional m/n, distinto de zero, pode escrever-se na forma $p^u(r/s)$, na qual u, r e s são inteiros racionais e mdc$\{p^u, r, s\} = 1$. Definamos, pois, $v(0) = 0$ e $v(p^u(r/s)) = p^{-u}$.

Para demonstrar que a função v, assim definida, satisfaz ao terceiro axioma, recorramos à implicação $v(x) \leq 1 \Rightarrow v(1 + x) \leq 1$.

Inicialmente, mostremos que, na presença dos outros axiomas, essa implicação é equivalente ao terceiro axioma. Com efeito, admitamos que seja válido o terceiro axioma. Assim, de $v(x) \leq 1$ decorre, pelo terceiro axioma, que $v(1 + x) \leq \max\{v(1), v(x)\} = \max(1, v(x)\} = 1$.

Reciprocamente, suponhamos que seja válida a implicação $v(x) \leq 1 \Rightarrow v(1 + x) \leq 1$. Ora, podemos supor que $x \neq 0$ e que $v(z) \leq v(x)$, o que implica ser $v(z/x) \leq 1$. Logo, poderemos escrever que $v(x + z) = v\{x(1 + z/x)\} = v(x).v(1 + z/x) \leq v(x).1 = \max\{v(x), v(z)\}$.

Mostramos, assim, que o valor *p*-ádico (a função v) é um valor no corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais e que, portanto, o corpo $\mathbb{Q}$ é dotado de uma métrica. Na verdade, essa é uma ultramétrica, por atender à condição mais forte $d(x, z) \leq \max \{d(x,u), d(u,z), \forall\ x,u,z \in \mathbb{Q}$. [BACHMAN & NARICI 1966:42]

Notemos que, consoante essa métrica, a sequência $(1, p, p^2, ...)$ converge a zero, pois a sequência dos respectivos valores *p*-ádicos converge a zero. Logo, a série $\mu(-1) = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + ...$ converge a –1.

Foi mostrado que, na definição do valor *p*-ádico, é suficiente supor $v(p^u) = \omega^u$, sendo $0 < \omega < 1$, o que confere um certo grau de arbitrariedade a essas métricas. Contudo, se consoante uma qualquer escolha de ω, ocorrer que $v(x) \to 0$, isso também ocorrerá consoante outra qualquer escolha de ω. [ITARD 1976:119] Por outro lado, essa conceituação, aparentemente mais geral, introduz a noção de ordem (ao exigir que seja $0 < \omega < 1$). Por isso, prefiro definir $v(p^u) = p^{-u}$. E assim o faz, por exemplo, BÉLAIR [2008:2].

Como ($\mathbb{Q}$, v) é um espaço métrico, podemos falar em sequências regulares (consoante a metrica *p*-ádica) e, após verificar $\mathbb{Q}$ não ser completo, podemos replicar o procedimento de plenificação adotado por Méray e Cantor.

Foi esse o próximo passo dado por Kürschák, ao definir $\mathbb{Q}_p$ como o quociente do anel das sequências regulares de termos racionais pelo anel das sequências de termos racionais convergentes a zero. (Tanto a regularidade das sequências quanto a convergência

seriam consideradas consoante a métrica *p*-ádica.) Como Kürschák não indicasse nenhuma fonte, supôs ROQUETTE [2003:6] que essa técnica fosse então bem conhecida.

O vínculo entre o procedimento adotado por Kürschák e a conceituação proposta por Hensel encontra-se na prova de que a aderência de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}_p$ coincide com $\mathbb{Z}_p$. [Cf. KIRILLOV 1982:143, n. 41]

Esse labor efetuado por Kürschák pode ser considerado a extensão aos corpos *p*-ádicos do estudo elaborado por Ernst Steinitz em sua *Algebraische Theorie der Körper* (1910). Talvez assim houvesse pensado o próprio Kürschák que, na introdução ao seu artigo, afirmou se deveria introduzir um novo conceito na teoria dos corpos. (23) [ROQUETTE 2003:6]

Os três outros passos dados por Kürschák foram a extensão a $\mathbb{Q}_p$ do valor (*p*-ádico), a construção (baseada em Steinitz) do fecho algébrico de $\mathbb{Q}_p$ e a prova (baseada em Weierstrass) de que é algebricamente fechada a plenificação de um corpo dotado de um valor e algebricamente fechado. Kürschák chamou a esse último passo 'o teorema fundamental da teoria da valoração', por esse passo corresponder, na análise clássica, à prova de que o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos seja algebricamente fechado. [ROQUETTE 2003:6-7]

A teoria da valoração foi estendida aos anéis, mediante a definição seguinte. Sejam D um domínio de integridade e K o seu corpo de frações. D é **um anel de valoração de K**, se, $\forall x \in D\backslash\{0\}$, $x \in D$ ou $x^{-1} \in D$ (sendo inclusiva a disjunção). [ATIYAH 1969:65]

O vínculo entre o conceito de **anel de valoração** e o conceito de **valor p-ádico** se institui mediante o teorema: Escolhidos um primo p e, consequentemente, um valor (*p*-ádico) v, a parte de $\mathbb{Q}$ constituída pelos números racionais cujo valor não é maior que 1 é um subanel de $\mathbb{Q}$ que contém 1. Para facilitar a linguagem, seja $V_p = \{x \in \mathbb{Q}: v(x) \leq 1\}$. É imediato que:

- $1 \in V_p$.
- $\forall a,c \in V_p$, $v(a - c) = v(a, (-c)) \leq \min\{v(a), v(-c)\} = \min\{v(a),v(c)\} \leq 1$.
- $\forall a,c \in V_p$, $v(ac) = v(a).v(c) \leq 1$.

Isso mostra que V_p é um subanel de $\mathbb{Q}$. Para mostrar que V_p é um anel de valoração, tomemos $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Escrito na forma $x = p^u(r/s)$, será $v(x) = p^{-u}$. Se $u = 0$, então $v(x) = 1$. (Os elementos que atendem a essa condição são inversíveis em V_p.) É imedianto que, se $u \neq 0$, serão $u > 0$ e $v(x) < 1$ ou $u < 0$ e $v(x^{-1}) < 1$.

E o vínculo entre o conceito de **anel de valoração** e o conceito de **anel local** se institui mediante as seguintes ideias.

Sejam K um corpo, Ω um corpo algebricamente fechado e Σ o conjunto de todos os pares (A,f), nos quais A é um subanel de K e f um homomorfismo de A em Ω. Podemos instituir uma ordem (parcial) sobre Σ, impondo que $(B_1,g_1) \leq (B_2,g_2)$, se e somente se $B_1 \subset B_2$ e $g_2/B_1 = g_1$. Como satisfizemos às condições do lema de Zorn, Σ admite um elemento maximal (C,h). Resta provar que C é um anel de valoração de K, o que se faz através das proposições seguintes.

- C é um anel local e seu ideal maximal é o núcleo de h. [ATIYAH 1969:65]
- C é um anel de valoração do corpo K.
- Seja S um qualquer subanel do corpo K. Então o fecho inteiro S é a interseção de todos os anéis de valoração de K que contêm S. (O fecho inteiro de S é constituído dos elementos de K que são inteiros sobre S, isto é, dos elementos de K que são raizes de polinômios mônicos cujos coeficientes estão em S.) [ATIYAH 1969:60, 65-66]

7.9 Conclusão

Através dos seis exemplos expostos, foi apresentado o emprego do método axiomático, tanto na formulação de teorias pretensamente únicas (como o sistema dos números naturais e o corpo dos números reais), quanto em teorias gerais (como os reticulados, os espaços topológicos, os espaços vetoriais dotados de produto interno e os corpos valorados).

7.10 Fontes

(1) *These achievements* [the achievements of the nineteenth century] *may be thought of in many ways. From one perspective, they were of two overlapping kinds: some enlarged the sphere of mathematics; some performed existing tasks better than before.* [...] *From another perspective, some of these discoveries helped bring about, and others helped deepen, areas of application of mathematics, be they traditional or new.* [...] *A third perspective would stress the growing abstraction of mathematics in the nineteenth century, and would point to shifts in its foundations. [...] Examples will be given below to show that it did indeed seem to many people at the time that mathematics was moving away from reality, [...] into the habit of supplanting intuitive concepts [...] with an opaque language of mathematical analysis that brought rigor at a high cost in intelligibility.* [GRAY 2004:24]

(2) *Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites — les structures mathématiques; et il se trouve — sans qu'on sache bien pourquoi — que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine*

un contenu intuitif bien déterminé; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur. [BOURBAKI 1962:46-47]

(3) *A mathematician setting out to construct a proof has in mind well defined mathematical objects which he is investigating at the moment. When he thinks he has found the proof and begins to test carefully all his conclusions, he realizes that only a very few of the special properties of the objects under consideration played a role in the proof at all. He thus discovers that he can use the same proof for other objects which have only those properties he had employed previously. Here we can see the simple idea underlying the axiomatic method: instead of declaring which objects are to be investigated, one has to list those properties of the objects to be used in the investigation. These properties are then brought to the fore expressed by axioms; whereupon it ceases to be important to explain what these objects are, that are to be studied. Instead, the proof can be constructed in such a way as to hold true for every object that satisfies the axioms. It is quite remarkable how the systematic application of such a simple idea has shaken mathematics so completely.* [Henri Cartan (1958), *apud* CORRY 1997A:273]

(4) *Axioms are designed to temporarily isolate a class of problems for which you can then develop techniques of solution. Some people think of axioms as a way of defining a whole area of mathematics that is self-contained. That I think is wrong. The narrower the axioms, the more you cut out. When you abstract something in mathematics, you separate out what you want to concentrate on and what you regard as irrelevant. Now that may be convenient for a while; it concentrates the mind. But by definition, you have cut away a lot of things you said you are not interested in and, in the long run, that has cut a lot of roots. You can develop something axiomatically, then at some stage you should return it to its origin, merging and producing cross-fertilization.* [ATIYAH 1984:12]

(5) *The words* apodeixis *and* epideixis *have almost the same etymological root and for many centuries were utterly indistinguishable. It's only the Platonist philosophers who, patterning their speech from the resulting effect on persuasion of geometrical demonstrations, introduced into philosophy a radical differentiation between one way of being convinced (by rigorous demonstrations), apodeixis, and another way, which relied on flourishes of rhetoric, sophistry, poetry, imagination and political manoeuvring, epideixis. Was this the real effect of philosophical practices? [...] It is as though Plato extracted no more than a style of conviction from geometry and added to it a totally unrelated content; it is as though the type of persuasion mathematicians obtained at great pains (because they limited themselves to forms) could nonetheless be reached, at almost no demonstrative cost, by philosophers with regards to what they saw as the only relevant content! A mimicry of mathematics, just sufficient enough to boot the Sophists out of philosophy.* [LATOUR 2008:445-446]

(6) *D'abord, les mathémariques classiques constituent l'exemple par excellence, voire l'exemple unique, d'une théorie déductive au sens de la théorie des sciences d'Aristote.* [BETH 1955:4}

(7) *If there were logical mistakes in non-Euclidean geometry, then they could be detected in projective geometry, and few mathematicians were willing to admit such a heresy.* [STRUIK 1987:178]

(8) *Herr Hjelmslev erwähnt dabei mein Buch:* Vorlesungen über neuere Geometrie, *1882, in dem ich ja versucht habe, die Geometrie (unter Ausschlusz der krummen Gebilde) empiristisch zu begründen*

[...]. (O senhor Hjelmslev referiu meu livro, *Preleções sobre a nova geometria*, 1882, no qual realmente tentei fundar empiricamente a geometria (com exceção das imagens curvas).

(9) *Zum Schlusse noch einige Worte über das Wesen der geometrischen Axiome überhaupt. In der mathematischen Literatur zum mindesten scheint mir betreffs derselben fast allgemein eine Ansicht verbreitet, die von derjenigen abweicht, die ich für richtig halte [...]. Die betreffende Ansicht geht dahin, dasz die Axiome die 'Thatsachen' der räumlichen Anschauung formulieren und zwar so vollständig formulieren, dasz es bei geometrischen Betrachtungen unnötig sein soll, auf die Anschauung als solche zu rekurrieren, es vielmehr genügt, sich auf die Axiome zu berufen. Ich möchte zunachst jedenfalls den zweiten Teil dieses Satzes bestreiten. Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich.* [KLEIN 1890:380-381]

(10) *In meinem Aufsatze über den allgemeinen Funktionsbegriff [...], habe ich ausfürlich auseinandergesetzt (und hierin stimme ich mit Hrn. Pasch überein), dasz ich die räumliche Anschauung als etwas wesentich ungenaues ausehe, — mag nun von der abstrakten Anschauung die Rede sein, wie sie uns durch Gewöhnung geläufig geworden ist, oder von der konkreten Anschauung, die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt. Das Axiom ist mir nun die Forderung, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung genaue Aussagen hineinlege. Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, dasz wir die Figur, um welche es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten, und uns dann in jedem Augenblicke, in dem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome als festes logisches Substrat zurückbeziehen.* [KLEIN 1890:381]

(11) [...] *ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi.* [Giuseppe Veronese, *apud* BOTTAZZINI 2001:301]

(12) *Insbesondere war es ein von Zermelo und Russell gefundener Widerspruch, dessen Bekanntwerden in der mathematischen Welt geradezu von katastrophaler Wirkung war. Angesichts dieser Paradoxien gaben Dedekind und Frege ihren Standpunkt tatsächlich auf und räumten das Feld: Dedekind trug lange Bedenken, von seiner epochemachenden Abhandlung* "Was sind und was sollen die Zahlen" *eine Neuauflage zuzulassen; und auch Frege hat die Tendenz seines Buches* "Grundgesetze der Arithmetik" *als verfehlt erkennen müssen, wie er in einem Nachwort gesteht.* [HILBERT 1926:169] Traduzi a locução '*katastrophale Wirkung*' por '*efeito devastador*', já que, presentemente, o qualificativo '*catastrófico*' evoca outro gênero de ideias.

(13) *Ore's idea was that this object L pictured the real 'structure' of the group or ring in question. Subsequently the word 'structure' in this axiomatic sense has been dropped, in favor of the word 'lattice' — but a lattice of subobjects is still regarded as a description of structure.* [MAC LANE 1996:178]

(14) [...] *les axiomes de Peano peuvent être satisfaits non seulement par nos nombres naturels familiers mais par certaines structures très étranges, les fonctions de Skolem, qui sont loin d'être isomorphes à l'ensemble des nombres naturels.* [DUMONCEL 2002:122]

(15) *It is one of the greatest triumphs of mathematics that it has somehow managed to turn continuity into a genuinely precise and sharply defined concept as no other academic area of cognition has, although to begin with, continuity is not a peculiarly mathematical category of cognition at all. Rather, to begin with, it is a*

sprawling all-pervading notion, occurring in all precincts of perception and intellection, ideation and abstraction; and outside of mathematics, it is ambiguously conceived and loosely applied, and it merges and fuses with neighboring concepts, like uniformity, steadiness, constancy, etc., all of which have, in mathematical context of today, definitions of their own. [BOCHNER 1974:840]

(16) *Those ultimate ratios* [...] *are not actually ratios of ultimate quantities, but limits* [...] *which they can approach so closely that their difference is less than any given quantity* [...].[POURCIAU 2001:19]

(17) *It was not generally accepted, however, that the nonreal roots produced this way were complex, and those roots were simply called 'imaginary', as were the nonreal roots of all polynomials.* [BALTUS 2004:415]

(18) *Il est à remarquer que dans les demonstrations precedentes, on n'a point supposé que la racine imaginaire du multinome, eût ou pût avoir une expression imaginaire, avant de la reduire à* $p + q\sqrt{-1}$. [BALTUS 2004:416]

(19) *Mais pour qu'un ensemble puisse avoir quelque analogie avec un espace, il faut établir quelque ordre dans cet espace, il faut qu'on puisse y reconnaître les points voisins.* [FRÉCHET 1962:124]

(20) *Un des meilleurs moyens pour raisonner sur des éléments abstraits, consiste à employer, non pas des définitions constructives mais des définitions descriptives.* [FRÉCHET [1962:125]

(21) *Au contraire, quand on a affaire seulement à des éléments d'une nature déterminée, il vaudra mieux employer une définition constructive.* [FRÉCHET 1962:125]

(22) *He argues that "the fertile methods of the theory of sets of points can be applied to the theory of sets of functions*". [GRAY 1984:167]

(23) *In dieser Abhandlung soll in die Körpertheorie ein neuer Begriff eingeführt werden.* [*Apud* ROQUETTE 2003:6]

Capítulo oitavo

Dos tipos e dos estilos de argumentação

"Sempre defendi e, algumas vezes, submeti em artigos a opinião de que a matemática seja uma ciência que, em analogia com a física, apresenta um aspecto experimental e um aspecto teórico mas que opera em um mundo intelectual de objetos, conceitos e ferramentas. *Grosso modo*, o aspecto experimental consiste na investigação de casos especiais, quer por apresentarem interesse em si mesmos, quer por constituírem a esperança de neles se encontrar um indício de um fenômeno geral; e o aspecto teórico consiste na busca de teoremas gerais. É claro, exijo que tais teoremas sejam provados e repudio categoricamente uma divisão da matemática em duas partes, uma dotada de provas e a outras destituída delas." (1) [Armand BOREL 1994:180]

"Embora o termo 'prova' seja o mais importante na matemática, não admite uma definição exata. A noção completa de prova, com todas as ramificações, está mais próxima do domínio da psicologia que do reino da matemática." (2) [USPENSKY 1982:10-11]

"A própria aceitação de um raciocínio como válido ou correto é, até certo ponto, uma questão de consenso; o que é admitido hoje poderá não ser aprovado pelos critérios de rigor em voga amanhã." [LIMA 1986:29]

"Quando Gauss diz que demonstrou alguma coisa, isso me parece muito provável; quando Cauchy o afirma, tanto podemos apostar nisso quanto no contrário; quando Dirichlet o declara, é certo." (3) [Carl Jacobi, em carta a von Humboldt, de 21 de dezembro de 1846, *apud* DUGAC 1986:266; DUGAC 1973:50]

"Devemos ficar desconfiados, sempre que uma prova provar mais do que o permitem o seus recursos." [Ludwig Wittgenstein, *Remarks on the foundations of mathematics*, *apud* GEORGE 1985:75]

Sumário

8.1 Antelóquio

8.2 A origem da ideia de demonstração

8.3 Os argumentos diretos e os argumentos indiretos

8.4 As provas de existência

8.5 As provas por recorrência

8.6 As definições por recorrência

8.7 Tipos de provas

8.8 Da pluralidade das provas

8.9 Aspectos perceptivos

8.10 A visão e o tato como sentidos complementares

8.11 As fases do processo gnoseológico

8.12 O problema da prova

8.13 Argumentos usados na legitimação das teorias matemáticas

8.14 Conclusão

8.15 Fontes

8.1 Antelóquio

Os adeptos do empiricismo lógico enfatizaram a distinção entre os quesitos pertinentes ao descobrimento das teorias científicas e os quesitos atinentes a teorias científicas já elaboradas. [WORRALL 1974:212]

Todos esses pensadores estiverem acordes em que somente os últimos quesitos competissem à filosofia e que os primeiros constituíssem um problema puro da psicologia.

Também Karl Popper manteve o afastamento entre o contexto de invenção e o contexto de justificação, afirmando explicitamente que "o ato de conceber ou inventar uma teoria não lhe parece reclamar análise lógica nem ser dela suscetível. A questão de saber como uma ideia nova ocorre ao ser humano — trate-se de uma tema musical, de um

conflito dramático ou de uma teoria científica — pode revestir-se de grande interesse para a psicologia empírica mas não interessa à análise lógica do conhecimento científico. Essa última diz respeito não a questões de fato (o *quid facti?* de Kant) mas apenas a questões de justificação ou validade (o *quid juris?* de Kant). Suas indicações são do tipo seguinte: Pode um enunciado ser justificado? No caso afirmativo, como? É suscetível de prova? Depende logicamente de outros enunciados? Ou talvez os contradiga?" [POPPER 1993:31]

Em matemática, a operação essencial efetuada no contexto de justificação consiste na prova de teoremas e, embora seja nítida a distinção conceitual entre os contextos de descobrimento e de justificação, em diversos casos o descobrimento de novos teoremas e a adução de novas conjecturas permearam a verificação ou a falsificação de teoremas antigos.

Tem sido sugerida uma analogia entre a matemática e a física fundada no fato de que os físicos verificam ou falsificam as hipóteses mediante experimentos enquanto os matemáticos verificam os teoremas mediante uma prova ou os falsificam mediante a exibição de contraexemplos. Nas palavras de JAFFE & QUINN [1993:2], "as provas se prestam a dois escopos. Primeiro, as provas fornecem um instrumento que certifica a confiança nos assertos matemáticos, do mesmo modo que a verificação em laboratório fornece um critério em outras ciências. Segundo, o ato de encontrar uma prova frequentemente fornece como subproduto novas percepções e novos dados imprevistos, exatamente como o fazem os trabalhos em laboratório." (4)

Essa analogia é sedutiva também por equiparar as possíveis deficiências no tratamento experimental dos fenômenos físicos às falhas humanas cometidas na argumentação que pretende comprovar os teoremas.

No curso do presente escrito, adotarei a distinção entre **prova** (e **demonstração**) e **dedução**. O vocábulo 'dedução' [*derivation*] (ou a locução 'prova formal') designará um procedimento sintático específico descrito em Lógica. Assim, uma dedução em uma teoria formal é uma sequência finita de fórmulas compostas consoante as regras do cálculo lógico adotado. [KREISEL 1968:321]

O termo 'prova' denotará um procedimento conceitual, praticado em matemática, cujo objetivo é outorgar rigor ao raciocínio. Ora, assim como o nível de rigor exigido evolve no curso do tempo, o conceito de prova também se reveste de historicidade. Por isso e também porque "o significado e o escopo do termo 'prova' não estão fixados por uma definição técnica, o quesito da prova constitui, *par excellence*, um tema destinado à reflexão e à análise filosóficas". (5) [RAV 1999:11]

No presente escrito, o termo 'prova' tem sido usado como sinônimo de 'um argumento matemático convincente'. Também o vocábulo 'demonstração' é um termo técnico, que designa um tipo de dedução. Mas ao longo deste escrito, '**demonstração**' significa apenas a produção de uma prova.

Adotada essa nomenclatura, podemos afirmar que os matemáticos *não* deduzem teoremas e que uma prova (matemática) de um teorema pode servir como roteiro informal

dos passos que podem ser dados, a fim de se obter uma dedução do citado teorema. RAV [1999:11-12] informa que tem sido sugerida a locução *tese de Hilbert* (melhor seria *conjectura de Hilbert*) para designar a conjectura de que toda prova matemática se possa converter em uma dedução lógica, no âmbito de um sistema formal adequado. Observa ainda esse autor que, se existir uma tal ponte entre o domínio das provas matemáticas e o domínio das deduções lógicas, ela forçosamente admitirá apenas o tráfego no sentido indicado, pois será impossível, apoiando-se em uma dedução lógica, restaurar-se a prova matemática, na qual estão entretecidos elementos semânticos, relações contextuais e significados técnicos. "Transposta a ponte de Hilbert e alcançada a terra dos símbolos privados de significado, encontrar-nos-emos em um jogo de manipulações simbólicas e, como esses símbolos não representam significados, não podemos retornar pela ponte de Hilbert e recuperar os significados com base na sequência de símbolos que denotam deduções formais." (6) [RAV 1999:12]

RAV (*ibidem*) recorre à metáfora da radiografia, para representar o papel da dedução lógica. Se estivermos interessados, para efeito de diagnóstico, na estrutura óssea de um animal, a radiografia fornecerá dados relevantes mas não permitirá reconstruir-lhe a imagem corporal. A meu ver, embora esclarecedora, essa metáfora peca, por não acentuar a riqueza de conteúdo semântico definitivamente perdido, ao se cruzar a ponte conjetural de Hilbert.

Enfim, foi apontada a oposição entre a prova matemática e a dedução lógica, para esclarecer que o presente capítulo não pretende tratar da **teoria da dedução**, importante ramo da Lógica, mas apenas refletir sobre alguns **aspectos das provas matemáticas**.

Essa reflexão, contudo, não incidirá apenas sobre as provas acabadas mas se exercerá também sobre as demonstrações, isto é, o processo de construção das provas. Por isso, serão também aduzidos aspectos gnoseológicos da invenção matemática.

8.2 A origem da ideia de demonstração

Segundo o historiador grego Heródoto de Halicarnasso (484 a.C - 420 a.C), a geometria nascera no Egito, para atender às exigências de agrimensura impostas aos arpedonaptas, obrigados a retraçar os limite dos lotes agrícolas, após as inundações anuais do rio Nilo. Os documentos mais abrangentes do saber geométrico egípcio são o papiro Rhind e o papiro de Moscovo, que registram regras para calcular a área de algumas figuras planares (como o triângulo, quadriláteros e o disco) e o volume de alguns corpos (como o cubo, o paralelepípedo, o tronco de cilindro circular e o tronco de pirâmide de base quadrangular). Da eficácia desse saber geométrico dão eloquente e irrefragável testemunho as pirâmides associadas aos faraós Quéope, Quefrém e Micerino. [COOLIDGE 1940:9-13; GERMAIN 1962:228; GODEAUX 1960:9-10; SOMMERVILLE 1958:1; STRUIK 1987:22]

Segundo uma tradição conservada pelo escritor grego Diógenes Laércio, que viveu pelo século III d.C., a geometria foi transmitida aos gregos por Tales de Mileto, que

viajara pelo Egito, relato esse que se deve acolher com cautela pois também de outros intelectuais gregos (como Solão de Atenas e Demócrito de Abderos) se narram viagens do Egito, país que fora considerado pelos gregos como "um repositório de conhecimento invulgar". [LAÉRCIO 1988:19; MOMIGLIANO 1991:11; SERRES 1990:170]

Essa mesma tradição atribui a Tales de Mileto a prova de alguns fatos geométricos mas, na primeira fase evolutiva da matemática grega, a prova consistia em tornar evidente [< *e* + *vidêre* = ver] ou visível a veracidade de uma sentença. A isso chamava-se **método epagógico**. [OTTE 2006:127-128]

Segundo o testemunho de Proclo de Constantinópole, para provar visualmente (empregando, pois, o método epagógico) a congruência entre os dois triângulos obtidos de um triângulo isósceles, ao se traçar a bissetriz do ângulo cujos lados fossem congruentes, Tales dobrava ao longo dessa bissetriz uma figura concreta de um tal triângulo. Ainda segundo Proclo, dobrando a figura concreta de um disco ao longo de um qualquer diâmetro, Tales teria provado visualmente que todo diâmetro de um disco o divide em duas partes congruentes. [COOLIDGE 1940:25; MOSTERÍN 1984:25]

Desse modo, Tales parece haver vislumbrado a primazia do conceito de congruência, que desempenharia papel decisivo no pensamento geométrico.

Na fase evolutiva seguinte, a ênfase foi transferida para o **método apagógico**, que consistia em fornecer um argumento, contruído mediante o encadeamento de proposições, o qual sustentasse a sentença considerada. Conjuntamente, esses dois métodos apontam para dois aspectos da atividade intelectual: a perceptual e a conceitual. [OTTE 2006:121]

Ainda não se pôde precisar, quando o saber geométrico se converteu em um corpo de proposições sequencialmente articuladas. Atribui-se à escola jônica e à escola pitagórica a substituição dos enunciados de fatos empíricos insulados por uma cadeia de proposições, na qual cada proposição ocupava um lugar definido e era inferida das proposições que a antecediam. Dessa fase histórica resta-nos apenas um fragmento, os *Elementos*, do filósofo jônico Hipócrates de Quios (*circa* 430 a.C.). [KAGAN 1986:120; SOMMERVILLE 1958:1; STRUIK 1987:39-40]

Nesses *Elementos* de Hipócrates, os juízos se classificavam em dois tipos, conforme a sua veracidade se instituísse empírica ou dedutivamente. [SMOGORZHEVSKI 1976:12]

Mas podemos supor que essa conversão do saber geométrico, de um corpo de regras empíricas em um corpo de juízos sequencialmente articulados, tenha sido contemporânea com a instituição da *polis* e com a concomitante ascensão da palavra, *logos*, a ferramenta de poder: "A arte *política* é essencialmente exercício da linguagem; e o *logos*, na origem, toma consciência de si mesmo, de suas regras, de sua eficácia, através de sua função política." [CHÂTELET 1994:17; VERNANT 1984:35]

Para ensinar a técnica de uso da palavra, surgiram os sofistas, mestres da retórica, e, dentre eles, o arquissofista Sócrates (como o apelidou o poeta cômico Aristófanes). Segundo um diálogo de Platão, denominado *Laques*, a Sócrates devemos a invenção "de uma coisa nova que, vinte e quatro séculos depois, seria denominada o conceito". [CHÂTELET 1994:20].

O citado modo de se articularem proposições apresenta dois aspectos. Em primeiro lugar, cada teorema, por se deduzir das proposições anteriores, se liberava de qualquer verificação empírica, reservada apenas às proposições primeiras, que, inicialmente, se escolheriam por sua evidência e por sua simplicidade. Em segundo lugar, a possibilidade de se obterem enunciados de proposições geométricas, independentemente da comprovação experimental, provocou um progresso muito mais rápido e permitiu que o acervo de enunciados se enriquecesse ao ponto de discorrer sobre noções cuja elaboração não se efetuaria no nível puramente empírico e cuja verificação seria inexequível empiricamente. [KAGAN 1986:120; SMOGORZHEVSKI 1976:12]

Essa ausência de verificação empírica exigiu que o modo de argumentação fosse adequadamente sistematizado, sistematização essa que, possivelmente, foi intensamente discutida na Academia de Platão de Atenas.

Com efeito, conta-se que, após escrever o diálogo *Protágoras*, no qual se opõem as opiniões desse filósofo e as de Sócrates, Platão se sentiu insatisfeito em apenas confrontar os supostos saberes de sofistas e de políticos e desejou encontrar base sólida para fundamentar o seu pensamento. Parecendo-lhe que os geômetras teriam algo por lhe oferecer, Platão viajou a Cirene (na costa africana), onde assistiu às preleções de Teodoro, o qual perseguia a classificação dos quadrados, conforme a comensurabilidade entre a grandeza do lado e a unidade. Em seguida, foi à Itália, onde estudou com Arquitas de Tarento, criador da teoria das médias proporcionais (a qual seria, posteriormente, exposta no tomo VIII dos *Elementos* de Euclides) [LAÉRCIO 1988:72, 103]; MOSTERÍN 1984:170, 182; RUSSELL 1945:209].

Regressando a Atenas, Platão fundou a Academia, onde se cultivava a matemática, em oposição à escola de Isócrates, cujo ensino era dirigido à política. Na Academia ensinou o geômetra Teeteto de Atenas, que concluiu o estudo dos números irracionais desenvolvido por Teodoro de Cirene, descobriu o octaedro e o icosaedro e mostrou existirem apenas cinco sólidos regulares. (Essas teorias seriam, posteriormente, explicadas nos tomos X e XIII dos *Elementos* de Euclides.) [AABOE 1984:64; MOSTERÍN 1984:172, 188; RUSSELL 1945:147]

O asserto de que Teodoro houvesse descoberto dois dos cinco poliedros regulares deve ser lido *cum grano salis*. Sabe-se que diversas substâncias se apresentam naturalmente em formas cristalinas, das quais algumas são regulares, como o hexaedro. BABOR & IBARZ [1960:84] ensinam que o cloreto de sódio e o fluoreto de cálcio ocorrem na forma de hexaedro regular. Por sua vez, do sulfeto de ferro (ou pirita, FeS_2), que se apresenta como dodecaedro, havia jazidas na *Magna Graecia* (sul da Itália). [STRUIK 1987:41-42] Isso nos leva a buscar a origem dos 'sólidos platônicos' na mineração primitiva.

Também na Academia professou aulas o notável geômetra Eudoxo de Cnido, que elevou o nível de rigor nas demonstrações, criou a teoria das proporções (tomo V dos *Elementos*) e elaborou o método de exaustão (tomo XII dos *Elementos*), baseado em um critério que permitiu refutar as aporias de Zenão de Élea. [AABOE 1984:64; MOSTERÍN 1984:175]

Vale lembrar que as supostas antinomias indicadas por Zenão de Élea (bem como as discussões conduzidas por diversos sofistas) lançavam dúvida acerca da adequação do raciocínio, expresso na linguagem, como ferramenta para se atingir a verdade. Tais discussões constituíam uma "arma dialética e destrutiva", que "conturbava as primeiras especulações dos matemáticos acerca das relações no espaço ou no tempo, proibindo ao espírito humano alcançar a inteligência de uma quantidade pela medida das suas partes". (7) [BRUNSCHVICG 1972:154]

No caso do argumento da dicotomia, por exemplo, Zenão afirmava que, a fim de transpor um percurso de comprimento L, o móvel teria de transpor, antes, a metade desse percurso (de comprimento L/2) e, antes de transpor a sua metade, teria de transpor a sua quarta parte (de comprimento L/4) etc. Daí pretendia concluir Zenão pela impossibilidade do movimento, conclusão essa constantemente contestada pela experiência. Ora, diriam os adeptos de Zenão, se a razão mostra que o movimento não existe e a experiência mostra que essa ilação é falsa, então a razão não é confiável.

Mas esse argumento de Zenão se reduzia, em última instância, à suposição de que fosse infinita a soma da série 1/2 + 1/4 + 1/8 + ..., opinião que, por suas consequências, pode causar admiração mas que é facilmente confutável.

Aliás, não é tão raro que alguns pensadores se ancorem em um erro para construir um argumento. Ainda no século XVII, o argumento de Zenão era retomado por diversos críticos da matemática, consoante informa BRUNSCHVICG [1972:154]. E RUSSELL [1972:804, 829] denuncia que os adeptos de Georg Hegel e os prosélitos de Henri Bergson, respectivamente, sob a égide da razão e da intuição, veneram prejuízos de ignorantes da matemática.

A impressão profunda que a matemática causou a Platão é patente no seu asserto de que é ignominioso o desconhecimento da teoria das grandezas incomensuráveis, mal merecendo o qualificativo de humano aquele que a ignora. Também é sintomática a interdição ao ingresso na Academia daqueles que não se interessassem pela geometria. [LANCZOS 1970:21; RUSSELL 1945:209-210]

A mais famosa dentre as concepções platônicas é a doutrina de que existem formas inteligíveis, *intemporais e inalteráveis*, como a reta e o círculo, e formas sensíveis, *sujeitas ao fluxo perpétuo do tempo*. Essa concepção possui origem nitidamente geométrica e tem influenciado os pensadores até o presente. [MOSTERÍN 1984:215; GARCIA 1987:121; RUSSELL 1945:37]

No livro VI da *República*, Platão põe na boca de Sócrates a declaração de que "aqueles que se dedicam à geometria, à aritmética ou às outras ciências do mesmo gênero [...] usam figuras visíveis e raciocinam sobre elas, pensando, não nessas mesmas figuras, mas nos originais que elas reproduzem. [...] Todas essas figuras que modelam ou desenham [...], eles se servem delas como de tantas outras imagens, para tentar ver esses objetos em si mesmos que, efetivamente, só podem ser percebidos pelo pensamento." [PLATÃO 1997:222-223]

Não se deve, porém, supor que o estudo desinteressado da geometria constituísse um *modus cogitandi* característico de toda a cultura grega. Dois séculos antes de Platão, Tales de Mileto teria calculado a altura de uma das pirâmides, mediante a medida do comprimento de sua sombra. [LAÉRCIO 1988:19] E, quinze anos após o óbito de Tales, o engenheiro Eupalino recorrera à semelhança de triângulos, para construir um aqueduto através de um monte na ilha de Samos [van der WAERDEN 1968].

Além disso, na geometria de Tales ainda não existia a distinção entre grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. Segundo Paul Tannery (*apud* GODEAUX 1960:11), na escola pitagórica, os pontos tinham extensão, consoante a intuição empírica de um pequeno grão de areia; uma linha era concebida como um fio mais ou menos tênue; e uma superfície era imaginada como um véu mais ou menos espesso. Assim, no curso de dois séculos, se processou, no âmbito da geometria, a transição do discurso sobre objetos sensíveis para o discurso acerca de conceitos.

Aristóteles de Estagiros aprimorou o método de argumentação usado na Academia e, na obra *Primeiros Analíticos*, expôs a teoria do silogismo, definido como "um discurso (*logos*) no qual, sendo postas certas coisas, algo distinto dessas coisas resulta necessariamente, por consequência apenas dessas coisas". [CHÂTELET 1994:44]

Esse discípulo dissidente de Platão conservou do mestre a admiração pelo processo dedutivo e o erigiu em fulcro da sua teoria das ciências.

Já foi comentado (no sétimo capítulo desta tese) que, na obra *Segundos Analíticos*, Aristóteles formulou o cânone de uma ciência dedutiva.

Adotariam um paradigma formalmente semelhante à concepção peripatética Baruch Spinoza (*Ethica, geometrico more demonstrata*, 1677), Isaac Newton (*Naturalis philosophiae principia mathematica*, 1687) e Alphonsus de Liguori (*Theologia moralis*, 1753-1755).

Nesses tratados bem como nos *Elementos* de Euclides de Alexandria é manifesto o papel dos argumentos construídos mediante o encadeamento de proposições. No restante do presente capítulo, descrever-se-ão os tipos de técnicas de prova usualmente empregadas na literatura matemática e discutir-se-ão outros temas associados à produção das provas.

8.3 Os argumentos diretos e os argumentos indiretos —

As provas baseiam-se, essencialmente, em dois princípio lógicos, o *modus ponens* (que conforma os argumentos *diretos*) e o *modus tollens* (que conforma os argumentos *indiretos*), os quais se podem exprimir, respectivamente, pelas fórmulas

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

$$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p\ .$$

É bastante comum o argumento denominado 'prova por contradição' ou 'prova por redução ao absurdo' (*reductio ad absurdum*), que se exprime pela fórmula

$$(((p \to r) \wedge (q \to \neg r)) \wedge p) \to \neg q\ ,$$

na qual a proposição r é arbitrária.

Talvez o exemplo mais antigo que se conheça desse tipo de argumento foi apresentado por Aristóteles de Estagiros, para demonstrar que a medida do lado de um quadrado e a medida da diagonal desse mesmo quadrado não são grandezas comensuráveis ou, dito de outro modo, a razão entre tais medidas não é um número racional. Uma alusão feita por Aristóteles (nos *Primeiros Analíticos* I, 23) permite supor que esse argumento já fosse conhecido pelos pitagóricos. [*Apud* BRUNSCHVICG 1972:47]

Para simplificar o argumento, tomemos um quadrado cujos lados meçam uma unidade.

De fato, seja p = 'Dois números naturais admitem um maior divisor comum.'. (Esse fato é válido em todo anel euclidiano. Cf. HERSTEIN 1964:106.)

Sejam também q = 'A medida considerada é o número racional a/c.' ,

r = 'O número racional a/c pode ser representado pela razão m/n de dois números naturais cujo maior divisor seja igual a 1.' ,

s = 'O quadrado de um número ímpar é ímpar.' ,

t = '$m^2 = 2n^2$.',

u = 'O número m é par.' ,

v = 'O número n é par.'

O argumento consiste nos passos seguintes:

De q (e do teorema de Pitágoras) decorre t.

E de s e t decorre u.

Finalmente, de s e u (na presença de t) decorre v. Mas u e v implicam $\neg r$.

Esse exemplo simples revela um dos motivos de a Matemática não se reduzir à Lógica: Não se conhece critério lógico que permita escolher a proposição auxiliar r.

Um outro exemplo, também antigo, do emprego desse método, encontra-se na prova, fornecida por Euclides, de que seja infinito o conjunto dos números primos ou, na versão portuguesa do enunciado proposto pelo próprio geômetra, "há mais números primos do que qualquer quantidade designada de números primos". [AABOE 1984:65-66]

Nesse caso, q denota a proposição 'o conjunto dos números primos é finito e a sua cardinalidade é n'. Representando por $p_1, ..., p_n$ tais números primos, toma-se $m = 1 + \Pi p_h$, $1 \leq h \leq n$. Verifica-se que m não é divisível por nenhum dos números primos considerados.

Um terceiro exemplo é a demonstração (atribuída a Johann Bernoulli) de que a série $1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$ é divergente. Nesse caso, a proposição q consiste no asserto de que exista um número A que seja igual a $1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$.

De fato, notando que $A = 1/2 + 2/6 + 3/12 + 4/20 + 5/30 + ... = (1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + ...) + (1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + ...) + (1/12 + 1/20 + 1/30 + ...) + (1/20 + 1/30 + ...) + (1/30 + ...) + ... = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + ... = S_1 + (S_1 - 1/2) + (S_2 - 1/6) + (S_3 - 1/12) + (S_4 - 1/20) + ... = 1 + (1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ...) = 1 + A$.

Assim, reproduzindo apenas o primeiro e o último termos, obtemos $A = 1 + A$, igualdade a que não satisfaz nenhum número A (contradizendo o prejuízo de que existisse um número A igual a $1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$).

Cabe lembrar que, na época em que essa prova foi proposta, ainda não se conhecia o fenômeno depois denominado **convergência comutativa**. Dizemos que a série Σa_n é *comutativamente* convergente, se ela for convergente e se, dada uma qualquer bijeção $\phi: N \rightarrow N$, a série $\Sigma a_{\phi(n)}$ também for convergente e ambas apresentarem a mesma soma. (Cf. LIMA, *Análise I*, p. 117.)

Pierre de Fermat inventou um argumento, denominado **método do descenso infinito** (*méthode de la descente infinie*), o qual é útil para se demonstrar não se verifiquem certas relações que vinculam números naturais. Alguns escoliastas supõem que Fermat se tenha inspirado no argumento, proposto por Euclides, de que todo número composto seja o produto de um número finito de números primos. [BRUNSCHVICG 1972:489-490]

Outros escoliastas apontam que esse método já fora empregado, por Johannes Campanus, em sua versão latina do texto árabe dos *Elementos* (1260), para provar a irracionalidade da seção áurea. [CAJORI 1918:197]

Como exemplo, reproduzirei o argumento, baseado no método do descenso infinito, usado para mostrar (de novo) que $\sqrt{2}$ não se escreve como a razão de dois números naturais.

Admitamos que vigore a igualdade $\sqrt{2} = a/c$, sendo a e c números naturais. Da identidade $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ decorre que $(a/c) + 1 = c/(a - c)$. Logo, $a/c = (2c - a)/(a - c)$. Por outro lado, de $1 < (a/c) < 2$ decorre que $c < a < 2c$. Logo, $0 < 2c - a < a$. Portanto, essa procedimento permite representar $\sqrt{2}$ também como a razão de dois outros números positivos, $2c - a$ e $a - c$, reduzindo-se o numerador de a para $2c - a$. Assim, se fosse verdadeira a hipótese de que $\sqrt{2}$ se pode escrever como a razão dos números naturais a e c, esse procedimento poderia ser replicado indefinidamente. Mas isso contraria o fato de ser finito o conjunto dos números naturais menores que a. [EVES 1997:392-293] (Note-se, contudo, que o argumento de Aristóteles foi construído no âmbito dos números naturais e que o argumento por decenso infinito exigiu a consideração de uma extensão do corpo dos números racionais.)

8.4 As provas de existência

> "Passou-se muito tempo até que o método de redução ao absurdo se impusesse como forma legítima de raciocínio, sobretudo pela circunstância de não se afigurar possível, para se demonstrarem certos enunciados geométricos, proceder-se de modo direto. No entanto, sempre que podia, o matemático grego substituía as demonstrações indiretas pelas diretas (preferindo, dentre estas, aquelas que possuíam certo caráter construtivo)." [DA COSTA 1994:76]

Um quesito fundamental é a prova de existência dos objetos matemáticos. Neste capítulo, as provas de existência serão consideradas sob o aspecto fenomenológico mas não o serão sob o aspecto ontológico.

O estudo dos textos geométricos gregos revela uma distinção entre dois tipos de provas: "as provas que instituem a correção de certas construções e as provas que instituem a veracidade de certos assertos". (8) [HARARI 2003:1]

Essa distinção foi reconhecida desde a Antiguidade tardia e esses dois tipos de provas foram denominados, respectivamente *problemas* e *teoremas*. No texto euclidiano, os

problemas eram expressos mediante uma oração na qual o verbo principal figurava no modo infinitivo. Por exemplo, "construir um triângulo equilátero de lado prefixado". Já os teoremas eram expressos, às mais das vezes, por um período composto de uma oração principal e de uma oração subordinada condicional. Por exemplo, "se forem congruentes dois ângulos de um triângulo, então também serão congruentes os lados que os subtendem". Essas proposições eram, respectivamente, concluídas com as locuções "como era para ser feito" e "como era para ser demonstrado". Mas HARARI [2003:2] adverte que tais locuções podem ser apenas o resultado de interpolações acrescentadas ainda na Antiguidade tardia.

Tradicionalmente, se consideraram os problemas como provas de existência. Assim, o problema de se construir uma reta tangente por um dado ponto de um dado círculo equivaleria à prova da existência de tal reta por qualquer ponto de qualquer círculo. Provas dessa natureza são classificadas como construtivas, por indicarem uma sequência *finita* de passos (um algoritmo) que conduzem ao traçado da citada reta tangente.

Consoante o excerto de DA COSTA [1994], citado como epígrafe, tais provas constituíram o objeto de preferência dos matemáticos.

BOUTROUX [1920:55] ensina que **o problema típico** consistia em oito partes: (1) A *prótase*, que consistia na enunciação dos dados do problema. (2) A *éctese*, que consistia na repetição do enunciado referida a uma figura particular. (3) A *apagoge*, que convertia o problema proposto em outro mais simples. (4) A *resolução*, que mostrava que os dados do problema proposto permitiam resolver o problema mais simples. (5) A *divisão*, que enunciava as condições segundo as quais o problema admitia solução. (6) A *construção*, que definia as diversas curvas auxiliares, necessárias ao passo seguinte. (7) A *demonstração*, a efetuação da *construção* da figura. (8) A *conclusão*, a prova de que a figura obtida atende ao enunciado do problema.

A descrição por Boutroux dos problemas típicos aproxima-se do comentário de Proclus de Constantinópole, que distinguia em **todas as proposições euclidianas** seis partes: (1) A prótase. (2) A éctese. (3) O diorismo (especificação). (4) A construção. (5) A apodixe (prova). (6) A conclusão. [ALVAREZ 2003:290]

Segundo MOSTERÍN [1987:90], a enunciação dos **teoremas** nos *Elementos* consiste na formulação (a *prótase*), na exemplificação mediante uma figura (a *éctese*), nas construções auxiliares (a *catasceve*) e na prova (a *apodixe*).

O termo 'prótase' não é privativo das construções geométricas. No antigo teatro grego, esse nome era empregado para designar a primeira parte da ação dramática, na qual o argumento era anunciado e era iniciado o seu desenvolvimento. Seguiam-lhe a epítase (na qual ocorriam os incidentes principais) e a catástase (na qual os incidentes se adensavam, se precipitavam e se resolviam). [FERREIRA 1986:*passim*]

Vale notar-se que os três problemas propostos pelo espírito helênico (a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo e a quadratura de um círculo) envolviam a construção de segmentos ou de ângulos. [STRUIK 1987:40; EVES 1997:133-141]

O aspecto construtivo da prova matemática era tão conspícuo, que Immanuel Kant, na *Doutrina Transcendental do Método*, recorreu ao conceito de *construção* para distinguir entre a filosofia e a matemática: filosofia é a argumentação a partir de conceitos; matemática é a argumentação a partir da *construção* de conceitos [WINTERBOURNE 1981:34]. Ou, na exposição de SILVA [1989:40]: "o conhecimento filosófico é o conhecimento racional por conceitos; o conhecimento matemático, por construção de conceitos."

Mas o quesito da existência de objetos matemáticos transcendeu o âmbito geométrico. Colocado inicialmente no contexto das equações polinomiais, esse quesito se associou à previsão da *natureza* das raízes das equações e cedo se estendeu às equações diferenciais. No caso das equações de primeira ordem, nas quais a função derivada se apresentava explicitamente, mostrou-se que a continuidade dessa derivada em um intervalo fechado e limitado implicava a existência de funções primitivas. [LIMA 1982:256] Ulteriormente, esse quesito foi melhor compreendido, quando se formulou a noção de funções uniformemente contínuas.

Ao longo da época dos irmãos Bernoulli, de Euler e de Lagrange, foi considerado intuitivo o fato de que uma equação diferencial de primeira ordem admitisse uma única curva integral passando por um ponto previamente escolhido. O exame crítico desse quesito conduziu a demonstrações diferentes da existência de tal função, por Augustin Cauchy, Rudolf Lipschitz e Giuseppe Peano. [GERMAIN 1962:238]

A atitude perante o problema de resolver equações diferenciais fora, desde Pierre Varignon, admitir que o contexto em que tais equações eram formuladas (em geral, um problema de natureza mecânica) certificava a existência das soluções. Um exemplo clássico dessa situação foi dado pelo problema do potencial, que se exprimia por uma equação diferencial de segunda ordem, $\nabla^2 f(x,y) \equiv 0$, sujeita a certas condições (*a condição de fronteira*) e que supostamente deveria sempre admitir solução. [GERMAIN 1962:238-239]

Contudo, havia em quesitos dessa natureza, um sofisma bem dissimulado sob o asserto de que "sabemos, por razões de natureza física, que a solução existe". De fato, como bem denuncia LANCZOS [1961:164], não sabemos se é fidedigna a formulação matemática do problema vertente. Aliás, pelo contrário, é quase certo que as simplificações introduzidas no modelamento do problema conduzem a uma formulação matemática imprecisa; além disso, podem ser propostos modelamentos distintos de um mesmo problema físico. Como não dispomos de nenhum critério *metafísico* que permita decidir entre um ou outro modelamento, não resta outra via senão declarar **a autonomia das teorias matemáticas relativamente às ciências experimentais**, ainda que, em sua origem, muitas delas tenham sido e muitas novas continuem a ser suscitadas e inspiradas por problemas dimanados de outras ciências.

Parece-me que essa denúncia por Lanczos tenha caráter metodológico e que não deva ser lida como um asserto referente a antiga e recorrente discussão sobre a harmonia entre a matemática e a física, que foi retomada por Vladimir Varicak (em três artigos consecutivos à publicação, por Albert Einstein, da teoria restrita). Nesses ensaios, Varicak interpretou a composição de velocidades e as transformações de Lorentz da perspectiva da geometria hiperbólica. Encantado pela adequação desse sistema geométrico à descrição dos fenômenos físicos estudados na teoria restrita, Varicak recusou que se tratasse de um fato fortuito e proclamou que os fenômenos físicos ocorriam no espaço hiperbólico. [WALTER 1999:18-19]

Avançando nessa questão, Abraham UNGAR [2003], após quinze anos de estudos acerca da interpretação da teoria restrita da relatividade na linguagem da geometria hiperbólica, assevera que a formulação por Hermann Minkowski, nos termos de um espaço quadridimensional não capturou toda a riqueza do pensamento de Einstein e que, por consequinte, a teoria exposta na literatura dominante [*the mainstream literature*] corresponde à interpretação de Minkowski mas não às ideias originais de Einstein. Por outro lado, a teoria restrita da relatividade construída por Einstein encontra, segundo UNGAR, nas ferramentas da geometria hiperbólica a linguagem legítima de sua descrição, inclusive a lei de adição de velocidades, que na maioria dos textos correntes figura apenas no caso de serem paralelas. [UNGAR 2003:3]

8.5 As provas por recorrência

O método de prova por recorrência foi introduzido (em 1557 e publicado em 1575) por Francesco Maurolico. Apareceu nos escritos de Blaise Pascal (1654) e de Jakob Bernoulli (1686). [BRUNSCHVICG 1972:481-482; WEYL 2000:52; HEFEZ 2005:10]

Opina BRUNSCHVICG que não o conheceram os antigos gregos; e, se o conheceram, talvez não o tenham aceito, por esse método apresentar um caráter cinemático, que se opõe ao caráter estático do pensamento helênico. [BRUNSCHVICG 1972:482]

Já BOURBAKI informa que desse método 'se encontram na Antiguidade aplicações mais ou menos concientes'. (9) [BOURBAKI 1960:38]

A recorrência foi nomeada *indução sucessiva*, por Augustus de Morgan, e, no século XIX, *princípio da indução completa*. [BRUNSCHVICG 1972:481]

CAJORI [1918:198-199] sugere que o termo tenha sido tomado de empréstimo ao procedimento de indução, usual tanto em outras ciências quanto na própria matemática, como '*modus inveniendi*'. E cita a *Arithmetica infinitorum* (1656), de John Wallis, na qual esse autor recorre à indução *incompleta*, a fim de estudar a razão entre a soma dos quadrados consecutivos, $1 + ... + n^2$, e o produto $n^2(n + 1)$. Esse escrito de Wallis seria censurado por

Jakob Bernoulli (1686), que apontaria, para completar o argumento, a necessidade de se considerar a transição do caso n para o caso n+1.

O princípio de recorrência foi transfigurado por Giuseppe Peano (1889) no quinto postulado da definição axiomática dos números naturais [SEGRE 1994:276] e considerado por POINCARÉ [1894:38] "le raisonnement mathématique par excellence".

Permite esse princípio provar, em dois passos, uma certa sentença p, que depende de uma variável natural. No primeiro passo, prova-se p(1), que é **a primeira premissa**. No segundo passo, mostra-se **a segunda premissa**: Se p(h) for verdadeira para todo número natural h, então também p(h+1) será verdadeira. À sentença p(h) chamamos *hipótese de recorrência* (ou *hipótese de indução*).

Um exemplo simples do uso desse método consiste na prova de que, se n denotar um número natural, o número $1 + (2^{2n-1}).(3^{n+2})$ é divisível por 11. Nesse caso, p(n) denota esse asserto.

Primeiro passo —

p(1) é verdadeira, pois $1 + (2).(3^3)$ é divisível por 11.

Segundo passo —

Hipótese de indução: $1 + (2^{2h-1}).(3^{h+2})$ é divisível por 11.

Tese: $1 + (2^{2h+1}).(3^{h+3})$ é divisível por 11.

Ora, esse número é igual a $\{1 + (2^{2h-1}).(3^{h+2})\} + (11).(2^{2h-1}).(3^{h+2})$ que, na presença da hipótese de indução, também é divisível por 11.

Pode justificar-se por 'redução ao absurdo' uma outra forma de recorrência que também se efetua em dois passos.

O primeiro passo é a prova de que p(1) é verdadeira (**a primeira premissa**). O segundo passo do argumento consiste na prova de que, dado o número natural m, para todo h (estritamente) menor que m, vigora a implicação 'p(h) $\Rightarrow$ p(m)' (**a segunda premissa**).

Para justificá-lo, admitamos que sejam válidas as duas premissas e tomemos o conjunto $C = \{x \in \mathbb{N}: p(x) \text{ é falsa}\}$ e $\omega = \min C$. Como, consoante a primeira premissa, p(1) é verdadeira, $\omega \neq 1$. Ora, para todo número natural h que atenda à condição $1 \leq h < \omega$, como $h \notin C$, p(h) é verdadeira. Consoante a segunda premissa, $p(\omega)$ é verdadeira e $\omega \notin C$, fato que contradiz ser $\omega = \min C$. Note-se que esse método pressupõe tenha sido provada a existência do mínimo de um qualquer conjunto não vazio de números naturais. [HEFEZ 2005:22]

Como exemplo do uso desse método, consideremos a prova de que todo número natural se pode exprimir como o produto de fatores primos. Seja *m* um número natural, distinto de 1 e que não seja primo. Então *m* se pode escrever como o produto de dois números naturais, *a* e *b* distintos de 1 e distintos de *m*. Como tanto *a* quanto *b* são (estritamente) menores que *m*, podemos assumir que $a = p_1. \ldots p_r$ e que $b = q_1. \ldots q_s$. Como $m = a.b$, obtemos a segunda premissa. [BIRKHOFF & MAC LANE 1965:20-21]

8.6 As definições por recorrência

> "Dentre os conceitos aritméticos, a verdadeira matemática precisa exclusivamente dos números inteiros." (10) [KRONECKER 1891:272]

As definições por recorrência também são denominadas definições recursivas [KNEEBONE 2001:147, 260] e definições por recursão [SANT'ANNA 2005:12-13]. São indispensáveis à definição *construtiva* de sequências, entendendo-se por definição construtiva de uma sequência um procedimento que permite determinar o termo de ordem n+1 da sequência, quando se conhece o termo de ordem n. Também se chama definição *algorítmica* mas é preferível reservar esse qualificativo para a definição de um termo mediante a aplicação de um qualquer algoritmo a diversos termos de ordem inferior. Assim, constitui exemplo de sequência definida algoritmamente a sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Admitida essa nomenclatura, as definições recursivas de sequências são um tipo de definição algorítmica.

As definições por recorrência consistem em dois passos: No primeiro passo, descreve-se o primeiro termo de uma sequência. No segundo passo, fornece-se uma regra que permite construir-se o termo de ordem n+1, quando se conhece o termo de ordem n. De certo modo, o surgimento das definições por recorrência constitui um fenômeno que guarda alguma semelhança com aquele a que chamei *ajuste conceitual*. De fato, pelo menos desde a obra de Francesco Maurolico, se praticavam argumentos por recorrência, embora não houvessem sido claramente definidos os objetos (*os números naturais*) aos quais essas provas se poderiam aplicar legitimamente. A narrativa seguinte ratifica a existência da citada semelhança.

Hermann Grassmann, na obra *Lehrbuch der Arithmetik* (1861), inaugurou o uso do princípio de recorrência, para definir as leis de composição no sistema dos números naturais. Sua formulação foi aprimorada por Richard Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1888) e por Giuseppe Peano (*Arithmetices principia nova methodo exposita*, 1889).

Esses autores perceberam que a uma caracterização essencial do sistema dos números naturais repousava em um tipo de ordem dotada de elementos consecutivos. [KNEEBONE 2001:259]

Richard Dedekind e Giuseppe Peano definiram a função seq, no sistema dos números naturais, associando a cada número natural n o seu *sequente* (ou *seguinte* ou *sucessor*), que representarei por seq(n). Desse modo, podemos definir a adição, a multiplicação e a potenciação de números naturais. Peano admitiu que a sequência dos números naturais iniciasse com o número ***zero***. Por considerar a evolução histórica dos conceitos considerados, preferi seguir Dedekind e admitir que o número ***um*** seja o primeiro número natural. [KNEEBONE 2001:147, rodapé.]

Porém, em sua exposição, Dedekind tratara primeiramente do ordenamento dos números naturais (seção VII de seu opúsculo, de 1888) e, depois (somente na seção XI do citado opúsculo) definira a sua adição.

Em exposições ulteriores, depois que se divulgara a formulação proposta por Peano, preferiu-se definir, primeiramente, a adição dos números naturais e, depois, introduzir o ordenamento. Era essa a situação por volta de 1925, quando a fase da *aritmetização* já não constituía um tema momentoso e quando, movido por preocupação *pedagógica*, Eduard Landau escreveu uma introdução aritmética aos cursos de cálculo diferencial *in usum delphinarum* e a comunicou aos colegas da Universidade de Berlim. Mas Karl Grandjot, após servir-se do manuscrito na atividade letiva, lhe comunicou ser necessário acrescentar alguns axiomas à proposta de Peano. Assessorado por John von Neumann, Landau tentou reformular a exposição, recolocando (como fizera Dedekind) a definição de ordem antes da definição de adição. Antes que concluísse essa tarefa, László Kalmár lhe comunicou uma formulação que lhe pareceu mais simples e que Landau adotou nos *Fundamentos da Análise* [*Grundlagen der Analysis*, 1930], de cuja versão inglesa extraí esse apisódio.

Conforme explicou LANDAU [1960:x], "apoiado nos seus cinco axiomas, Peano definiu x + y para x e para todos os y do modo seguinte:

$$x + 1 = x'$$

$$x + y' = (x + y)'$$

e ele e seus sucessores pensaram, então, que x + y estivesse definido de modo geral; pois, o conjunto dos y's para os quais a soma estava definida continha 1 e continha y', se contivesse y.

Mas x + y não havia sido definida."

Na sua exposição, LANDAU [1960] primeiramente define e prova simultaneamente a unicidade da adição (p. 4-5), depois define uma ordem estrita (e uma

ordem parcial) em $\mathbb{N}$ (p. 9-10) e, finalmente, define e prova simultaneamente a multiplicação (p. 14-15).

A leitura do texto de Landau permite concluirmos que sua ideia (ou a ideia que lhe foi comunicada por László) para evitar a objeção de Grandjot consiste em admitir conhecidas duas funções α: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e β:$\mathbb{N}$ x $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e em provar, mediante recorrência, a unicidade de uma função f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfaça às duas condições: (**1**) f(m, 1) = α(m); (**2**) f(m, seq n) = β(m, f(m, n)).

No bem reputado texto de PASTOR & alii [1958:18], talvez por erro na impressão, a segunda condição está consignada como f(m, seq n) = β(**n**, f(m, n)). KNEEBONE [2001:260] apresenta, como o tipo *mais simples* de definição recursiva, a forma f(0) = α, f(seq n) = β(n, f(n)), na qual α é um número dado e β é uma dada função (de duas variáveis).

Voltando ao texto de Landau, a compatibilidade entre as duas condições é imediata, pois sempre seq n, que figura na condição (**2**), será distinto de 1, que figura na condição (**1**). Contudo, a prova da unicidade padece de uma obstrução irremovível. Para ilustrar esse asserto, reproduzirei uma tentativa de demonstração *da unicidade*.

Consideremos duas funções g: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e h: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que satisfaçam às condições (**1**) g(m, 1) = α(m); (**2**) g(m, seq n) = β(m, g(m, n)); (**3**) h(m, 1) = α(m); (**4**) h(m, seq n) = β(m, h(m, n)) e mostremos que tais funções coincidem (para todos os valores naturais de m e n).

Primeiro passo —

Seja S = {z$\in \mathbb{N}$: g(1, z) = h(1, z)}.

- g(1, 1) = α(1) = h(1, 1). Logo, 1 $\in$ S.
- Hipótese de recorrência: g(1, n) = h(1, n). Logo, g(1, seq n) = β(1, g(1, n)) = β(1, h(1, n)) = h(1, seq n). Portanto, se n $\in$ S, também seq n $\in$ S.

Segundo passo —

Seja T = (x$\in \mathbb{N}$: g(x, z) = h(x, z), $\forall$z$\in \mathbb{N}$}.

- g(1, z) = h(1, z), $\forall$z$\in \mathbb{N}$, consoante o primeiro passo.
- Hipótese de recorrência: g(m, z) = h(m, z), $\forall$ z$\in \mathbb{N}$.

Se z = 1, g(seq m, 1) = α(seq m) = h(seq m, 1). Se z = 1, então z = seq s, para algum (único) s. Nesse caso, g(seq m, seq s) = β(seq m, g(seq m, s)). A continuação do argumento exigiria que a última expressão fosse igual a β(seq m, h(seq m, s)) mas essa igualdade

decorre da tese de recorrência. Assim, esse argumento constitui um exemplo de *petitio principii*.

De qualquer modo, informa BETH [1955:24] que "Kalmár e outros autores observaram que, para se efetuar a derivação dos teoremas da aritmética, apoiando-se nos axiomas de Peano e, especificamente, para justificar-se a introdução das definições por recorrência, não é suficiente empregar-se a lógica elementar [...]. É mister, além disso, ou admitir essas definições como axiomas ou empregar uma lógica de ordem superior." Isso decorre de o quinto postulado de Peano (ou princípio de recorrência) envolver quantificação sobre *predicados*, o que não se exprime diretamente em um cálculo lógico de primeira ordem. [FARMER 2008:275]

Esse asserto é confirmado por CHURCH [1952:200], ao indicar que a distinção entre a apresentação desse tema por Landau e a apresentação por Hilbert & Bernays reside em que o método de Landau "exige cálculo funcional de segunda ordem enquanto Hilbert e Bernays se ocupam com postulados por serem acrescentados a um cálculo funcional de primeira ordem".

Nessa linha de ideias, FARMER [2008:275] propõe uma axiomatização da aritmética de Peano mediante sete postulados, dos quais quatro se prestam a definir a adição e a multiplicação.

É curioso que Ugo Cassina, autor de um ensaio sobre a "*Storia ed analisi del Formulario Completo di Peano*" (publicado no *Bollettino della Unione Matematica Italiana*) e de outras três memórias sobre a obra de Peano (citadas por SEGRE [1994:336]), houvesse escrito o artigo "*Sulla critica di Grandjot all'aritmetica de Peano*" (também publicado no *Bollettino della Unione Matematica Italiana*), no qual pretendeu expor uma alternativa mais simples ao método de Landau, efetuando a recorrência sobre a segunda variável. Mas, após submeter a proposta de Cassina à análise lógica, CHURCH [1955:175] concluiu que também o método de Cassina não resistia à objeção de Grandjot.

Resumindo esse tema, posso lembrar que existem, essencialmente, dois modos de se estudarem os números naturais: (**a**) No âmbito de um teoria dos conjuntos (no estilo de Russell e Whitehead, comentado na seção sobre o logicismo, do capítulo quarto). (**b**) Através de uma construção axiomática (no estilo de Peano, depois reformulada por Hilbert). Mas, se quisermos evitar parte da crítica da escola intuicionista, teremos que adotar uma via análoga à que foi proposta por Thoralf Skolem (em 1923). [KNEEBONE 2001:258]

Podemos, pois, concluir que, se quisermos transpor o umbral indicado por Kronecker, ao proclamar que "*a divindade criara os números inteiros, sendo tudo o mais obra humana*" (citação nº 30, do capítulo quarto), não nos poderemos eximir de estudar acuradamente os trabalhos produzidos no âmbito da Lógica, quer percorrendo as principais teorias dos conjuntos (examinadas, por exemplo, no quinto capítulo de KRAUSE [2002]), quer perseguindo o estudo do método axiomático. Em textos de vocação didática, como MILIES

& COELHO [2003:13], é habitual iniciar-se a Aritmética pelo exposição axiomática do anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Para concluir-se essa breve resenha, dar-se-ão e comentar-se-ão didaticamente (como diria Landau, "*ad usum delphinarum*"), três definições fundamentais da Aritmética, como exemplos de definições por recorrência.

A adição de números naturais:

- $m + 1 = \text{seq } m$
- $m + \text{seq } n = \text{seq } (m + n)$

A multiplicação de números naturais:

- $m \,.\, 1 = m$
- $m \,.\, \text{seq } n = m \,.\, n + m$

Note-se que, nessa definição, é absorvida a noção empírica de que multiplicar o número m pelo número n é equivalente a efetuar a adição de m parcelas iguais a n.

A potenciação de números naturais.

- $m^1 = m$
- $m^{\text{seq } n} = m^n \,.\, m$

Note-se que, nessa definição, é absorvida a noção empírica de que elevar o número m à potência n é equivalente a efetuar a multiplicação de n fatores iguais a m.

Usa-se, como modelo, o conceito de potenciação dos números naturais, para se definir a potenciação de elementos de um grupo G (representado multiplicativamente). Na verdade, se institui uma lei de composição externa $\mathbb{Z} \times G \rightarrow G$, pondo-se, para todo elemento a de G e para todo número inteiro m, $a^0 = u$ (onde u denota o elemento neutro do grupo), $a^{m+1} = a.a^m$ e $a^{-m} = (a^{-1})^m$.

Verifica-se que, para todo elemento a de G, $\{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$ constitui um subgrupo de G, ao qual chamamos **subgrupo cíclico** de G (gerado por a). [BIRKHOFF & MAC LANE 1965:125; CHEVALLEY 1956:28; GONÇALVES 2001:123; QUEYSANNE 1964:123].

Todos os subgrupos cíclicos de um qualquer grupo são abelianos e constituem uma ferramente indispensável ao estudo do reticulado dos subgrupos do grupo considerado.

Uma extensão dessa ideia é fornecida pela noção de módulo sobre um anel, para o que se exige que o grupo considerado seja abeliano e se substitui o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros por um qualquer anel comutativo e dotado de unidade.

Assim, dados um grupo abeliano G e um anel A, comutativo e dotado de unidade (1), define-se a lei de composição externa (às vezes denominada *multiplicação por escalar*) pelas condições:

- $1x = x, \forall x \in G$.
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \forall \lambda, \mu \in A, \forall x \in G$.
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall \lambda, \mu \in A, \forall x \in G$ (distributividade segundo a adição no anel).
- $\lambda(x + z) = \lambda x + \lambda z, \forall \lambda \in A, \forall x, z \in G$ (distributividade segundo a adição no grupo).

Ao sistema constituído pelo grupo G, pelo anel A e pela citada lei de composição externa chamamos **módulo G sobre o anel A**. [CHEVALLEY 1956:54-55; QUEYSANNE 1964:242, 300]

A noção de módulo sobre um anel também pode ser considerada uma extensão da estrutura de espaço vetorial sobre um corpo. (Por outro lado, todo grupo abeliano pode ser considerado um módulo sobre o anel $\mathbb{Z}$.)

Uma conceituação mais refinada consiste em definir um módulo como um homomorfismo de um anel qualquer no anel dos endomorfismos de um grupo abeliano.

8.7 Tipos de provas

Quanto aos recursos usados na sua elaboração, as provas podem classificar-se em **restritivas** e **educadas** [LIMA 1986:30-31].

Uma **prova restritiva** está sujeita à restrição de só se usarem certos recursos (previamente enunciados). Os *Elementos* de Euclides fornecem exemplos soberbos desse tipo de prova. Dentre esses exemplos avultam o argumento proposto para o teorema de Pitágoras e a construção do pentágono regular, argumentos esses nos quais *não* se recorre à teoria da semelhança [AABOE 1984:74-88].

Dentre as provas restritivas, distinguem-se as **provas elementares**, cuja noção depende do ramo da matemática considerado. Assim, na topologia diferencial, são

consideradas elementares as provas não subsidiadas pela topologia algébrica. E, na aritmética (ou teoria dos números), uma prova elementar não recorre a técnicas oriundas da teoria das funções de variável complexa e, por isso, às vezes é bastante emaranhada. [LIMA 1986:31]

Um exemplo conhecido é dado pelo teorema dos números primos. Seja C(n) a cardinalidade do conjunto dos números primos menores que n. Após o exame de uma grande tabela de números primos, Gauss conjecturou que a densidade da sequência de números primos na sequência de números naturais, C(n)/n, se aproximasse de 1/log(n), quando n crescesse. (A notação log(n) designa o logaritmo natural de n.) A conjectura foi provada, em 1896, independentemente, por Jacques Hadamard e por Charles Poussin, que recorreram à teoria das funções holomorfas. Em 1949, Atle Selberg e Paul Erdös forneceram uma prova elementar desse teorema. [EVES 1997:624; STRUIK 1987:197-198, 205; O'CONNOR & ROBERTSON

As **provas educadas** caracterizam-se por se apoiarem em teoremas e conceitos bem conhecidos, cuja força é assim evidenciada. [LIMA 1986:31]

Um exemplo simples de uma prova educada é consiste no argumento da irracionalidade de $\sqrt{2}$ mediante o teorema da fatoração única. Supôe-se a existência de dois números naturais m e n tais, que $n^2 = 2m^2$ e examinam-se os dois membros dessa igualdade. No primeiro membro, o fator 2 ocorre um número par de vezes enquanto, no segundo membro, o mesmo fator ocorre um número ímpar de vezes! [DAVIS & HERSH 1985:338]

Outro exemplo consiste no seguinte argumento para provar 'o teorema fundamental da álgebra', segundo o qual todo polinômio não constante, de coeficientes complexos, admite uma raiz: Seja p um tal polinômio. Como, quando $z \to \infty$, $\lim p(z) = \infty$, conclui-se que p seja uma aplicação própria do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos em si mesmo. Logo, sua imagem é um conjunto fechado do plano complexo. Por outro lado, como p é uma função holomorfa, sua imagem é uma parte aberta desse plano complexo. Como o plano complexo é conexo, a imagem de p coincide com o seu domínio. Logo, a função p é sobrejetiva. Portanto, existe um número complexo z_0 tal que $p(z_0) = 0$. [LIMA 1986:31-32]

Uma outra demonstação educada desse teorema é proposta por ALEXANDROV [1956:165-166] e GARDING [1997:143]. O argumento consiste em

notar que, quando z dá uma volta em torno da origem, ao longo do círculo Γ de raio R, p(z) dá n voltas em torno do ponto c_0 (coeficiente do termo independente de p), ao longo de uma curva Δ;

em escrever $p(z) = z^n.\{1 + h(z)\}$;

e em notar que, quando $z \to \infty$, $h(z) \to 0$ e $p(z) \to \infty$.

Assim, iniciando-se o processo com um valor de z tal que $|z|$ seja muito grande (o suficiente a que a curva Δ circunscreva a origem), quando $z \to 0$, a curva Γ se contrai no origem, enquanto p(z) se contrai no ponto c_0, passando pela origem, pelo menos uma vez.

LIMA [1986:32-34] propõe uma prova *educada* de que toda variedade diferenciável conexa de dimensão um é difeomorfa à reta ou ao círculo.

Um teorema clássico da álgebra comutativa (*avant la lettre*) foi instituído por David Hilbert (na décima década do século XIX), sob o nome de teorema das raízes [*Nullstellensatz*]. Esse teorema informa que, "em um corpo algebricamente fechado, se o polinômio $f(x_1, ..., x_n)$ se anular em todas as raízes do ideal de polinômios M, então haverá uma potência f^ρ de f que pertence a esse ideal M". (11) [RABINOWITSCH 1930:520]

A prova proposta por RABINOWITSCH foi adotada por van der Waerden, no curso de *Algebra* (1930). Posteriormente, Wolfgang Krull propôs uma prova baseada no teorema da normalização de Noether e na teoria da dimensão das variedades algébricas. Embora essa prova possa considerar-se *educada*, Oscar Zariski propôs uma *prova elementar* desse teorema, apontando que desse teorema decorre a proposição seguinte: "Se R for um domínio de integridade finito sobre o corpo K e se F for um subcorpo de K tal, que R também seja um domínio de integridade finito sobre F, então serão iguais os graus de transcendência de R sobre K e sobre F." E essa proposição **fornece uma razão** [*an a priori reason*] para o fato de que, quando a dimensão de um ideal primo no domínio de integridade R for definida relativamente ao corpo de base K, a teoria da dimensão resultante seja intrinsecamente vinculada ao domínio R. [ZARISKI 1947:362, 368]

A sugestão de uma prova elementar do teorema das raízes (*Nullstellensatz*) foi perseguida por outros autores. Tanto quanto eu saiba, a tentativa mais recente e mais bem sucedida foi elaborada por Ritabrata Munshi (1990), a qual foi divulgada (e levemente redesenhada) por J. Peter MAY [2003], que assim o enunciou: "Dado o corpo algebricamente fechado F, um ideal M em $F[x_1, ..., x_n]$ é maximal se e somente se existem em F os elementos a_h tais que o ideal M seja gerado pelos elementos $x_h - a_h$."

Segundo LIMA [1986:29], em geral, uma prova elementar de um teorema não explica o motivo de ele ser verdadeiro. Isso suscita a discussão de um outro quesito, a capacidade explicativa de uma prova.

Aristóteles (nos *Analytici Posteriores*) discernia dois tipos de silogismos: os silogismos que dão **conhecimento do fato** e os silogismos que dão **conhecimento também das razões do fato**. [KITCHER 1975:236]

Talvez ecoando o pensamento de Aristóteles, Bernard Bolzano introduziu (em 1817) a distinção entre **provas que outorgam certeza** (*Gewiszmachungen)* e **provas**

puramente analíticas (*Begründungen*). Nesse escrito, Bolzano ofereceu uma prova 'puramente analítica' do teorema, segundo o qual existe uma raiz de uma função polinomial entre dois pontos nos quais ela assume valores de sinais distintos, embora não contestasse a veracidade nem a evidência obtida através de um argumento geométrico. [KITCHER 1975:230]

Mas a perspectiva adotada por Bolzano baseava-se em uma hierarquia geral das ciências e em uma hierarquia especial das disciplinas que compõem a matemática. No caso do teorema citado, Bolzano preconizava uma prova 'puramente analítica', por considerar que a geometria fosse hierarquicamente inferior à álgebra, à aritmética e à análise. [KITCHER 1975:240]

KITCHER [1975:254] defende que, do tratamento dado por Bolzano aos fundamentos da análise, se podem extrair três teses, das quais a terceira é pertinente à discussão vertente: "Para argumentos dedutivos que envolvem apenas proposições conceituais [...], podemos distinguir entre **argumentos explicativos** de **argumentos não explicativos** pelo critério seguinte: Um argumento dedutivo é explicativo se e somente se suas premissas forem pelo menos tão gerais quanto suas conclusões."

STEINER [1978] retoma esse quesito da capacidade explicativa e, talvez pretendendo conferir maior precisão ao critério distintivo dessa capacidade, interpreta o grau de generalidade como a ordem da linguagem lógica adotada. Assim, um argumento que recorra a uma linguagem de segunda ordem seria mais explicativo que um argumento que recorresse a uma linguagem de primeira ordem. Esse autor exemplifica mediante a proposição que descreve a soma dos primeiros n números naturais: $S(n) = 1 + ... + n$.

Podemos demonstrar essa proposição por recorrência, desde que tenhamos anteriormente induzido a fórmula $S(n) = (1/2).n.(n + 1)$. Podemos, por outro lado, somar $S(n) = 1 + ... + n$ com $S(n) = n + ... + 1$, obtendo $2S(n) = n.(n + 1)$.

Concluiu o autor que, a segunda prova, "quando formalizada, quantifica sobre *sequências* de números naturais, usando as técnicas expostas na *Teoria dos conjuntos e sua Lógica*, de Quine, enquanto a primeira prova opera com os próprios números e assim é menos abstrata". (12) [STEINER 1978:136]

Embora essa ideia de *prova explicativa* admita um critério distintivo, não me parece que reflita necessariamente o que Lages Lima definiu como *prova educada*. Parece-me que a perspectiva adotada pelos matemáticos se baseie em uma experiência cognitiva.

É o que parece haver sugerido Walter Feit, quando lhe foi perguntado o motivo de, em cursos de teoria dos grupos, se evitar o teorema da ordem ímpar. Respondeu ele tratar-se "do velho princípio de que se devem usar apenas *os teoremas cujas provas se podem compreender*". Nessa mesma ocasião, à pergunta pela pertinência em se chamar de 'simplificação' a uma segunda versão, que demandou muito trabalho e muito tempo, da prova desse mesmo teorema, Feit respondeu que não se tratava de simplificar mas "de se

estabelecer o resultado em *um contexto mais compreensível*". (Os realces tipográficos foram introduzidos por mim.) [VOLOCH & MARTIGNON 1988:15]

Hermann Weyl também recorreu à metáfora da percepção tactual de um teorema como elos de uma cadeia, ao dizer que "não ficamos muito satisfeitos, quando somos forçados a aceitar uma verdade matemática por força de uma cadeia complicada de conclusões formais e de computações, a qual percorremos cegamente, de elo em elo, detectando o caminho pelo tato. Desejamos, em primeiro lugar, uma visão geral do escopo e do caminho; queremos entender a ideia da prova, o contexto profundo". (13) [WEYL 1995:453]

Um exemplo simples de um tipo irrefutável de prova que, habitualmente, não satisfaz aos matemáticos é a **prova por verificação**, isto é, um argumento baseado na enumeração de todos os casos possíveis e na consequente verificação individual de cada caso. [ROTA 1997B:184]

Esse tipo de prova se pode empregar para demonstrar o 'teorema das casas de pombos': Se n+1 pombos habitarem n casas e toda casa for habitada por pombos, então haverá exatamente uma casa habitada por dois pombos. [LOVÁSZ et alii 2003:34-35]

A fim de produzir uma prova por verificação é necessário elaborar um algoritmo que descreva todos os modos de se colocarem n+1 pombos em n casas e na consequente verificação de que, em todos os modos, haverá uma casa com dois pombos. "Um tal algoritmo recorrerá à indução e os matemáticos rir-se-ão dele." (14) [ROTA 1997B:185]

Uma conjectura, que se tornou famosa na sétima década do século XX, é o 'teorema das quatro cores', segundo o qual quatro cores são suficientes para se colorirem todas as regiões de uma mapa *decente*, de modo que regiões adjacentes não sejam coloridas com a mesma cor. Em 1977, lhe foi proposta uma prova assistida por ferramentas eletrônicas de computação. O argumento usado consistia em duas partes. Na primeira parte, operava-se a redução do problema a um conjunto finito de alternativas. (Técnicas de redução, por já serem praticadas, não constituíam novidade e o esquema da redução para o teorema vertente já havia sido esboçado por George Birkhoff. Mas a execução específica dessa redução foi produzida por Kenneth Appel e Wolfgang Haken.) A segunda parte consistiu na verificação individual de cada alternativa, verificação essa conduzida em um computador, por não ser exequível fazê-lo de outro modo. [HALMOS 1990:576-577; ROTA 2007B:186]

Um dos motivos de as provas mediante algoritmos não agradarem plenamente é **a ausência de ideias novas** e **a frequente impossibilidade de se estender a técnica empregada a outras situações**. [HALMOS 1990:576; ROTA 1997B:185]

Assim, as provas por verificação se opõem às provas instrutivas. Dizemos que uma prova é **instrutiva**, quando a técnica usada na sua composição também pode ser

empregada em outras provas. E será tanto mais instrutiva, quanto mais amplo for o conjunto de situações nas quais essa técnica puder ser empregada. [PÓLYA 1948:243]

No caso do 'teorema das casas de pombos', a prova existencial conduziu a uma rede de teoremas profundos na teoria das combinações (ou *combinatória*), hoje denominados teoremas do tipo de Ramsey. Todos esses teoremas constituem "exemplo de uma possibilidade que se torna evidente através de uma prova existencial, embora tal possibilidade não se possa converter em atualidade" [*example of a possibility that is made evident by an existence proof, even though such a possibility cannot be turned into actuality*]. [ROTA 1997B:186]

Além de incapacidade de serem estendidas a outras situações, as verificações individuais **não explicam**, em geral, os teoremas que elas demonstram. Isso não satisfaz aos anseios dos matemáticos, que trabalham acreditando em uma ordem [*ordo*] ou em uma razão [*ratio*] substantiva. Um exemplo notável de uma prova que não explicava e da consequente busca da razão é dado pela classificação dos grupos simples de Lie. [ROTA 1997B:187]

Os grupos de Lie são objetos cuja definição resultou dos estudos em torno dos grupos de transformações contínuas introduzidos por Sophus Lie, na tentativa de emular, na teoria das equações diferenciais, a obra de Évariste Galois. Com efeito, por volta de 1870, Lie "percebeu que alguns métodos clássicos de integração de diversas equações diferenciais ordinárias podiam ser unificados, notando-se que eles dependiam da existência de um grupo de transformações a um parâmetro que deixavam a equação invariante". (15) [BOREL 2001A:2]

Wilhelm Killing e Elie Cartan forneceram uma classificação dos grupos simples de Lie, mediante a verificação de que existe apenas uma família finita de configurações de vetores que atendem a certas condições prescritas. De lá para cá, não houve implementação significativa dessa prova, embora a lista preparada por Cartan contivesse, além de todos os grupos simples de Lie que se esperava figurassem nela, cinco outros grupos que não se conformavam a nenhum cânone conhecido.

> "A existência dos grupos excepcionais de Lie converteu-se em um espinho na carne de qualquer algebrista. Era uma reminiscência bruta da arbitrariedade dos eventos no mundo real, uma arbitrariedade da qual a matemática se considerava a redenção. Tornou-se uma questão de honra matemática encontrar uma razão para a existência dos cinco grupos excepcionais de Lie. Assim, começaram a aparecer os termos de uma longa sequência de ensaios que estudavam os grupos excepcionais de Lie de toda perspectiva concebível. O desígnio tácito dessa perscrutação era a busca de tal razão. Finalmente, um matemático do MIT chamada Bertram Kostant elucidou o mistério dos grupos excepcionais de Lie por um audacioso salto de confiança. Descobriu-se que os grupos excepcionais de Lie não eram os único fenômeno aparentemente arbitrário da teoria de Lie. Havia nessa teoria um outro fenômenos aparentemente arbitrário. O grupo ortogonal especial de dimensão oito (SO8) apresentava uma propriedade muito rara. Seu grupo de recobrimento (ou grupo de *spin*) admitia um automorfismo externo. Esse fenômeno ocorre apenas em dimensão oito. Kostant conjecturou, com bom êxito,

que os dois fenômenos aparentemente arbitrários estivessem vinculados e encontrou a razão da existência dos cinco grupos excepcionais de Lie no automorfismo externo do grupo ortogonal em dimensão oito, mediante um *tour de force* que, ainda hoje, constitui uma joia de raciocínio matemático. Somos novamente conduzidos à conclusão de que os matemáticos não se satisfazem em provar conjecturas. Eles buscam a razão." (16) [ROTA 1997B:187]

Presentemente, o maior desses grupos esporádicos de Lie, considerado por Bertram Kostant 'o objeto mais magnificente de toda a matemática, um diamante de mil faces' [mensagem expedida a Ben-Wallace Wells] foi invocado por Garrett LISI, na tentativa de elaborar uma teoria unificada das quatro forças do Universo. [LISI 2007]

8.8 Da pluralidade das provas

> "Penso que nós, matemáticos, devemos tentar dissipar a impressão popular de que também nós sejamos autômatos destituídos de percepção. Devemos negar o juízo de que seja meramente uma distinção de grau a diferença entre nós e os dispositivos de praticar jogos ou de provar teoremas. Tal diferença é *qualitativa*. Devemos ofender-nos com a imputação de que nossa única qualidade intelectual importante seja a habilidade no manipular símbolos e números, consoante regras fixas! Nossa habilidade de manusear conceitos, na acepção da teoria da forma [*Gestalt*], não é igualmente essencial?" (17) [BIRKHOFF 1969:458]

Foi referido, na seção anterior, que os matemáticos qualificam distintamente as diversas provas de um mesmo teorema. Essa diversidade de qualificação responde por um motivo de se darem novas provas para proposições já provadas.

Outro motivo para se reprovarem teoremas é o senso estético. Lembra ROTA [1997A:172] que "um belo teorema pode não ser laureado com uma prova igualmente bela; de fato, é frequente ocorrerem teoremas belos com provas feias. Quando a um teorema belo falece uma bela prova, os matemáticos envidam tentativas repetidas de fornecer novas provas que condigam com a beleza do teorema, no que nem sempre são bem sucedidos." (18)

Paul Erdös cultivou o mito de uma obra, *O Livro*, que contém todos os teoremas e, de cada teorema, apenas uma prova, a mais bela. [BRUSAMARELLO & CARMELO 2007:75; ULLMAN 1999:789-790]

Talvez Erdös colocasse nesse livro tanto o teorema de Picard (de que uma função inteira de uma variável complexa assume todos os valores, com a possível exceção de dois

valores) quanto a prova desse teorema proposta pelo mesmo Picard, considerados por ROTTA [1997A:173] como exemplo da conjugação, em um mesmo teorema, da formosura no enunciado e da pulcritude na prova.

Observe-se que, assim como a noção de rigor, a beleza de um objeto matemático se reveste de historicidade. "Um teorema que, em um dado contexto, foi considerado belo pode, em um outro contexto, parecer trivial. Por exemplo, o teorema de Desargues é perfeitamente belo, quando contemplado como sentença da geometria projetiva sintética mas se torna completamente trivial, quando se formula em termos de coordenadas. Indubitavelmente, muitos exemplos de beleza matemática, à medida que a matemática progride, terminam por esvaecer ou por se converter em trivialidade." (19)

Também foi comentado que um mesmo autor (Gauss) se esmerou na produção de diversas provas para um mesmo teorema ('o teorema fundamental da álgebra'). Não causa, pois, surpresa que, sucessivamente, autores diversos contribuam com novas provas para um mesmo teorema. E, dentre os motivos que os levam a essa reprovação, avulta o fator cognitivo. Com efeito, observa William Thurston (detentor da medalha Fields de 1982) que "em um certo sentido, a Matemática dispõe de uma linguagem comum, uma linguagem de símbolos, definições técnicas, computações e Lógica. Essa linguagem transmite eficientemente alguns modos do pensamento matemático, mas não todos. Os matemáticos aprendem a traduzir, quase inconscientemente, certas coisas de um modo mental para outro, de sorte que algumas sentenças se tornam rapidamente claras. Matemáticos diversos estudam os artigos matemáticos de modos distintos. Porém, quando leio um artigo matemático sobre uma área na qual sou proficiente, me concentro nos pensamentos que se escondem entre as linhas. Posso dar uma olhada panorâmica em diversos parágrafos ou em fileiras e pensar comigo: 'Ora, estão complicando bastante, para apresentarem tais e tais ideias.' Quando a ideia é clara, o esquema formal é habitualmente desnecessário e redundante: Sinto frequentemente que poderia eu mesmo transcrever tudo mais facilmente que entender o que os autores efetivamente escreveram." (20) [THURSTON 1994:167]

8.9 Aspectos perceptivos

O depoimento de Thurston acerca de sua preferência em construir provas a assimilar provas alheias aponta um interessante aspecto cognitivo na produção de provas matemáticas: As distintas estruturas psíquicas dos matemáticos ou, equivalentemente, os distintos '*modi cogitandi*' ou '*modi percipiendi*' dos matemáticos. A diferença nas estruturas psíquicas se revela em dois modos de se considerarem os objetos matemáticos, quesito sobre o qual já se debruçou Hermann Weyl em 1932, ensinando que, na prática contemporânea da matemática, "há dois modos de perceber que se mostraram especialmente penetrantes e fecundos: a topologia e a álgebra abstrata".

De certo modo, essa dualidade nos modos perceptivos já fora detectada por William Hamilton, quando pretendeu classificar a matemática em duas áreas, uma vinculada

ao tempo (a álgebra como a ciência do tempo puro) e outra vinculada ao espaço (a geometria como a ciência do espaço puro). [MATHEWS 1978:178]

Esse preconceito o levou a, *inicialmente*, rejeitar sistemas algébricos nos quais a multiplicação não fosse associativa. [OEHRSTROEM 1985:50-51]

O erro de Hamilton fora confundir **o objeto percebido** com **o modo perceptivo**. De fato, um mesmo objeto pode ser visto das duas perspectivas. Um exemplo bem conhecido é o corpo dos números reais que, segundo a metáfora exposta por Hermann Weyl, se comporta como o *Janus* bifronte, apresentando uma face voltada para as propriedades algébricas (a estrutura de corpo) e outra face virada para as propriedades associadas à relação de ordem (a estrutura de corpo ordenado arquimediano). A existência dessas duas faces se reflete no fato de o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) não poder definir-se como extensão algébrica do corpo dos números racionais ($\mathbb{Q}$), ao passo que o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$) constitui uma extensão algébrica do corpo dos números reais. Historicamente, esse fato foi detectado por Charles Hermite (1873), ao provar a transcendência do número e e por Ferdinand Lindemann (1882), ao demonstrar a transcendência do número π. [LIMA 1982:59-61; STRUIK 1987:180; WEYL 1995:6]

Um outro exemplo bastante conhecido consiste na introdução de situantes no plano euclidiano (por Descartes e Fermat), associando-se a cada ponto do plano um par de números correspondentes às coordenadas, segundo eixos ortogonais, do ponto considerado. Uma consequência imediata foi o estudo de curvas definidas por equações arbitrárias $F(x,y) = 0$. Da dimensão dois, passou-se a n dimensões e a uma infinidade de dimensões. Nesses espaços, estudam-se lugares geométricos definidos por sistemas arbitrários de equações. "Assim, abriu-se um amplo panorama e a geometria e a álgebra se tornaram inseparáveis." (21) [CHERN 1990:680]

Essa nova perspectiva para se olhar a geometria é conspícua no tratamento do plano projetivo. Os axiomas de incidência, sozinhos, conduzem a um corpo numérico naturalmente associado à incidência. Os elementos desse corpo numérico, os números, são simplesmente entidades geométricas, denominadas *dilatações*. Um ponto e uma reta são descritos como razões de ternos de números desse corpo, $x_1: x_2: x_3$ e $u_1: u_2: u_3$, respectivamente, de sorte que a incidência do ponto $x_1: x_2: x_3$ na reta $u_1: u_2: u_3$ é representada pela equação $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$. Reciprocamente, se os termos geométricos forem definidos através dessas expressões algébricas, então todo corpo abstrato conduzirá a um plano projetivo associado que satisfaz aos axiomas de incidência. Disso decorre que uma restrição pertinente ao corpo numérico associado ao plano projetivo não pode ser obtida dos axiomas de incidência. [WEYL 1995A:457]

> "Aqui a harmonia preestabelecida entre a geometria e a álgebra se manifesta do modo mais estimulante. A fim de que o sistema de números geométricos coincida com o contínuo dos números reais usuais, devemos introduzir axiomas de ordem e de continuidade, de tipo muito diferente do tipo dos axiomas de incidência. Chegamos

assim a um processo evolutivo oposto ao que dominou a matemática por séculos e que parece haver surgido, originalmente, na Índia, e haver sido transmitido ao Ocidente pelos eruditos árabes. Até agora, tínhamos considerado o conceito de número como um antecedente lógico da geometria e havíamos abordado qualquer domínio de grandezas com um conceito de número universal e desenvolvido sistematicamente, de modo independente das aplicações envolvidas. Agora, contudo, retornamos ao ponto de vista heleno de que a cada universo de discurso está associado intrinsecamente um domínio numérico que deve ser construído desde esse universo. Temos vivenciado essa inversão não apenas na geometria mas também na nova física dos *quanta*. Consoante a física dos *quanta*, as grandezas físicas associadas a um contexto físico particular (*não* os valores numéricos que elas podem assumir, dependendo de seus estados distintos) admitem uma adição e uma multiplicação não comutativa, produzindo assim um sistema de grandezas algébricas que é intrínseco ao contexto considerado e que não podem ser consideradas como um setor do sistema dos números reais." (22) [WEYL 1995:456-458]

"Essa irrupção de *números* na geometria apareceu, inicialmente, como um ato de violência sofrido pelo pensamento geométrico, considerado um construto mental sintético. Esse *ato de violência* inaugurou a dualidade entre a geometria e a álgebra, entre o olho do geômetra e as computações dos algebristas, que se processam no curso do tempo, em oposição à percepção imediata da intuição geométrica. Longe de ser uma oposição estéril, essa dualidade torna-se extremamente fecunda, quando a geometria e a álgebra fazem aliança, para explorar terras ignotas, como na nova geometria algébrica da segunda parte do século XX ou como na geometria não comutativa, duas fronteiras patentes da noção de espaço." (23) [CONNES 2004:4]

Um outro exemplo expressivo da duplicidade de perspectivas é oferecido pela teoria das funções algébricas de uma única variável x. Sejam $\mathbb{C}(x)$ o corpo das funções racionais com coeficientes complexos, f(z; x) um polinômio de grau n com coeficientes em $\mathbb{C}(x)$ e S a superfície de Riemann associada à função algébrica multiforme z(x) definida pela condição f(z; x) = 0, cujas n folhas se estendem sobre o plano complexo $\mathbb{C}$. Acrescentemos um ponto no infinito ao corpo $\mathbb{C}$ (o que torna fechada a superfície S de Riemann) e consideremos a correspondência estereográfica entre os pontos desse plano $\mathbb{C}$ e os pontos da esfera unitária. Dizemos que um polinômio é irredutível em $\mathbb{C}(x)$, se ele não se puder escrever como o produto de dois polinômios não constantes com coeficientes em $\mathbb{C}(x)$. Se o polinômio f(z; x) for irredutível, sua irredutibilidade, que é nitidamente uma propriedade algébrica, refletir-se-á na conexidade da superfície de Riemann associada à função z(x). Mas a conexidade de uma superfície é uma propriedade topológica, definida pela condição de que essa superfície somente admita a cisão imprópria, isto é, se S for a reunião *disjunta* de dois conjuntos abertos A_1 e A_2, então um deles é vazio (e o outro coincide com S). [LIMA 1977:90]

Nesse exemplo, se opõem claramente a visão algébrica e a visão geométrica (assimilada à visão topológica); a primeira exige a verificação da irredutibilidade do polinômio, enquanto a segunda se manifesta com maior evidência na noção de conexidade. O conceito algébrico de irredutibilidade depende apenas de pertencerem a um corpo os coeficientes do polinômio. Em particular, $\mathbb{C}(x)$ pode ser substituído pelo corpo das funções racionais sobre um outro corpo K. Por outro lado, da perspectiva topológica, é irrelevante que a superfície vertente seja uma superfície de Riemann, que seja dotada de uma estrutura conforme ou que consista em um número infinito de folhas que se estendem sobre o plano complexo $\mathbb{C}$. [WEYL 1995:458]

No episódio da criação da teoria das funções analíticas, a perspectiva algébrica ofereceu menor dificuldade à produção de provas minuciosas que a perspectiva topológica, que é mais refratária ao abordamento lógico. [WEYL 1995:459]

Em uma memória submetida à Academia de Ciências de Paris (em 1826 mas publicada somente em 1841), Abel instituira um teorema que estendia o teorema da adição de integrais elípticas (descoberto por Euler) a integrais da forma $\int R(x,y)dx$, na qual $R(x,y)$ é uma função racional e y é uma função algébrica de x definida por uma equação polinomial *irredutível* $y = P(x)$. Segundo o teorema de Abel, a soma de uma lista qualquer de tais integrais se reduz à soma de uma lista de p integrais linearmente independentes com uma expressão algébrico-logarítmica. [BOTTAZZINI 2003:924]

Em 1828, Abel divulgou um excerto da citada memória e, em 1832, baseando-se no teorema de Abel e perseguindo a analogia com a inversão das integrais elípticas do primeiro tipo, Jacobi formulou o problema de investigar a inversão de um sistema de p integrais hiper-elípticas do tipo $\Sigma \int \{P(x)\}^{(-1/2)} x^k dx$, sendo $0 \leq k \leq p-1$ e o grau de P ou igual a $2p + 1$ ou igual $2p + 2$. [BOTTAZZINI 2003:924]

Em seguida, entrou no cenário um desconhecido docente do magistério secundário, Karl Weierstrass, que se tornaria figura dominante nos próximos quarenta anos. Publicou (em 1854) uma solução, para o caso das funções hiper-elípticas, do problema de inversão proposto por Jacobi mas não conseguiu mostrar que cada função abeliana fosse expressa como a razão de duas séries de potências, convergentes em todo o domínio considerado, embora houvesse advertido que esse era "um problema que, até então, não havia sido estudado na forma mais geral mas que, todavia, gozava de importância particular para a teoria das funções". [*Apud* BOTTAZZINI 203:927]

Entrementes, foi proposto um outro tratamento por Bernhard Riemann, em um artigo publicado em 1857. Nos parágrafos introdutivos, Riemann resumiu o tratamento geométrico que ele havia adotado na tese de 1851, no qual uma função w de variável complexa dependia de $x + iy$, de acordo com a condição $i\partial w/\partial x = \partial w/\partial y$. Sem referir Cauchy, Riemann lembrava que uma tal função podia expandir-se em série da forma $\Sigma c_n(z - a)^n$, em um disco adequado, e que podia ser prolongada, de modo único, no exterior desse disco. Para tratar das funções multiformes, como as funções algébricas e as suas integrais, Riemann introduziu a ideia de representar os ramos de uma função mediante uma superfície

que cobrisse diversas vezes o plano complexo. Introduziu também os conceitos de cortes oblíquos e de ordem de conexidade de uma superfície e instituiu o teorema fundamental de existência de uma função complexa em uma superfície, mediante as condições de contorno e o comportamento da função nos pontos de ramificação e nas singularidades. Em seguida, Riemann desenvolveu a teoria das funções abelianas. Nesse artigo, Riemann deu a solução completa do problema de Jacobi e referiu "os belos resultados" obtidos por Weierstrass no artigo de 1856 e sugeriu que a sua continuação mostraria o quanto concordariam ambos os tratamentos. [BOTTAZZINI 2003:928]

Convém notar-se que, embora tanto Weierstrass quanto Riemann falassem ambos de 'funções abelianas', essa locução tinha significado distinto para os dois matemáticos. Enquanto para Weierstrass, uma função abeliana era uma função analítica uniforme de diversas variáveis complexas associada à solução do problema de inversão de Jacobi, para Riemann as funções abelianas eram as integrais de funções algébricas introduzidas pelo teorema de Abel. [BOTTAZZINI 2003:928]

Após a publicação do ensaio de Riemann, Weierstrass não retornou diretamente ao tema. No discurso de ingresso à Academia de Berlim (1857), Weierstrass explicou que a teoria das funções elípticas, criada por Euler e cultivada com ardor por Adrien-Marie Legendre, fora recentemente conturbada "pela introdução das funções duplamente periódicas descobertas por Niels Abel e Carl Jacobi". Tais funções, dotadas de propriedades notáveis, tinham emprego tanto na geometria quanto na mecânica, mostrando assim serem "o fruto normal do amadurecimento natural da ciência". Em seguida, "Abel descobrira um teorema que se estende a todas as funções transcendentes que resultam da integração das diferenciais algébricas" e "Jacobi demonstrou a existência das funções periódicas de diversos argumentos cujas propriedades principais são fundadas sobre o teorema de Abel, cuja verdadeiro significado se tornou assim conhecido". [*Apud* POINCARÉ 1898:1-2]

No citado discurso, Weierstrass confessou haver decidido dedicar todo o seu labor à criação de uma teoria completa e coerente das funções abelianas. Essa tarefa se dividiria em três passos, dos quais o primeiro seria aprofundar o estudo da teoria das funções de uma variável e das funções de duas variáveis. O segundo passo consistiria no aprofundamento da teoria das funções elípticas, expondo-a em uma forma na qual a extensão se tornasse fácil. O último passo seria o estudo da extensão dessas funções transcendentes, isto é, o estudo das próprias funções abelianas. [POINCARÉ 1898:3]

Weierstrass escreveria a seu fiel pupilo Amandus Schwarz: "Quanto mais reflito sobre os princípios da teoria das funções — e eu o faço constantemente — se torna mais forte minha convicção de que essa teoria deva ser instituída sobre fundamentos de verdades algébricas e que, portanto, não seja correto (para dizê-lo resumidamente) que, de modo contrário, se invoque o 'transcendente' para se instituirem teoremas algébricos simples e fundamentais, ainda que, à primeira vista, digamos, sejam muito atraentes as considerações pelas quais Riemann descobriu tantas das mais importantes propriedades das funções algébricas." [*Apud* WEYL 1995:458]

WEYL (ibidem) considera enviesado esse desabafo de Weierstrass, asseverando que nenhum dos dois modos de entendimento, o topológico ou o algébrico, pode avocar a si a supremacia sobre o outro. Há já um século, ensinava Poincaré que nos deveríamos precatar de escolher entre os abordamentos adotados por Riemann e Weierstrass, pois "cada um tem uma função necessária. Com o instrumento de Riemann, a intuição enxergará, de uma única olhada, os aspecto geral das coisas; como um viandante que examina do alto de uma montanha a topografia da planície que vai visitar e descobre como terá que se orientar. Com o instrumento de Weiestrass, a análise esclarecerá sucessivamente todos os rincões e neles fará que penetre a clareza absoluta. Resumindo, o método de Riemann é, antes de tudo, uma ferramenta de descobrimento; o método de Weierstrass é, antes de tudo, uma ferramenta de demonstração." (24) [POINCARÉ 1898:7]

Assim, nesse episódio, não parece nítida a fronteira entre o contexto de descobrimento e o contexto de justificação.

Cabe apontar que, na opinião de YAGLOM [1988:151], quando Hermann Weyl proferiu a alocução '*A topologia e a álgebra como duas vias do entendimento matemático*' (1931, citada nesta seção), "a topologia era considerada indiscutivelmente uma parte da geometria e que, portanto, opor, no título, a álgebra abstrata à topologia equivalia a contrastar a álgebra com a geometria". (25) Mas esse reparo deve ser lido *cum grano salis*.

Concluo esta seção, notando que no imaginário de diversos matemáticos, nossos coevos, persiste senão a oposição, a complementaridade entre as duas modalidades de pensar, o algébrico e o geométrico.

Assim, para entender certas classes de grupos, Jacques Tits (depois agraciado com o prêmio Abel de 2008), estudou dedicadamente os grupos de Coxeter, que são grupos gerados por elementos de ordem dois, sujeitos a relações que definem o produto de cada par de geradores. Talvez a mais simples família de exemplos de grupos de Coxeter sejam os grupos diédricos, presentados como $D^{2m} = \{s, t: s^2 = t^2 = (st)^m = 1\}$. Outro exemplo nos é dado pelos grupos de Weyl, dos quais um espécime é o grupo simétrico $S_4 = \{s, t, u: s^2 = t^2 = u^2 = (st)^3 = (tu)^3 = (su)^2 = 1\}$. Todo grupo finito de Coxeter pode ser reificado, de um modo canônico, como um grupo de transformações ortogonais do espaço euclidiano, operando os geradores de ordem dois como reflexões relativas a hiperplanos. (S_4, por exemplo, pode ser reificado como o grupo das simetrias de um tetraedro regular.) Dado um grupo finito de Coxeter G, reificado como grupo de reflexões no espaço euclidiano, consideramos os hiperplanos associados a tais reflexões. Esses hiperplanos cortam a esfera unitária, efetuando sua decomposição em células e produzindo um complexo simplicial. Esse é o complexo de Coxeter associado ao grupo G. Em geral, um complexo simplicial é denominado um complexo de Coxeter se for isomorfo a um complexo associado a um grupo de Coxeter. Tais complexos são *colados*, a fim de produzirem *edifícios* [*buildings*]. [BROWN 2002:1244-1245]

Na opinião de Kenneth BROWN [ibidem], os edifícios foram introduzidos por Tits, a fim de se obter um vigamento geométrico [*a geometric framework*] para se entenderem

certas classes de grupos. Não destoa da opinião de Jean DIEUDONNÉ [1990:179]: "A classificação dos grupos de Lie semi-simples, que se fazia inicialmente à força de cálculos de determinantes, repousa agora no estudo de configurações geométricas, as *câmaras de Weyl*, cujas maravilhosas propriedades fazem empalidecer os resultados mais elegantes da geometria clássica; e a partir dessas configurações foram inventados recentemente outros objectos com propriedades ainda mais espantosas, *os edifícios de Tits*, fonte de aplicações fecundas e que verissimilmente nunca teriam sido imaginados sem a linguagem geométrica."

8.10 A visão e o tato como sentidos complementares

> "A antiga geometria está coberta de figuras. A razão disso é simples. Uma vez que, então, os princípios gerais e abstractos eram escassos, cada questão só poderia ser tratada no estado concreto, sobre a própria figura que era o objeto dessa questão. Além disso, somente a visão podia fazer descobrir os elementos necessários para a demonstração ou para a solução procurada." [Victor Poncelet, *apud* PIAGET & GARCIA 1987:96]

Pretendendo expor sua opinião acerca da distinção entre a perspectiva geométrica e a perspectiva algébrica, ATIYAH [2001:658] lembra que, segundo os estudos recentes conduzidos por neurofisiólogos, não é acidental que, por um relance a um ambiente, possamos obter tantas informações em uma fração de segundo. Isso decorre da organização neuronal do córtice cerebral, do qual cerca de quatro quintos são especializados nas funções visuais. Foram detectados mais de uma dúzia de centros neuronais, associado cada um com uma função específica, como a deteção da amplitude, do relevo e da cor e, também, com a interpretação das imagens detectadas.

Podemos acrescentar que, ao longo da história evolutiva da humanidade, a visão desempenhou papel relevante tanto na defesa diante dos predadores, quanto no reconhecimento de fontes alimentares e de ambientes propícios ao repouso.

Continua ATIYAH [2001:658], ensinando que "a intuição espacial ou a percepção espacial é uma ferramenta enormemente poderosa e que por isso a geometria é uma parte da matemática verdadeiramente poderosa, não apenas para objetos que são obviamente geométricos mas mesmo para aqueles que não o são. Tentamos ajustá-los à forma geométrica, porque isso nos faculta o uso da intuição. E a intuição é nosso instrumento mais poderoso." (26)

ATIYAH [2001:658-659] conclui eloquentemente o argumento, asseverando que, em oposição à visão geométrica, que é estática, a álgebra diz respeito a operações que se efetuam em uma sequência temporal. Mas adverte que a perspectiva geométrica e a perspectiva algébrica são aspectos complementares da realidade matemática. Assim, indagar

se queremos ser apenas geômetras ou algebristas equivale, de certa forma, a perguntar se queremos ser surdos ou cegos.

Há uma certa ambiguidade nessa opinião (que não é privativa de Michael Atiyah e cujas raízes podem ser rastreadas pelo menos até Henri Poincaré). Desde os *Elementos* de Euclides, se estudam as congruências entre figuras planares e, embora Euclides não tenha referido as transformações que ocorrem no fluxo do tempo, podemos interpretar o seu quarto postulado como o asserto de que, mediante movimentos rígidos do plano, podem superpor-se dois quaisquer ângulos retos. (Esse tema foi brevemente comentado no capítulo terceiro, na seção sobre os triângulos retilíneos.) Ora, as congruências são transformações (do plano em si mesmo ou do espaço em si mesmo) mas creio que nem a Poincaré nem a Atiyah acudiria a opinião de que o estudo das congruências de triângulos seja um tema de natureza algébrica. Cabe ainda lembrar que, desde a proposição do *programa de Erlangen* por Felix Klein, a geometria e a topologia geral podem considerar-se o estudo de propriedades invariantes sob a ação de certos grupos.

Além disso, embora se reconheça que a visão concorra decisivamente para formar a intuição geométrica, também se deve admitir que a intuição geométrica se pode constituir na ausência da percepção visual. De fato, no contexto perceptivo dos fenômenos matemáticos, o termo 'visão' não está *necessariamente* associado ao órgão do aparelho sensorial estudado nos manuais de anatomia e fisiologia humanas. Desde o século XVIII, se sabe que aos cegos não falece necessariamente a visão geométrica. Nicholas Saunderson, que ficara cego com um ano de idade, esteve por uma década (*circa* 1929-1939) de posse, na Universidade de Cambridge, da mesma cadeira que, anteriormente, fora ocupada por Newton (e recentemente, por Stephen Hawking). [JACKSON 2002:1246-1245]

SACKS [1995:152] informa que foram inspirados pela consideração da vida de Nicholas Saunderson diversos assertos do jovem Denis Diderot no escrito, ironicamente intitulado *Lettre sur les aveugles à l'usage de ceux qui voient* (1940).

Nos meados do século XX, o geômetra Lev PONTRYAGIN, cego desde os quatorze anos, foi figura dominante na topologia. A ele devemos teoremas notáveis na teoria da homotopia. Na avaliação do matemático Solomon Lefschetz, PONTRYAGIN transformava em ouro tudo em que tocasse. [JACKSON 2002:1245; PEIXOTO 1987:9]

Louis Antoine perdera a visão aos vinte e nove anos, na primeira guerra mundial. Consta que Henri Lebesgue lhe sugeriu o estudo da topologia em duas e três dimensões, em parte por que, então, não houvesse muitos trabalhos nessa área e, em parte, porque "em um tal estudo os olhos do espírito e o hábito da concentração substituiriam a visão perdida". (27) [JACKSON 2002:1247]

Entre outras coisas, Antoine se dedicou à prova de uma conjectura inspirada no teorema de Jordan-Schönflies, segundo o qual, dada uma curva planar simples e fechada, existe um homeomorfismo do plano em si mesmo que a transforma no círculo. A conjectura aduzida por Antoine supunha que, dada uma imersão J da esfera S^2 no espaço R^3, houvesse

um homeomorfismo desse espaço em si mesmo que convertesse a imagem $J(S^2)$ na esfera canônica do espaço R^3. Finalmente, Antoine concebeu uma imersão exótica [*a wild embedding*] de um conjunto no espaço R^3, depois denominada **colar de Antoine**. Recorrendo às ideias de Antoine, James Alexander concebeu a **esfera cornuda** [*the horned sphere*], que é uma imersão exótica da esfera S^2 no espaço R^3 e que falsifica a conjectura de Antoine. Antoine então provou que se pode obter a esfera cornuda desde o colar. [JACKSON 2002:1247]

Em 1957, Stephen Smale (posteriormente detentor da medalha Fields de 1966), expôs, na Universidade de Chicago, um teorema de sua lavra acerca da imersão de esferas: Todas as imersões da esfera S^n no espaço euclidiano são regularmente homotópicas.

Estava presente o renomado topólogo Samuel Eilenberg, que duvidou da veracidade da proposição. Eilenberg indicou que um dos corolários dessa proposição (a imersão canônica da esfera S^2 no espaço R^3 é regularmente homotópica à sua imersão antípoda) era equivalente à afirmativa de que se pudesse virar uma esfera pelo avesso, sem que no processo ocorressem rugas. Mas precisamente, tal corolário era equivalente à afirmativa da existência de uma homotopia regular da imersão canônica da esfera bidimensional no espaço euclidiano R^3 na imersão canônica de sua imagem especular, de sorte que em todas as fases da homotopia, a esfera permanecesse imersa no citado espaço euclidiano.

Smale retrucou que, embora não soubesse como definir tal homotopia regular, a sua existência estava certificada, pois era correta a demonstração construída para o teorema. (Também se conta que Raoul Bott, que fora orientador de Smale, tentou dissuadi-lo mas, por fim, se convenceu da validade do teorema, embora tampouco imaginasse como se construiria essa homotopia.)

Uma tal homotopia, depois denominada eversão da esfera, foi descoberta por Arnold Shapiro (1961) que não a publicou mas a explicou a Bernard Morin, cego desde os seis anos. Morin discutiu tais homotopias com René Thom e com Marcel Froissart e publicou sua primeira eversão em 1967. [JACKSON 2002:247-248; LIMA 1987:52; STEWART 1991:118]

O método de Shapiro foi ulteriormente divulgado por FRANCIS & MORIN [1979]: "Dedicamos este artigo à memória de Arnold Shapiro, que forneceu o primeiro exemplo de como se pode virar a esfera pelo avesso mas que nunca o publicou. O seu exemplo não é o mais simples nem o mais interessante dentre as diversas eversões que, desde então, foram imaginadas. É porém a única que usa apenas construções topológicas canônicas. Por isso, é relevante à história e à filosofia da matemática pois, houvesse esse exemplo sido mais bem explicado na época, dificilmente o tema teria ocupado tantas pessoas nas duas décadas subsequentes. Consignamo-lo de memória e em um estilo expositivo convencional mas esperamos que as ilustrações auxiliem o olho interior a ver as brilhantes ideias de Shapiro." (28)

Nesse excerto, Francis & Morin referem *o olho interior*, que pode ser interpretado como *a intuição*. Note-se que o vocábulo 'intuição' [*intuitio*] procede de '*tuitio*', nome derivado do verbo '*tueor*', que pode significar tanto 'ver' quanto 'olhar'. [PERTSCH 1983:640]

Parece-me, a esse respeito, pertinente a opinião do geômetra Shiing-Shen CHERN [1979:339]: "Talvez os aspectos psicológicos da verdadeira intuição geométrica não sejam jamais explicados satisfatoriamente. Houve uma época na qual a intuição geométrica indicava primariamente o poder de visualização no espaço de três dimensões. Agora, quando os espaços de dimensão mais elevada expeliram a maior parte dos problemas elementares, a visualização, na melhor das hipóteses, pode ser parcial ou simbólica. Também parece estar envolvido algum grau de imaginação táctil." (29)

Também parece elucidativo o depoimento de Bernard Morin, ao dizer que incapacidades como a cegueira reforçam os talentos e as deficiências, de modo que se notam contrastes mais intensos em portadores de alguma inabilidade. Morin distingue dois tipos de imaginação matemática, a temporal e a espacial. A **imaginação temporal** permite efetuarem-se longas cadeias de computação. (Morin avalia que ele próprio nunca teve essa habilidade e que a cegueira intensificou sua incapacidade.) A **imaginação espacial** permite a compreensão instantânea da informação. No caso dos videntes, a dificuldade em visualizar decorre de se considerarem, habitualmente, apenas as propriedades exteriores dos objetos, ignorando-se-lhes as propriedades interiores. Por refletir cuidadosamente acerca das duas faces dos objetos, Morin desenvolveu a habilidade de transitar mentalmente entre o exterior e o interior dos objetos. Por outro lado, como suas imagens decorrem, na primeira fase, apenas de sensações tácteis, é possível que não correspondam às imagens formadas mentalmente por videntes. [JACKSON 2002:1248]

A distinção entre as imagens formadas por cegos e videntes já fora considerada no século XVII, quando o pensador William Molyneux propusera a seu amigo John Locke o quesito seguinte: Um ser humano nascido cego, ao qual se ensinou a distinguir pelo tato um cubo de uma esfera, adquirindo a visão na adultície, será capaz de reconhecer o cubo e a esfera antes de tocá-los? John Locke respondeu negativamente. Essa resposta foi confirmada, vinte anos mais tarde, em 1728, quando o cirurgião inglês William Cheselden removeu as cataratas dos olhos de um menino de treze anos, nascido cego. "A despeito de sua grande inteligência e juventude, o menino esbarrou em profundas dificuldades com as mais simples percepções visuais." [SACKS 1995:124-125]

Esse último episódio parece confirmar que, efetivamente, a intuição geométrica não é da ordem da visão comum à maior parte dos seres humanos. Cabe, pois, aos psicólogos aprofundar esse tema, efetuando estudos em contextos específicos, como a percepção de nós e, sobretudo, o aprendizado da teoria dos nós por cegos e videntes. Note-se que, a despeito de serem conhecidos desde a antiguidade e de, no século XIX, haverem sido objeto da cuidadosa perscrutação pelos promotores da teoria dos vórtices, a teoria dos nós somente foi constituída como disciplina autônoma na segunda década do século XX. [EPPLE 1998A:356] Será feito um breve comentário sobre a gênese dessa teoria na última seção do presente capítulo.

8.11 As fases do processo gnoseológico

> "A prática canônica de redação matemática, venerada por sua antiguidade — apagar todos os indícios do desenvolvimento de um tema ou de uma prova — habitualmente dificulta grandemente aos estudantes perceber como operam as mentes dos matemáticos. Teoremas e argumentos parecem surgir do nada. Muito raramente, em livros didáticos ou em artigos de pesquisa, se insinuam as questões originais que motivaram os perquisidores ou as volteaduras especiais praticadas por seus espíritos no curso do desenvolvimento de um certo quesito. Em nossa opinião, essa é uma das coisas mais excitantes no fazer matemática. Esperamos que os estudantes enxerguem que os processos mentais que os matemáticos efetuam se parecem muito com os processos humanos normais de propor questões e de estar atento às sugestões feitas pela próprio tema. Essa conduta de questionamento e de busca encontra-se no coração dos esforços matemáticos bem sucedidos." (30) [BRILLHART & MORTON 1996:854]

Alain Connes (detentor da medalha Fields de 1982) distingue três níveis psíquicos na atividade dos matemáticos. [CHANGEUX & CONNES:1991:125]

O **primeiro nível** compreende a aplicação de regras, que podem ser bastantes simples, como as propriedades operativas dos números inteiros, ou mais elaboradas, como o cálculo das primitivas de uma função ou, ainda, o traçado do gráfico de uma curva. A tecnologia disponível permite aos computadores digitais efetuar tais operações. [CHANGEUX & CONNES 1991:125-126]

O **segundo nível** compreende a crítica, isto é, a reflexão sobre o significado de cálculos efetuados e sobre a sua adequação. Mas não se exaure nessas operações. É nesse nível que se constroem e se modificam hierarquias de valores e, portanto, nesse nível, as emoções desempenham papel relevante. [CHANGEUX & CONNES 1991:126-127]

O **terceiro nível** tem natureza inventiva e consiste na capacidade tanto de resolver problemas anteriormente propostos quanto de descobrir uma parte da matemática à qual os conhecimentos adquiridos não dão acesso imediato. Laborando nesse nível, "chegamos a colocar problemas novos, a abrir vias anteriormente inacessíveis e a descobrir uma parte da geografia da matemática." Nesse nível criam-se instrumentos de pensamento que não existiam no *corpus* instituído. [CHANGEUX & CONNES 1991:127-128]

Nesse terceiro nível, durante o processo de invenção, podem distinguir-se duas, três ou quatro fases, consoante os depoimentos prestados por matemáticos. Segue-se a

descrição oferecida por Jacques Hadamard, que considerou quatro fases. [HADAMARD 1954:56]

A **primeira fase** consiste na preparação Nessa fase, os matemáticos comportam-se distintamente. Alguns, como Henri Poincaré, pensam arduamente sobre um dado problema, até que decidem abandoná-lo. Outros, como Michael Atiyah, preferem "ir e vir nas águas matemáticas, refletindo sobre coisas, ficando curioso, conversando com outras pessoas, provocando ideias; as coisas emergem e tento descobrir mais dados". (31) Nessa fase, um matemático, que procure descobrir um fato acerca de um espaço de Hilbert de dimensão infinita, efetua experimentos mentais, examinando minuciosamente o que ocorre em duas e em três dimensões. Por outro lado, quando não consegue resolver um problema específico, pode estendê-lo a todo um gênero, buscando a solução no âmbito geral, para obter o caso específico como consequência. Esse foi o método recomendado por David Hilbert. [ATIYAH 1984:10; CHANGEUX & CONNES 1991:117; HALMOS 1968:381; HADAMARD 1954:45, 56; POINCARÉ 1948:13]

A mim me parece que nessa primeira fase do terceiro nível psíquico se processam as influências de outros saberes, notadamente da física. Para que a referência ao influxo da física sobre a matemática não se configure em uma mera platitude, remeterei o leitor à última seção deste capitulo, na qual discutirei o quesito da legitimação das teorias matemáticas.

A **segunda fase** consiste na incubação, na qual o problema é afastado da consciência. Na descrição dessa fase, Poincaré refere a elaboração de uma resposta pelo *inconsciente ou eu subliminar*, comentando que "o eu subliminar não é em nenhum aspecto inferior ao eu consciente; não é puramente automático; é capaz de discernimento; tem tato e delicadeza; sabe escolher e adivinhar. [...] Sabe melhor adivinhar que o eu consciente, pois obtém bom êxito onde aquele fracassa." [POINCARÉ 1948:56-57]

Parece-me que, ao usar o termo 'inconsciente', Poincaré lhe atribuía a acepção introduzida pelo psicólogo Pierre Janet (1859-1947): um ato inconsciente é uma "ação que apresenta todos os caracteres de um fato psicológico, salvo um, de sempre ser ignorado pela própria pessoa que o executa, no mesmo momento em que o executa". (32) [FILLOUX 1977:19]

Hadamard insiste na distinção entre inconsciente e subconsciente, comparando o último à visão periférica, por oposição à consciência, análoga à visão focal; e afirma que somente os conteúdos subconscientes são acessíveis à introspecção. [HADAMARD 1954:25-26]

Roger Penrose narra que, após haver trabalhado arduamente no problema das singularidades dos buracos negros, estava conversando socialmente com um colega, enquanto andavam na direção do escritório. A conversa fora interrompida, enquanto atravessavam a rua e, durante aquele lapso de tempo, lhe ocorreu uma ideia, que logo foi afastada, ao se reiniciar a conversa. Mais tarde, sentindo-se empolgado, procurou lembrar o que lhe teria

causado esse sentimento. Tornou a lembrar-se daquela ideia, que efetivamente fornecia a solução do problema com que se ocupara. [PENROSE 1991:464-466]

Também se pode invocar o caso do químico Kekule von Stadonitz (1829-1896) que, após meditar insistentemente acerca de uma estrutura viável para o benzeno, sonhou com o uróboro, a serpente que morde a própria cauda, antigo símbolo egípcio referido em textos de alquimia. Depois que acordou, propôs para o benzeno a estrutura hexagonal (o núcleo benzênico). [SCHENBERG 2001:133]

Para explicar esse processo, já se propôs que operam sucessivamente duas funções cognitivas, sendo uma geradora de diversidade e a outra avaliadora, ligada à afetividade.

A **terceira fase** consiste na iluminação, que se inicia, quando advém uma visão clara do problema sobre o qual tanto se meditou e que foi, temporariamente, esquecido. Por oposição à primeira, essa fase se reveste de grande carga afetiva. Alain Connes relatou que, nas raras vezes que lhe ocorrera a iluminação, ele fora possuído de tão intensa emoção, que não pudera evitar lhe viessem lágrimas aos olhos. [CHANGEUX & CONNES 1991:114]

Compreender um teorema não equivale a compreender, passo a passo, uma demonstração, cuja leitura pode demorar várias horas. Trata-se de ver a totalidade da demonstração em um pequeno lapso de tempo. [CHANGEUX & CONNES 1991:119]

Habitualmente, a iluminação precede a demonstração. Mas há pelo menos um caso em que isso não ocorreu, referido pelo matemático Michael Atiyah, detentor da medalha Fields (1966). "Lembro-me de um teorema que provei, sem enxergar realmente a razão de sua veracidade. Preocupou-me por diversos anos. Tratava da relação entre a teoria K e a representação de grupos finitos. Para demonstrar o teorema, tive de decompor o grupo em grupos solúveis e grupos cíclicos. Havia longas cadeias de induções e muitos obstáculos. Para que a prova fosse efetiva, cada minúcia exigia um cuidado completo. Por assim dizer, precisei de muita sorte. Fiquei maravilhado, ao perceber que tudo se encaixasse e continuei pensando que, se se rompesse um único elo dessa cadeia, se houvesse uma única lacuna na argumentação, ocorreria o colapso na integridade da prova. Como eu não a compreendesse, a prova bem que poderia ser falsa. Fiquei preocupado com isso e, depois de cinco ou seis anos, compreendi a correção da prova. Então, obtive uma prova completamente diferente, substituindo grupos finitos por grupos compactos. Assim, com técnicas bem distintas, ficou claro o motivo de tudo ser verdadeiro." (33) [ATIYAH 1984:17]

A **quarta fase** consiste na exposição, na qual o matemático descreve os teoremas por ele obtidos, de sorte que outros possam entendê-lo. Nessa fase são propostas definições de novos conceitos e são elaboradas as provas, "argumentos que consideramos tão convincentes, que os usamos, a fim de convencermos nossos interlocutores do que estamos afirmando". (34) [USPENSKY 1987:10-11]

É nessa fase que se exerce sobremodo o que Philip Davis e James Anderson denominaram matemática analítica: "Na matemática analítica, predomina o material

simbólico. Quase sempre, é uma tarefa dura de executar. Despende tempo. É fatigante. Exige industriamento específico. Pode exigir verificação constante por toda a comunidade matemática, a fim de lhe conferir confiabilidade. A matemática analítica é executada apenas por muito poucas pessoas. A matemática analítica é um prática auto-crítica e de escol. Os praticantes de suas manifestações mais elevadas compõem uma 'talentocracia'. A grande virtude da matemática analítica dimana do fato de que, enquanto seja árduo verificar as intuições alheias, é possível verificar as suas provas, embora muito frequentemente isso seja difícil." (35) [DAVIS & ANDERSON 1979:113]

No exemplo anterior de Atiyah, a primeira prova servira para persuadir ao próprio autor da veracidade do teorema. Mas ele próprio narra que, "quando o teorema do índice fora formulado, sabíamos [Singer e eu] que ele era verdadeiro. Mas demoramos um par de anos para obter uma prova. Isso decorreu, parcialmente, de estarem envolvidas técnicas diferentes e de eu ter sido obrigado a aprender novas coisas, para conseguir a demonstração e, nesse caso, várias provas. Não presto muita atenção à importância de provas. Penso que seja mais importante compreender alguma coisa." (36) [ATIYAH 1984:16]

Conclui Atiyah, afirmando que "a demonstração é importante como a conferência da compreensão. Posso achar que compreendo mas a demonstração é a censura de meu entendimento e nada mais. É a última fase da operação — uma última revisão — mas não é, de forma alguma, a primeira coisa." (37) [ATIYAH 1984:17]

Parece-me que no estilo de trabalho de William Thurston, a terceira e a quarta fase não se distinguem claramente. Em seu depoimento acerca do teorema da geometrização para variedades de Haken, ele afirma que "era um teorema duro e despendi um intenso esforço, para refletir sobre ele. Quando concluí a prova, despendi outro tanto de esforço, para verificá-la, procurando as dificuldades e examinando-as perante informações independentes. Gostaria de ser mais minucioso sobre o que pretendo dizer, quando afirmo que provei esse teorema. Quero dizer que *tive um fluxo de ideias claro e completo, incluídas as minudências*, que resistiram a um intenso escrutínio por mim e por outros. Todavia, às vezes ocorre um enorme fator de expansão, ao se traduzir minha versão mental para algum escrito que possa ser transmitido a outra pessoa." (38) [THURSTON 1994:174]

Assim, enquanto essa quarta fase se vincula à *ars disserendi*, as três outras fases se prendem à *ars inveniendi*. Umas poucas vezes (contrariando o dito de BRILLHART & MORTON, na epígrafe a esta seção), os autores revelam o processo de invenção, como van der Waerden [1965], que narrou como havia encontrado a prova da conjectura de Baudet, por ele publicada em 1927.

Devo insistir em que a exposição das quatro fases do processo inventivo, proposta por Jacques Hadamard, não constitui uma regra nem tampouco uma descrição do modo segundo o qual processo inventivo ocorre com maior frequência, já que o estudo do processo inventivo ainda não mereceu a atenção dos psicólogos. [HADAMARD 1954:64]

Além disso, a história da matemática mostra que o processo inventivo de um teorema não se exaure durante a vida de uma único ator histórico, sendo frequente que uma

ideia imaginada em uma época somente seja provada depois. "Em muitas partes da geometria, da topologia diferencial e da análise global, as intuições são muito complexas e resistentes a serem reduzidas a um artigo. Por isso, pode ocorrer uma longa maturação, antes do encerramento." (39) [MAC LANE 1994:191]

E essa conclusão somente ocorre, quando as provas são construídas. Na expressão irônica de MAC LANE [1994:14], "não somos redimidos apenas pela crença, mas pela crença e pelas obras". (40)

Para concluir, é mister lembrar que também as provações de teoremas se sujeitam à historicidade dos cânones de rigor. YAGLOM [1988:227-228] refere que a evolução dos cânones de rigor foi tão intensa, no interstício de 1870 a 1930, que Élie Cartan considerou como "estímulo à imaginação e não como uma obra por continuar" a longa memória sobre grupos contínuos infinitos escrita por Sophus Lie. Lie considerava como *grupos contínuos infinitos* os grupos contínuos que consistiam de transformações que não se podiam exprimir mediante um conjunto finito de parâmetros. (41)

Não pude aferir se houve algum exagero (por Élie Cartan ou por Yaglom) nessa avaliação mas, desde pelo menos a edição das *Vorlesungen über neuere Geometrie*, por Moritz Pasch (1882), se impuseram novos cânones de rigor nas provas matemáticas, sob a influência de David Hilbert, Emmy Noether, van der Waerden e, finalmente, Nicolas Bourbaki. [Colin McClarty, *apud* MAZUR 1997:209]

8.12 O problema da prova

Assim como a adução de conjecturas, também a formulação de problemas constitui uma fase do processo inventivo que pode preceder, por muitas décadas, a fase final, que é a composição das provas.

Se o espírito grego nos legou três problemas (a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trisseção de um ângulo), cuja solução definitiva foi dada nos meados do século XIX, a mais celebrada coletânea de problemas foi proposta na virada daquele século para o século XX.

Em 1897, Henri Poincaré havia feito a principal conferência no congresso internacional de matemáticos, discorrendo sobre "a relação entre a análise matemática e a física matemática" [*Sur les rapports d'analyse pure et de la physique mathematique*]. Convidado a proferir uma alocução no segundo congresso internacional de matemáticos programado para 1900, David Hilbert pensou que o melhor modo de corresponder à honraria que lhe foi tributada seria referir as ideias de Poincaré e apresentar uma visão alternativa.

Foi dissuadido desse cometimento por seu colega Hermann Minkowski, que lhe escreveu de Zurique (em 5 de janeiro de 1900), sugerindo-lhe fosse "mais atraente a tentativa de vislumbrar o futuro e compilar uma lista de problemas com os quais os matemáticos

deveriam lidar no próximo século. Ocupados com esses temas, as pessoas falarão acerca de tua preleção durante décadas." Ainda no fim de março, Hilbert pediu a opinião de Adolf Hurwitz. Nos meados de julho, Hilbert surpreendeu seu dois colegas com uma versão escrita da palestra, versão essa que, ulteriormente, seria encaminhada para publicação. Ambos os amigos lhe sugeriram abreviar a palestra. [CORRY 1998:122; THIELE 2003:3]

Hilbert acolheu a sugestão e enumerou, na forma de problemas, as questões que lhe pareceram centrais ao avanço do conhecimento matemático. Justificou a escolha da forma de expor essas questões, dizendo "serem inconfutáveis o alto significado de certos problemas para o progresso da ciência matemática em geral e o papel importante que eles desempenham, através do trabalho dos investigadores individuais. Um ramo do saber será vigoroso, enquanto oferecer problemas em abundância; a falta de problemas significa marcescência ou fim da evolução autônoma. A pesquisa matemática precisa de problemas, assim como todo empreendimento humano persegue metas. É mediante a resolução de problemas que o pesquisador tempera a sua força; que ele encontra novos métodos e perspectivas e que alcança um horizonte mais amplo e mais livre." (42) [HILBERT 1900:253-254]

No congresso em Paris, expôs apenas dez problemas, consoante o relato constante do fascículo n. 7 (1900:57-79) do *Bulletin of the American Mathematical Society*, firmado por C. A. Scott. A lista completa dos vinte e três problemas somente apareceu nas *Notícias da Real Sociedade das Ciências de Göttingen* [*Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1900:253-297]. [CORRY 1998:123; THIELE 2003:1]

Surpreendentemente, Hilbert havia delineado um vigésimo quarto problema que, aparentemente, não foi confiado nem aos dois citados colegas (que eram revisores das *Nachrichten*). Tanto quanto eu saiba, esse vigésimo quarto problema foi mantido oculto no terceiro volume do caderno de anotações [*Mathematische Notizbücher*] de Hilbert e descoberto por Rüdiger Thiele, que o divulgou em 2003. Eis o achado de THIELE [2003:2]:

> "O vigésimo quarto problema de minha preleção em Paris seria: Critérios de simplicidade ou prova da maior simplicidade de certas provas. Desenvolver uma teoria do método de prova em matemática, em geral. Sob um certo conjunto de condições, pode existir apenas uma prova mais simples. Muito geralmente, se existirem duas provas de um mesmo teorema, devemos continuar examinando, até havermos deduzido cada prova da outra ou até se tornarem perfeitamente evidentes as condições variantes (ou os recursos) que foram usados nas duas provas. Dados dois caminhos, não é lícito tomar um qualquer deles ou procurar um terceiro. É necessário investigar a área situada entre os dois caminhos. Encontram-se tentativas de julgar a simplicidade de uma prova no meu exame de sizígias e de sizígias entre sizígias. O uso ou o conhecimento de uma sizígia simplifica, de um modo essencial, a prova de que é verdadeira uma certa identidade. Porque qualquer processo de adição é uma aplicação da lei comutativa da adição e porque isso sempre corresponde a teoremas geométricos ou a conclusões lógicas, podemos contar esses processos e, por exemplo, ao provar

certos teoremas de geometria elementar (como o teorema de Pitágoras ou o teorema sobre os pontos notáveis de um triângulo), podemos muito bem decidir dentre as provas qual seja a mais simples."

Parte da última sentença quase não está legível e apresenta erros gramaticais que, juntamente com as inserções e as correções feitas por Hilbert, sugerem que esse apontamento foi exarado com pressa. [THIELE 2003:2]

Embora esse vigésimo quarto problema não tenha sido apresentado, na preleção feita durante o citado congresso, nela Riemann se estendeu acerca da relação entre o rigor e a simplicidade das provas, esclarecendo ser "um erro acreditar que o rigor na condução de uma prova seja adversário da simplicidade. Em numerosos exemplos, ao contrário, encontramos confirmação de que o método rigoroso também é simultaneamente o mais simples e o mais compreensível. O anseio por rigor obriga-nos mesmo a encontrar modos de inferir mais simples; também frequentemente, esse anseio nos prepara o caminho a métodos que se desenvolvem com maior facilidade que os métodos antigos de pequeno rigor." (43) [HILBERT 1900:257]

Hilbert exemplificou seu asserto, recorrendo a duas teorias distintas: as curvas algébricas e as séries de potências: "Dessa forma, a teoria das curvas algébricas experimentou considerável simplificação e maior unidade através do método mais rigoroso da teoria das funções e da consequente introdução de recursos transcendentes. Ulteriormente, a prova de que as séries de potências admitem o emprego das quatro operações elementares bem como da diferenciação e da integração termo a termo e o resultante conhecimento do significado da séries de potência contribuiram consideravelmente à simplificação de toda a análise, sobretudo à simplificação da teoria da eliminação e da teoria das equações diferenciais bem como à simplificação da própria teoria através das provas de existência." (44) [HILBERT 1900:257-258]

Como exemplo mais notável, Hilbert indicou como o rigor impresso ao cálculo das variações simplificara sobremodo a sua exposição: "Porém, o exemplo contundente de meu asserto é o cálculo das variações. O tratamento da primeira e da segunda variação da integral definida acarretou cálculos sumamente complicados e o desenvolvimento desse tópico pelos matemáticos anteriores sentiu falta do rigor exigido. Weierstrass nos indicou o caminho para um novo e seguro fundamento do cálculo das variações." (45) [HILBERT 1900:258]

E anunciou que, ao fim da conferência, trataria rapidamente da simplificação no cálculo das variações introduzido pelo emprego das integrais simples e duplas: "No fim de minha conferência, aludirei brevemente ao exemplo das integrais simples e duplas, no qual o prosseguimento nesse caminho implicou simultaneamente uma simplificação surpreendente do cálculo das variações, na medida em que, para provar o critério necessário e suficiente da ocorrência de máximo e de mínimo, o cálculo da segunda variação e também parte dos passos cansativos referentes à primeira variação se tornam inteiramente dispensáveis — para

não referir o progresso decorrente de se excluir a restrição das variações para as quais os quocientes diferenciais da função pouco variam." [46]) [HILBERT 1900:258]

Hilbert concedeu uma entrevista a Charlotte Angas Scott (autora do relato sobre o referido congresso, publicado no *Bulletin of the American Mathematical Society*), na qual também acentuou a necessidade de que as provas fossem rigorosas e simples: "Consoante nossa expectativa perante qualquer problema, deve haver algum resultado definitivo de algum tipo. Tal problema não pode ser esquecido, enquanto não houvermos obtido ou uma solução satisfatória ou a demonstração da impossibilidade de que seja resolvido. O rigor matemático que é essencial no tratamento de um problema não exige demonstrações complicadas. Ele apenas exige que o resultado seja obtido mediante um número finito de passos lógicos, desde um número finito de hipóteses fornecidas pelo próprio problema. Na busca desse rigor, podemos encontrar simplicidade." [47] [*Apud* THIELE 2003:6]

Parece que a ênfase outorgada por Hilbert à simplicidade tenha constituido um aspecto característico de sua obra. Na redação de seu obituário, Hermann Weyl confrontou a disseminada insatisfação que afligia a comunidade matemática, ao perceber a perda de substância matemática nos procedimentos formais e ao se lembrar dos feitos de Euler, com a esperança que Hilbert lhe infundia: "Parece que, pela atuação de Hilbert, o domínio de problemas concretos e simples e a formação de conceitos abstratos e gerais se equilibram de um modo particularmente feliz. Hilbert nasceu em uma época na qual os algoritmos desempenharam um papel mais amplo. Por isso, ele acentuou fortemente os procedimentos conceituais. Nesse meio termo, o avanço dos métodos formais tem sido muito desimpedido e muito pouco respeitante à substância matemática. Na obra de Hilbert, a simplicidade e o rigor andam de mãos dadas. A exigência crescente de rigor, imposta pelas reflexões críticas conduzidas no século XIX sobre aquelas partes da matemática que operam com o contínuo, foi percebida por muitos investigadores como um jugo pesado que tornou arrastados e desajeitados os seus passos. Cheios de saudades e abatidos pela inquietude, contemplavam a era da análise irrefletida de Euler. Pelo labor de Hilbert, o rigor já não aparece como adversário mas como promotor da simplicidade." [48] [WEYL 1944A:549]

8.13 Argumentos usados na legitimação das teorias matemáticas

Inspirado na tradição social iniciada pelos estudos de Max Weber, Moritz EPLLE [1995:372-373] sustenta que a invenção de uma nova disciplina matemática se processa em duas fases, às quais chama *diferenciação* e *eliminação do contexto*.

A diferenciação consiste na separação gradual de um feixe de problemas que ocorrem em um domínio já instituído (a que Kuhn chamaria de pesquisa normal). Tal separação decorre da percepção de que os citados problemas podem ser investigados por técnicas comuns que não se mostram adequadas aos demais quesitos do citado domínio de pesquisa.

A eliminação dos contextos consiste na percepção de que, na ordem vertente de questionamento, os pressupostos anteriormente admitidos não são relevantes à adequada caracterização do feixe de problemas que se distinguem. Nas palavras do autor citado:

> "Uma *eliminação de contextos*, por outro lado, marca um passo crítico na pesquisa matemática (ou, mais geralmente, na investigação científica). Ela põe em seus próprios pés, por assim dizer, um complexo de problemas previamente diferenciados. Como efeito consciente ou inconsciente das decisões tomadas ativamente pelos pesquisadores, tal eliminação de contextos suscita ou completa uma modificação na rede conceitual das disciplinas científicas. Tipicamente, a decisão de aceitar um novo cânone de racionalidade é central na eliminação de contextos. A mudança de tais cânones implica a reavaliação e a reorganização da diversidade de elementos da prática científica, incluída a arquitetura percebida do corpo do conhecimento científico." (49)

Já foram descritos o surgimento e a evolução do cálculo infinitesimal. Usando a nomenclatura proposta por Epple, poderemos dizer que a *diferenciação* ocorreu, quando a comunidade percebeu que uma classe de problemas, que envolviam curvas e superfícies, poderia ser investigada conjuntamente por uma nova técnica (ou por *um novo método*). Processou-se, por outro lado, a *eliminação do contexto*, quando se defendeu que o emprego dessa nova técnica não dependia do contexto no qual ela amadurecera. Cabe lembrar que foi decisiva, a esse respeito, a atitude de Euler, ao afirmar que a coincidência entre as derivadas parciais de segunda ordem, mistas, de funções de duas variáveis reais não fosse um fato de caráter geométrico e que, portanto, devesse ser provado por um argumento analítico, baseado na própria natureza da diferenciação (conforme escrevi na seção *A maturescência do cálculo infinitesimal*, no capítulo segundo).

Frequentemente, a diferenciação é precedida pela *legitimação* da pesquisa, a atitude adotada conscientemente pelo investigador, quando mostra à comunidade que os problemas que ele está estudando se inscrevem na corrente dominante de pesquisa.

Muitas vezes, a legitimação de uma nova técnica é uma consequência imediata do seu bom êxito na resolução de problemas até então não resolvidos.

Outras vezes, tal aceitação não é necessariamente pacífica. No próximo capítulo (na seção *A gênese da estrutura de corpo*), serão comentadas as vicissitudes por que passou o emprego do princípio de Dirichlet. Riemann, na tese de 1851, discutira a existência e a unicidade de uma função que minimiza uma certa integral (denominada integral de Dirichlet). Desde então, apoiando-se apenas, aparentemente, nos aspectos físicos do problema vertente, Riemann costumava admitir a a existência e a unicidade de funções em contextos semelhantes. A prova desse fato (sob condições mais restritivas) somente seria obtida por David Hilbert, em 1901. Nesse ínterim, receando deambular por terreno inseguro, diversos geômetras tentaram recuperar, com outra argumentação, os resultados obtidos por Riemann e produziram um acervo significativo de ideias importantes. [GARDING 1997:115; TAZZIOLI 2001:233; O'CONNOR & ROBERTSON, biografia de Clebsch]

Mas, para resolver esse tipo de problema, já em 1828 (antes de Gauss e de Dirichlet), George Green elaborara um método direto, exposto no *Ensaio sobre o emprego da análise matemática às teorias da eletricidade e do magnetismo* [*An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*], "uma memória cheia de novas ideias e de resultados na teoria do potencial". (50) [TAZZIOLI 2001:234-235]

Um dos passos desse método consistia em se exprimir toda função harmônica mediante os valores de fronteira. Mais precisamente, denotando por Ω a região na qual U é harmônica, Green concluiu que U se exprimiria como $\{1/(4\pi)\}.\int\{(1/r)(\partial U/\partial N) - U.(\partial/\partial N)(1/r)\}ds$, estendida à fronteira $\delta\Omega$. Nesse artigo, Green discutiu diversas propriedades das funções harmônicas, inclusive as identidades hoje denominadas *identidades de Green*. [TAZZIOLI 2001:234-236]

Já vimos (na seção *As provas de existência*, do presente capítulo) que é apenas um sofisma o recurso a "razões de natureza física" para justificar a existência e a unicidade de soluções de equações diferenciais. Contudo, o apelo (talvez subconsciente) a uma certa harmonia entre as duas ciências tem sido um motor indispensável à matemática. Para mostrar a riqueza da interação entre ambos os domínios do saber, considerarei brevemente a gênese da teoria dos nós que, consoante EPPLE [1998A:302], constituiu um episódio no qual ocorreu intensa interação entre a comunidade dos físicos [*natural philosophers*] e a comunidade dos matemáticos.

EPPLE [1998A:302] distingue três aspectos vigentes na época em que nasceu a teoria dos nós: (a) Havia então uma sobreposição significativa entre as comunidades e os discursos dos físicos e dos matemáticos nos quais se elaboravam e se permutavam ideias topológicas. (b) Paralelamente a essa permuta de ideias, se processava a legitimação, pelas teorias físicas, das inovações matemáticas. (c) O pensamento físico conduziu a novos problemas matemáticos e, consequentemente, a novos teoremas.

Suplementarmente, esse episódio evidencia o fato, frequentemente ignorado, de que a topologia não foi uma teoria construída apenas para responder a indagações da matemática.

A teoria dos nós medrou na confluência de duas tradições físicas: (a) O antiquíssimo estudo dos vórtices na hidrodinâmica (que remonta a Leonardo da Vinci). [NEMÉNYI 1965:59-60] (b) Um quesito subjacente ao problema *geométrico* do espaço [*der Raumproblem*] mas distinto dele. É escusado declarar que, nesta seção, não se empreende o estudo histórico da teoria dos nós nem, tampouco, da hidrodinâmica mas tão somente se apresenta uma breve crônica, para se mostrar como argumentos físicos foram usados, nesse contexto, para legitimar estudos matemáticos.

Em 1833 (em um livro de notas que somente seria publicado em 1867), depois de deplorar que, após um século e meio, a geometria da posição [*geometria situs*], vislumbrada por Leibniz, ainda não houvesse nascido, Gauss afirmou que "um problema central na sobreposição da geometria da posição com a geometria da grandeza [*geometria magnitudinis*]

seria contar o número de entrelaçamentos [*Umschlingungen*] de duas curvas fechadas ou infinitas". [*Apud* EPPLE 1998B:45]

Em 1858, no artigo *Sobre as integrais das equações hidrodinâmicas que correspondem ao movimento turbilhonar* [*Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*], Hermann von Helmholtz se ocupou do movimento de um fluido perfeito (isto é, incompressível e destituído de fricção).

Na introdução ao artigo, Helmholtz esclarecera: "Emprego essa locução com o mesmo significado adotado por Riemann, ao referir as superfícies simplesmente e multiplamente conexas. Assim, um espaço n-mente conexo é um espaço no qual podem ser colocadas não mais que n - 1 superfícies secantes [*Schnittflächen*] sem que o espaço seja dissecado em duas partes completamente separadas. Portanto, nessa acepção, um anel sólido é um espaço duplamente conexo. As superfícies secantes devem ser completamente delimitadas pela curva que corta a superfície que reveste o espaço." [*Apud* EPPLE 1998A:312]

Nesse passo, Helmholtz citava um artigo de Riemann sobre funções abelianas [*Theorie der Abel'schen Functionen*], publicado no mesmo periódico, no ano anterior.

Inicialmente, Helmholtz consignou as chamadas equações de Euler, que vinculam as componentes da força externa que atua sobre um ponto do fluido com as coordenadas desse ponto, com as componentes da velocidade do fluido, com a densidade e com a pressão, no ponto considerado. Nos tratamentos anteriores desse problema (sobretudo por Euler e por Lagrange), se supôs que a velocidade do fluido derivasse de uma função potencial ϕ.

Em seguida, Helmholtz aditou, ao pé da página, o apontamento seguinte: "É amplamente aceito que toda função ϕ a qual satisfaz à equação acima [de Laplace] em um espaço simplesmente conexo se pode exprimir como o potencial de um certa distribuição de massas magnéticas em uma superfície do espaço." [*Apud* EPPLE 1998A:312]

Continuou Helmholtz o apontamento, acentuando a dificuldade, de caráter matemático, que surgiria, se considerássemos regiões *multiplamente conexas* do espaço. Nesse caso, afirmou ele, existiriam funções multiformes que atenderiam à equação de Laplace mas não satisfariam às identidades de Green. Essa nota acerca de potenciais em regiões não triviais, da perspectiva topológica, era pertinentes ao problema que mais interessava a Helmholtz, o estudo de fluxos que ele não supunha serem fluxos potenciais. [EPPLE 1998A:312]

Na linguagem hodierna, a condição de existência de função potencial para o campo de velocidades (u, v, w) é equivalente à simetria da matriz jacobiana desse campo, o que se traduz pelas equações $(\partial w/\partial y) - (\partial v/\partial z) = 0$, $(\partial u/\partial z) - (\partial w/\partial x) = 0$ e $(\partial v/\partial x) - (\partial u/\partial y) = 0$.

Então, Helmholtz buscou uma interpretação mecânica, apoiando-se nas equações de Euler e estudando o movimento instantâneo de uma porção infinitamente pequena de uma massa fluida cujo campo de velocidades *não* fosse conservativo. Concluiu Helmholtz que tal movimento se poderia decompor em uma translação, uma expansão e uma compressão, ao longo de três eixos mutuamente ortogonais, e de uma rotação em torno de um eixo cujos cossenos diretores, ξ, η e ζ, fossem proporcionais às diferenças $(\partial w/\partial y) - (\partial v/\partial z)$, $(\partial u/\partial z) - (\partial w/\partial x)$ e $(\partial v/\partial x) - (\partial u/\partial y)$, que hoje reconhecemos como as componentes do rotacional [*curl*] do campos de velocidades. Além disso, a velocidade angular seria proporcional à raiz quadrada da soma $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, raiz essa que hoje reconhecemos como a norma de um vetor. [EPPLE 1998A:312-313]

Um fluxo que não admitisse funções potenciais locais foi denominado movimento turbilhonar [*Wirbelbewegung*] ou vórtice. Pelo menos em alguma região do fluido, as partículas estão sujeitas a rotações infinitesimais do tipo descrito. Para apreender tais rotações, Helmholtz introduziu dois novos termos: as linhas de vórtice [*Wirbelfäden*], definidas como as curvas cujas tangentes são, em cada ponto, colineares com o eixo de rotação do fluido, no ponto considerado; e os tubos de vórtice [*Wirbelröhre*], feixes de linhas de vórtice que nascem em um elemento de área transverso ao eixo de rotação. [Cf. EPPLE 1998A:313]

Na parte final do artigo, Helmholtz apresentou a descrição do comportamento esperado de dois anéis de vórtice circular dotados do mesmo eixo de simetria:

> "Se ambos os anéis apresentarem a mesma direção de rotação, eles continuarão no mesmo sentido e o anel anterior ampliar-se-á e mover-se-á mais lentamente, enquanto o segundo se contrairá e se moverá mais rapidamente; se as velocidades de translação não forem diferentes demais, o segundo terminará por alcançar o primeiro e passará através dele. Então, o mesmo movimento será descrito pelo primeiro anel, de modo que os anéis passarão alternadamente um através do outro." (51) [*Apud* EPPLE 1998A:316]

Não há registro de que Helmholtz houvesse conduzido experimentos que confirmassem a adequação da teoria elaborada. Coube a Peter Tait efetuar experimentos com anéis de fumaça, consoante a descrição dada por EPPLE [1998A:319] de experimentos feitos em 1867, na presença de William Thomson:

> "Tait usou duas caixas com um furo circular em uma das faces laterais e com um diafragma de borracha na face oposta. No interior das caixas, um agente químico (sulfato de magnésio) produzia uma fumaça espessa e branca. Quando colidia com o diafragma de borracha, anéis circulares de fumaça escapavam pelos buracos. As caixas podiam ser colocadas em diversas posições, fazendo com que os anéis de fumaça interatuassem exatamente como Helmholtz indicara." (52)

Era uma época na qual havia um interesse geral em concepções acerca da natureza da matéria, acentuado pelo progresso na análise espectral, que tornava cada vez mais urgente uma teoria coerente da estrutura atômica. Sugere EPPLE [1998A:321] que a ilustração, feita

por Tait, dos escritos de Helmholtz permitiram a Thomson compreender a estabilidade dos tipos topológicos dos tubos de vórtices fechados de um fluido perfeito incompressível. Essa ideia seria imediatamente transmitida pelo próprio Thomson a Helmholtz:

> "[...] há poucos dias, Tait mostrou-me em Edinburgo um modo magnificente de produzir vórtices. [...] Às vezes, podemos fazer com que um anel escape através do outro, ilustrando perfeitamente tuas descrições. Quando um anel passa perto de outro, cada um deles se perturba intensamente, exibindo um estado de vibração violenta por alguns segundos, até que recupera a forma circular. [...] A permanência absoluta da rotação e a relação invariante que provaste existir, em um fluido perfeito, entre a rotação e a porção do fluido que uma vez adquiriu tal movimento mostram que, se existir um fluido perfeito que permeie todo o espaço, constituindo a substância de toda a matéria, um anel de vórtice será tão permanente quanto o são os átomos sólidos duros, admitidos por Lucrécio e seu adeptos (e por seus antecessores), para explicarem a propriedades permanentes dos corpos (como o ouro e o chumbo) e as diferenças entre os seus caracteres. Assim, se fossem criados dois anéis de vórtice em um fluido perfeito, atravessando um ao outro, como elos de uma cadeia, eles jamais colidirão nem romperão um ao outro. Eles formarão um átomo indestrutível. (53) [*Apud* EPPLE 1998A:321]

Assim, emergiu a concepção de que "os átomos fossem apenas o lugar de um tipo especial de movimento rotativo, no seio de um éter homogêneo que permeasse o espaço e a matéria, então, um modo de movimento". (54) [SILLIMAN 1963:461]

Em sessão na Sociedade Real de Edimburgo (em 18 de fevereiro de 1867), foram apresentadas as ideias de Thomson, ricamente ilustradas por experimentos conduzidos por Tait, com o concurso do químico Alexander Brown, que ajudou decisivamente na escolha dos gases que seriam usados na produção dos anéis de fumaça. E, no primeiro artigo sobre átomos de vórtice (publicado em abril de 1867), Thomson escrevera que "diagramas e modelos em arame foram mostrados na Sociedade [*Royal Society of Edinburgh*], para ilustrar os átomos de vórtice enodados ou entrelaçados, cuja variedade é infinitamente mais que suficiente para explicar a diversidade e os estados alotrópicos dos corpos simples conhecidos e as suas afinidades mútuas. Deve ser enfatizado que dois átomos de anel entrelaçados ou um enodado de qualquer modo, com as extremidades coincidentes, constituem um sistema que, embora possam ter a forma modificada, não poderão nunca desviar-se de sua própria peculiaridade de continuidade múltipla." (55) [*Apud* EPPLE 1998A:322-323]

Essa último frase de Thomson constitui, segundo EPPLE [1998A:322], a primeira tentativa documentada de se apontarem as características a que chamamos tipo topológico do laço ou do nó. No mesmo artigo, Thomson procurou distinguir entre *o grau e a qualidade da continuidade múltipla* [*degree and quality of multiple continuity*].

A primeira noção seria designada por Tait como *grau de conexidade* [*degree of connectivity*], locução mais próxima de *ordem de conexidade* [*Zusammenhangsordnung*], nomenclatura adotada por Riemann e por Helmholtz. [EPPLE 1998A:322]

A segunda noção procurava apreender os aspectos topológicos dos nós e dos laços que não decorressem de seu tipo de conexidade. Thomson admitiu não estar bastante ciente dos resultados obtidos por Riemann, para saber se todas as espécies de *continuidade múltipla* estariam incluídas na classificação que ele, Thomson, propunha. Mas cedo percebeu que, além das pesquisas de Helmholtz, não havia estudos *dessa espécie de geometria analítica* [*this kind of analytical geometry*] que esclarecessem os quesitos que se colocavam no âmbito do espaço tridimensional e que, portanto, os teóricos dos vórtices atômicos teriam que elaborar eles mesmos esse estudo, na extensão que fosse necessária. [EPPLE 1998A:323]

Após a divulgação da conjectura de Thomson, interessou-se vivamente pelo tema James Maxwell, que vinha considerando a analogia entre a hidrodinâmica e o eletromagnetismo. Assim que soube das especulações de Thomson, Maxwell procurou inteirar-se da novidade mas logo percebeu que o ingrediente principal eram as ideias topológicas. Estudou então tudo que encontrou acerca desse ramo da matemática e, já em novembro do mesmo ano, iniciaria correspondência epistolar com Tait, aduzindo questões sobre nós e laços. Diversos argumentos de Maxwell apoiavam-se em propriedades eletromagnéticas. Nesses estudos, Maxwell iniciou o estudo de nós e laços mediante curvas reversas descritas por equações (cartesianas ou paramétricas). É improvável que todas essas curvas já houvessem sido referidas em textos de matemática e certamente não o tinham sido, da perspectiva topológica. [EPPLE 1998A:324-327]

É frequente, em textos de história da topologia, a atribuição a Gauss do descobrimento de um invariante, o *índice de entrelaçamento* de duas curvas fechadas ou infinitas (que foi referido no início da presente seção). Mas é raro encontrar-se, em tais textos, a indicação de que Maxwell considerou a possibilidade de existência de curvas entrelaçadas com índice de entrelaçamento igual a zero. [EPPLE 1998B:45; EPPLE 1998A:327]

Nesse ínterim, antes que Thomson entregasse para publicação seu segundo artigo sobre os átomos de vórtice, no qual pretendia elaborar a teoria matemática pertinente, o matemático francês Joseph Bertrand apresentou (na sessão de 22 de junho de 1868 da *Académie des Sciences*) uma crítica ao artigo de Helmholtz, recusando a decomposição do movimento infinitesimal de um fluido em uma translação, uma deformação e uma rotação. A possibilidade de erro no artigo de Helmholtz era desconfortante para Thomson, já que sua teoria dos vórtices atômicos se fundamentava no artigo de Helmholtz. Contudo, Maxwell lhe comunicou seu tratamento de cilindros de vórtice e de anéis de vórtice, apoiado na analogia entre os fenômenos hidrodinâmicos e os fenômenos eletromagnéticos. E afirmou nada haver encontrado que pudesse comprometer os resultados expostos no citado artigo de Helmholtz. [EPPLE 1998A:329-331]

O próprio Helmholtz mostraria (em 1868) ser infundada a crítica apresentada por Bertrand mas Bertrand replicaria (no mesmo ano), sugerindo ser gratuita a hipótese de que fosse contínuo o campo de velocidades de um fluido em movimento. (Na verdade, Helmholtz supusera que tal campo fosse suave.) A suavidade do campo de velocidades era uma hipótese necessária, do ponto de vista matemático, mas não havia consenso sobre ser essa uma hipótese admissível, no caso de um fluido perfeito. Esse quesito foi discutido por

Helmholtz, Stokes, Tait e Thomson. Thomson sustentou que a suavidade do campo de velocidades de um fluido perfeito, inicialmente em repouso ou em estado de fluxo contínuo, não poderia ser destruída por ações naturais e continuou o estudo do movimento vortical. [EPPLE 1998A:329-331]

Entrementes, Maxwell continuava a estudar os aspectos topológicos dos campos de velocidade, tratando de diversos casos ainda não considerados por seus antecessores (como Riemann). Tendo iniciado por passos incertos, Maxwell aos poucos adquiriu segurança e discutiu alguns modos simples de se deformarem laços, sem que se lhes fosse modificado o tipo topológico. No curso dessas investigações, Maxwell introduziu *movimentos em diagramas* [*diagram moves*] que são presentemente denominados *movimentos de Reidemeister* [*Reidemeister diagrams*], redescobertos por Kurt Reidemeister (em 1927). Constitui um dos teoremas fundamentais da teoria dos nós o asserto de que dois quaisquer diagramas de um mesmo laço podem ser convertidos um no outro mediante uma sequência de movimentos de Reidemeister. Recentemente, foi encontrado um majorante para o número de termos de tal sequência, para o caso de um dos diagramas ser *o diagrama não enodado trivial* [*the trivial unknot diagram*]. [EPPLE 1908A:332-335; HASS & LAGARIAS 2001]

Nesses estudos de topologia, Maxwell, aparentemente, se apoiava em um lema que vinculava a conexidade de um sólido ao número de buracos de seu complementar no espaço. Mas, por haver sido instituído em uma situação especial (na qual as fronteiras dos buracos não se enodavam nem, tampouco, se entrelaçavam umas com as outras), esse lema não gozava da necessária generalidade. Por isso, Maxwell enfrentou um óbice decisivo na caracterização das regiões multiplamente conexas do espaço. [EPPLE 1998A:339-340]

Também Thomson (refeito da controvérsia provocada por Betrand) tentava caracterizar *o movimento irrotacional mais geral de um fluido perfeito* [*the most general irrotational motion of a perfect fluid*], consubstanciado no problema seguinte: Dada uma região multiplamente conexa do espaço, delimitada por uma superfície externa e por diversas superfícies internas, determinar o conjunto dos fluxos conservativos nessa região que satisfaçam a certas condições predefinidas de contorno. A solução desse problema presume uma definição adequada de conexidade múltipla e, no seu enfrentamento, Thomson avançou mais que Maxwell, considerando túneis enodados ou entrelaçados e certas características que, depois, seriam denominadas *números de Betti*. [EPPLE 1998A:342-345]

Talvez seja oportuno anotar que, para lidar com as diversas ordens de conexidade, Maxwell e Thomson recorreram às noções de *ciclo* e de *circuito*. Talvez Maxwell concebesse um ciclo como uma curva fechada que dá uma volta em torno de um buraco. E Thomson definira um circuito como "qualquer curva fechada que não se reduza continuamente a um ponto, em um espaço multiplamente contínuo" [isto é, multiplamente conexo]. (56) [EPPLE 1998A:339, 347]

A ausência de distinção clara entre os aspectos homológicos e os aspectos homotópicos da teoria que Maxwell e Thomson pelejavam por construir não surpreende, pois tampouco Riemann lograra transpor esse obstáculo. De fato, "nos escritos de Riemann

e, talvez, também ainda nos escritos de Poincaré, quarenta anos depois, as noções de homologia e de homotopia não são sempre distinguidas com clareza, pois não se declara com precisão se são simplesmente conexas as bordas dos pedaços vertentes de superfícies. (Esse fato seria enunciado por Poincaré, em 1904, no *Quinto complemento à analysis situs*)." (57) [HIRSCH 1986:388; EPPLE 1998A:340-345].

Contudo, como acentua EPPLE [1998A:349-350], as ideias de Thomson chamaram a atenção da comunidade de matemáticos para o vínculo fundamental entre a teoria do potencial e a topologia. De fato, na monografia *sobre a teoria riemanniana das funções algébricas e suas integrais* [*Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihre Integrale*, 1882], embora não referisse os trabalhos de Thomson, Klein adotou o tratamento hidrodinâmico das funções de variáveis complexas, introduzido por Maxwell. Nas palavras de EPPLE [ibidem],

> "Ao lidar com o problema central do 'fluxo estacionário mais geral' em uma superfície de Riemann, Klein indicou que um tratamento mais rigoroso dependia do emprego da fórmula de Green e referiu a sua justificação hidrodinâmica por Tait. Portanto, a interpretação particular por Klein da teoria de Riemann parece haver sido inspirada, pelo menos, tanto pelos físicos britânicos quanto pelo próprio Riemann, embora ele [Klein] quisesse que seu leitores acreditassem suas opinões representarem a linha de pensamento original de Riemann. O próximo passo principal na direção do entendimento hodierno da situação foi dado por Hermann Weyl, em *A ideia de superfície de Riemann* [*Die Idee der Riemannshcen Fläche*, 1913]. Weyl, que discutira o material de seu livro com Klein, confessara tanto a força heurética da interpretação hidrodinâmica das funções complexas em uma superfície de Riemann quanto a contribuição britânica. Desse modo, o fundamento físico da teoria dinâmica, que motivara a proposição de Thomson acerca de fluxos conservativos em regiões do espaço, contribuiu para conformar as direções ao longo das quais continuariam a mover-se as explorações ulteriores da relação entre potenciais e a topologia." (58)

A classificação dos nós e dos laços foi suscitada, pelo menos, por duas ordens de quesitos. Uma dessas ordens consistia em se definir o conceito de *qualidade de conexidade* [*quality of connectivity*], noção que Thomson distinguia do *grau de conexidade* do complementar de um nó ou de um laço. A outra ordem de quesitos vinculava-se ao estudo da diversidade das substâncias químicas e da natureza da estrutura química. Esse segundo tema vinha despertando maior interesse, sobretudo como consequência do progresso da química orgânica, destacando-se a discussão acerca da estrutura do benzeno, iniciada por Friedrich Kekule (em 1865). Tait sentiu-se motivado para encetar a tarefa de tabular os nós e os laços, em 1876. Uma precisa crônica dos primeiros passos desse projeto encontra-se em EPPLE [1998A:353].

Se bem que o empreendimento de se classificarem os nós e os laços estivesse então suficientemente justificado, da perspectiva da física e da química, sua plena justificação

da perspectiva matemática seria efetuada no âmbito das funções algébricas (de duas variáveis complexas).

Coube a Wilhelm Wirtinger distinguir, no âmbito da teoria das funções, quais eram os quesitos medulares. Em carta (datada de 22 de dezembro de 1894) endereçada a Klein, escreveu Wirtinger:

> "Certamente que, nesse tema, a faculdade de imaginação deve ser essencialmente educada e estendida. Cito, a título de exemplo, que, no espaço quadridimensional, uma superfície de integração e uma superfície de singularidades podem estar de tal modo vinculadas como dois anéis no domínio tridimensional. Então, a superfície de integração poderá ser arbitrariamente deslocada e modificada mas não poderá ser reduzida a um ponto." (59) [EPPLE 1995:381]

Nesse passo, advertimos a convergência entre as duas linhas de investigação: a teoria das funções (de diversas variáveis complexas) e a *analysis situs* (no que tange à teoria dos nós e dos laços).

Ao longo da obra de Wirtinger, ocorreram *a legitimação* e *a diferenciação* da teoria dos nós como um aspecto da teoria das funções. Um dos teoremas obtidos, nessa fase, por Wirtinger especifica as condições gerais a que um grupo de permutações deve satisfazer, a fim de ser o grupo de monodromia local associado a um ponto singular de ramificação. [EPPLE 1995:383]

Nas páginas seguintes do artigo citado, EPPLE [1995:388-391] documenta *a eliminação do contexto* e a emergência da teoria dos nós como disciplina autônoma.

Nessa breve referência ao modo pelo qual se constituem novas disciplinas matemáticas, foi acentuada a permuta de ideias entre teorias matemáticas e teorias físicas (no caso estudado, entre a hidrodinâmica e a *analysis situs*).

É oportuno consignar que também presentemente se verifica essa influência recíproca, de um modo notável, no âmbito da topologia das variedades de dimensão quatro. Refiro-me especificamente ao fato de que, desde 1982, Simon Donaldson usou as equações de Yang-Mills, compostas na física, para estudar a topologia diferencial das variedades quadridimensionais. Informa MOORE [2010:1] que, usando a obra de Michael Freedman, Donaldson fora capaz de provar teoremas do tipo seguinte.

Teorema A — Existem muitas variedades topológicas quadridimensionais topológicas e compactas que não admitem estrutura diferencial [*smooth structure*].

Teorema B — Existem muitos pares de variedades quadridimensionais diferenciáveis [*smooth*], compactas e simplesmente conexas, que são *homeomorfas* mas não são *difeomorfas*. (60)

Continua MOORE [ibidem]:

> "A não linearidade das equações de Yang-Mills apresentavam dificuldades, de modo que tiveram de ser elaboradas novas técnicas no âmbito da teoria das equações diferenciais parciais não lineares. A teoria construída por Donaldson era elegante e bela mas as provas minuciosas de seus teoremas eram difíceis de serem dominadas pelos principiantes. No outono de 1994, Edward Witten propôs um conjunto de equações (desenvolvidas conjuntamente com Nathan Seiberg) que produziam os mesmos resultados da teoria de Donaldson, de um modo tão mais simples do que se julgava possível." (61)

A narrativa do episódio fornecida pelo próprio DONALDSON [1996:45] complementa a versão aduzida por MOORE.

> "Inicialmente, esse uso da geometria diferencial e das equações diferenciais apresentava um sabor inesperado e não ortodoxo. Porém, passados alguns anos, as ideias se tornaram mais familiares; foi edificado um corpo de técnicas, mediante o esforço de muitos matemáticos, produzindo resultados que desvelaram alguns dos mistérios da teoria das variedades quadridimensionais e conduzindo a enigmas internos substantivos, no próprio campo. Nos últimos três meses de 1994, ocorreu um fato notável: Essa área de investigação foi virada de cabeça para baixo pela introdução de uma nova espécie de equação geométrica diferencial, devida a Seiberg e Witten. No intervalo de poucas semanas, foram resolvidos problemas que haviam permanecido abertos por um tempo expressivo, foram obtidos resultados novos e inesperados, concomitantemente com novos argumentos mais simples que as provas até então disponíveis, e abriram-se novos horizontes de pesquisa." (62)

O comentário seguinte, relativo a invariantes topológicos, é pertinente ao teorema B:

> "Esses invariantes topológicos eram conhecidos há muito tempo e haviam sido estudados intensamente. As equações de Seiberg-Witten produziram novos invariantes de variedades diferenciáveis quadridimensionais, denominados invariantes de Seiberg-Witten. O aspecto central consiste em que variedades diferenciáveis quadridimensionais homeomorfas podem apresentar invariantes de Seiberg-Witten completamente diferentes. Exatamente como os grupos de homologia têm muitas aplicações, esperava-se que os invariantes de Seiberg-Witten tivessem muitas aplicações à geometria e à topologia diferencial das variedades quadridimensionais. Na verdade, logo depois do descobrimento dos invariantes de Seiberg-Witten, foram encontradas diversas aplicações surpreendentes. (63) [MOORE 2010:2]

Em suma, como acentuou MOORE [2010:v], o emprego de equações formuladas na física para se estudar a relação entre a classificação das variedades quadridimensionais topológicas e a classificação das variedades quadridimensionais diferenciáveis inverte a

direção da aplicação, tradicionalemente orientada da topologia para a física (através das equações diferenciais).

8.14 Conclusão

Grosso modo, os conceitos e os juízos de inerência acerca dos conceitos constituem a substância do pensamento matemático.

Nos três capítulos anteriores, foram examinados os modos de se definirem os conceitos. No presente capítulo, foram discutidos os tipos e os estilos de validação dos juízos de inerência. Foram também tangenciados alguns aspectos cognitivos associados à concepção das ideias e à composição das provas. Finalmente, foi discutido o quesito da legitimação das teorias matemáticas.

8.15 Fontes

(1) *I have often maintained, and even committed to paper on some occasions, the view that mathematics is a science which, in analogy with physics, has an experimental and a theoretical side, but operates in an intellectual world of objects, concepts and tools. Roughly, the experimental side is the investigation of special cases, either because they are of interest in themselves or because one hopes to get a clue to general phenomena, and the theoretical side is the search of general theorems. In both, I expect proofs of course, and I reject categorically a division into two parts, one with proofs, the other without.* [Armand BOREL 1994:180]

(2) *Although the term 'proof' is perhaps the most important in mathematics, it does not have an exact definition. The full notion of a proof, with all its ramifications, belongs as much to the realm of psychology as to mathematics.* [USPENSKY 1982:10-11]

(3) *Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me paraît très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier que contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain.* [Carl Jacobi, em carta a von Humboldt, de 21 de dezembro de 1846, *apud* DUGAC 1986:266; DUGAC 1973:50]

(4) *Proofs serve two main purposes. First, proofs provide a way to ensure the reliability of mathematical claims, just as laboratory verification provides a check in other sciences. Second, the act of finding a proof often yields, as a byproduct, new insights and unexpected new data, just as does work in the laboratory.* [JAFFE & QUINN 1993:2]

(5) Since the meaning and scope of the term 'proof are not fixed by a technical definition, *the subject of proofs is par excellence a topic for philosophical reflexion and analysis.* [RAV 1999:11]

(6) *Once we have crossed the Hilbert Bridge into the land of meaningless symbols, we find ourselves on the shuffleboard of symbol manipulations, and as these symbols do not encode meanings, we cannot return via the Hilbert Bridge and restore meanings on the basis of a sequence of symbols representing formal derivations.* [RAV 1999:12]

(7) *Entre ses mains, elle* [la série 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/32 + ...] *est une arme dialectique et destructive; elle met en déroute les premières spéculations des mathématiciens sur les relations dans l'espace ou dans les temps, en interdisant à l'esprit humain d'obtenir l'intelligence d'une quantité totale par la mesure des ses parties.* [BRUNSCHVICG 1972:154]

(8) *A survey of Greek geometrical texts reveals a distinction between two types of proofs: proofs that establish the correctness of certain constructions and proofs that establish the truth of certain assertions.* [HARARI 2003:1]

(9) *Ce dernier* [le principe de récurrence] *avait été clairement conçu et employé pour la première fois au XVIe siècle par l'italien F. Maurolico — encore qu'on en trouve dans l'Antiquité des applications plus ou moins conscientes — et était couramment utilisé par les mathématiciens depuis la première moitié du XVIIe siècle.* [BOURBAKI 1960:38]

(10) *Die wahre Mathematik bedarf aus der Arithmetik ausschlieszlich der ganzen Zahlen.* [KRONECKER 1891:272]

(11) *Verschwindet das Polynom* $f(x_1, ..., x_n)$ *in allen Nullstellen — im algebraisch abgeschlossenen Körper — eines Polynomideals M, so gibt es eine Potenz* f^ρ *von f, die zu M gehört.* [RABINOWITSCH 1930:520]

(12) [...] *and this proof, when formalized, quantifies over* sequences *of natural numbers, using techniques expounded in Quine's* Set theory and its logic, *whereas the first proof makes do with the numbers themselves and is thus less abstract.* [STEINER 1978:136]

(13) *We are not very pleased when we are forced to accept a mathematical truth by virtue of a complicated chain of formal conclusions and computations, which we traverse blindly, link by link, feeling our way by touch. We want first an overview of the aim and of the road; we want to understand the* idea *of the proof, the deeper context.* [WEYL 1995:453]

(14) *Any such algorithm will resort to induction, and mathematicians will laugh at it.* [ROTA 1997B:185]

(15) *Around that time (1870-1871) Lie also realized that some classical methods of integration of various ordinary differential equations could be unified by noting that they relied on the existence of a one-parameter group of transformations leaving the equation invariant.* [BOREL 2001A:2]

(16) *The existence of 'exceptional' Lie groups became a thorn in every algebraist's flesh. It was a rude reminder of the arbitrariness of events in the real world, an arbitrariness from which mathematics is meant to provide salvation. It became a matter of mathematical honor to find a reason for the existence of the five exceptional Lie groups. And so, a long sequence of mathematical research papers began to*

appear which studied the exceptional Lie groups from every conceivable point of view. The unstated objective of these investigations was that of finding such a reason. Eventually, MIT mathematician Bertram Kostant unraveled the mystery of the exceptional Lie groups by a daring leap of faith. It turned out that the exceptional Lie groups are not the only seemingly arbitrary phenomenon in Lie theory. There is in this theory another seemingly arbitrary phenomenon. The special orthogonal group of dimension 8, or SO8, has a very unusual property. Its covering group, or spin group, has an outer automorphism. This phenomenon happens only in dimension 8. Kostant successfully conjectured that the two arbitrary phenomena must be related, and he found the reason for the existence of the five exceptional Lie groups in the outer automorphism of the orthogonal group in dimension 8, by a tour de force that remains to this day a jewel of mathematical reasoning. Once more, we are led to the conclusion that mathematicians are not satisfied with proving conjectures. They want the reason. [ROTA 1997B:187]

(17) *I think that mathematicians should try do dispel the popular impression that they, too, are unperceptive automata! They should deny the idea that the difference between themselves and game-playing machines or theorem-proving machines is merely one of degree; the difference is* qualitative. *They should resent the imputation that their only important intellectual quality is skill in manipulating symbols and numbers according to fixed rules! Is not their ability to manipulate concepts, in the sense of* Gestalt *theory, equally essential?* [BIRKHOFF 1969:458]

(18) *A beautiful theorem may not be blessed with an equally beautiful proof; in fact, beautiful theorems with ugly proofs frequently occur. When a beautiful theorem is missing a beautiful proof, repeated attempts are made by mathematicians to provide new proofs that will match the beauty of the theorem, with varying success* [...]. [ROTA 1997A:172]

(19) *A theorem that is in one context thought to be beautiful may in a different context appear trivial. Desargues's theorem, for example, is quite beautiful when viewed as a statement in synthetic projective geometry, but becomes utterly trivial when stated in terms of coordinates. Undoubtedly, many occurrences of mathematical beauty eventually fade or fall into triviality as mathematics progresses.* [ROTTA [1997A:275]

(20) *Mathematics in some sense has a common language: a language of symbols, technical definitions, computations, and logic. This language efficiently conveys some, but not all, modes of mathematical thinking. Mathematicians learn to translate certain things almost unconsciously from one mental mode to the other, so that some statements quickly become clear. Different mathematicians study papers in different ways, but when I read a mathematical paper in a field in which I'm conversant, I concentrate on the thoughts that are between the lines. I might look over several paragraphs or strings of equations and think to myself "Oh yeah, they're putting in enough rigamarole to carry such-and-such idea." When the idea is clear, the formal setup is usually unnecessary and redundant — I often feel that I could write it out myself more easily than figuring out what the authors actually wrote.* [THURSTON 1994:167]

(21) *Thus a great vista was opened, and geometry and algebra became inseparable.* [CHERN 1990:680]

(22) *Here the preexisting harmony between geometry and algebra comes to light in the most impressive manner. For the geometric number system to coincide with the continuum of ordinary real numbers one*

must introduce axioms of order and continuity, very different in kind from the incidence axioms. We thus arrive at a reversal of the development that has dominated mathematics for centuries and seems to have arisen originally in India and that have been transmitted to the West by Arab scholars: Up till now, we have regarded the number concept as the logical antecedent of geometry, and have therefore approached every realm of magnitudes with a universal and systematically developed number concept independent of the applications involved. Now, however, we revert to the Greek viewpoint that every subject has an associated intrinsic number realm that must be derived from within it. We experience this reversal not only in geometry but also in in the new quantum physics. According to quantum physics, the physical magnitudes associated with a particular physical setup (not the numerical values that they may take on depending on its different states) admit of an addition and a non-commutative multiplication, and thus give rise to a system of algebraic magnitudes intrinsic to it that cannot be viewed as a sector of the system of real numbers. [WEYL 1995:456-458]

(23) *This irruption of* numbers *in geometry appears at first as an* act of violence *undergone by geometry thought of as a synthetic mental construct. This act of violence inaugurates the duality between geometry and algebra, between the eye of the geometer and the computations of the algebraists, which run in time contrasting with the immediate perception of the visual intuition. Far from being a sterile opposition this duality becomes extremely fecund when geometry and algebra become allies to explore unknown lands as in the new algebraic geometry of the second half of the twentieth century or as in noncommutative geometry, two existing frontiers for the notion of space.* [CONNES 2004:4]

(24) *Entre ces deux conceptions gardons-nous de choisir; chacune a son rôle nécessaire. Avec l'instrument de Riemann, l'intuition verra d'un seul coup d'oeil l'aspect général des choses; comme un voyageur qui examine du haut d'une montagne la topographie de la plaine qu'il va visiter et apprend de la sorte à s'y orienter. Avec l'instrument de Weierstrass, l'analyse éclairera successivement tous les recoins et y fera pénétrer l'absolue clarté. En un mot, la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration.* [POINCARÉ 1898:7]

(25) *When Weyl's paper was written, topology was definitely considered a part of geometry; opposing abstract algebra to topology in the title was the same as contrasting algebra with geometry.* [YAGLOM 1988:151]

(26) *Therefore spatial intuition or spatial perception is an enormously powerful tool, and that is why geometry is actually such a powerful part of mathematics — not only for things that are obviously geometrical, but even for things that are not. We try to put them into geometrical form because that enables us to use our intuition. Our intuition is our most powerful tool.* [ATIYAH 2001:658]

(27) [...] *dans une telle étude, les yeux de l'esprit et l'habitude de la concentration remplaceront la vision perdue.* [*Apud* JACKSON 2002:1247]

(28) *We dedicate this article to the memory of Arnold Shapiro, who gave the first example of how to turn the sphere onside out, but never published it. His is not the simplest, nor the most interesting of the many explicit eversions that have been devised since. It is, however, the only one that uses only standard mathematical topological constructions. Thus, it is of value to the history and philosophy of mathematics, for, had it been better explained in its day, the subject would hardly have occupied so many people in the intervening two decades. We have written it up from memory and in a conventional*

expository style, but hope that the illustrations will aid the inner eye to see Shapiro's ingenious ideas. [FRANCIS & MORIN 1979]

(29) *The psychological aspects of true geometric intuition will perhaps never be cleared up. At one time it implied primarily the power of visualization in three-dimensional space. Now, that higher-dimensional spaces have mostly driven out the more elementary problems, visualization can at best be partial or symbolic. Some degree of tactile imagination seems also to be involved.* [CHERN 1979:339]

(30) *The standard and time-honored practice in mathematics — to erase all hint of the development of a subject or proof — usually makes it hard for students to see into the minds of mathematicians at work. Theorems and arguments seem to come from nowhere. Very seldom in textbooks or in research papers is there a hint of the original questions that motivated the researchers or what special turns their understanding took in the middle of developing their subject. For us, that is one of the most exciting things about doing mathematics. We hope that students will see that the thought processes mathematicians engage in are much the same as the normal human process of asking questions and being alert to hints suggested by the subject itself. This questioning and following leads are at the heart of successful mathematical endeavors.* [BRILLHART & MORTON 1996:854]

(31) *I just move around in the mathematical waters, thinking about things, being curious, interested, talking to people, stirring up ideas; things emerge and I follow them up.* [ATIYAH 1984:10]

(32) *Pierre Janet définit "acte inconscient" une "action ayant tous les caractères d'un fait psychologique sauf un, d'être toujours ignoré par la personne même qui l'exécute au moment même où elle l'exécute".* [FILLOUX 1977:19]

(33) *I remember one theorem that I proved and yet I really could not see why it was true. It worried me for years and years. It had to do with the relationship between K-theory and representations of finite groups. To prove the theorem, I had to break up the group into solvable groups and cyclic groups; there were lots and lots of inductions and there were various bits on the way. In order for the proof to work, every single thing had to go just right — you had to be remarkably lucky, so to speak. I was staggered that it all worked and I kept thinking that, if any one link of this chain were to snap, if there was some flaw in the argument, the whole thing would collapse. Because I did not understand it, it might not be true at all. I kept worrying about it and, five or six years later, I understood why it had to be true. Then I got an entirely different proof by going from finite groups to compact groups. Using quite different techniques, it was quite clear why it had to be true.* [ATIYAH 1984:17]

(34) *After all, a proof is simply an argument which we find so convincing that we are ready to use it to convince others.* [USPENSKY 1987:10-11]

(35) *In analytic mathematics, the symbolic material predominates. It is almost always hard to do. It is time consuming. It is fatiguing. It requires special training. It may require constant verification by the whole mathematical culture to assure reliability. Analytic mathematics is performed only by very few people. Analytic mathematics is elitist and self-critical. The practitioners of its higher manifestations form a 'talentocracy'. The great virtue of analytic mathematics arises from this, that while it is hard to verify*

another's intuitions, it is possible, though often difficult, to verify his proofs. [DAVIS & ANDERSON 1979:113]

(36) *The Index Theorem, for example, was formulated and we knew it should be true. But it took us a couple of years to get a proof. That was partly because different techniques were involved, and I had to learn some new things to get the proof, in that case several proofs. I don't pay very much attention to the importance of proofs. I think it is more important to understand something.* [ATIYAH 1984:16]

(37) *Well, a proof is important as a check on your understanding. I may think I understand, but the proof is the check that I have understood, that's all. It is the last stage in the operation — an ultimate check — but it isn't the primary thing at all.* [ATIYAH 1984:17]

(38) *It was a hard theorem, and I spent a tremendous amount of effort thinking about it. When I completed the proof, I spent a lot more effort checking the proof, searching for difficulties and testing it against independent information. I'd like to spell out more what I mean when I say I proved this theorem. I meant that* I had a clear and complete flow of ideas, including details*, that withstood a great deal of scrutiny by myself and by others. However, there is sometimes a huge expansion factor in translating from the encoding in my own thinking to something that can be conveyed to someone else.* [THURSTON 1994:174]

(39) *In many parts of geometry, differential topology, and global analysis the intuitions are very complex and hard to reduce to paper; as a result, there can be a long development, before closure.*] [MAC LANE 1994:191]

(40) *In theological terms, we are not saved by faith alone, but by faith and works.* [MAC LANE 1994:191]

(41) *In Cartan's view, Lie's long memoir fell so short of the standards of rigor prevailing in Cartan's time, that he regarded it as a stimulous for the imagination rather than a predecessor's research work to be continued.* [YAGLOM 1988:227-228]

(42) *Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im Allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Ueberflusz an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbstständigen Entwickelung. Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme. Durch die Lösung, von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers; er findet neue Methoden und Ausblicke, er gewinnt einen weiteren und freieren Horizont.* [HILBERT 1900:253-254]

(43) *Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, dasz die Strenge in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit wäre. An zahlreichen Beispielen finden wir im Gegenteil bestätigt, dasz die strenge Methode auch zugleich die einfachere und leichter faszliche ist. Das Streben nach Strenge zwingt uns eben zur Auffindung einfacherer Schluszweisen; auch bahnt es uns häufig den Weg zu Methoden, die entwickelungsfähiger sind als die alten Methoden von geringerer Strenge.* [HILBERT 1900:257]

(44) *So erfuhr die Theorie der algebraischen Kurven durch die strengere funktionentheoretische Methode und die folgerichtige Einführung transcendenter Hilfsmittel eine erhebliche Vereinfachung und größere Einheitlichkeit. Der Nachweis ferner, daß die Potenzreihe die Anwendung der vier elementaren Rechnungsarten, sowie das gliedweise Diferentiiren und Integriren gestattet und die darauf beruhende Erkenntnis der Bedeutung der Potenzreihe, trug erheblich zur Vereinfachung der gesamten Analysis, insbesondere der Theorie der Elimination und der Theorie der Differentialgleichungen sowie der in derselben zu führenden Existenzbeweise bei.* [HILBERT 1900:257-258]

(45) *Das schlagendste Beispiel aber für meine Behauptung ist die Variationsrechnung. Die Behandlung der ersten und zweiten Variation bestimmter Integrale brachte zum Teil äuszerst complizierte Rechnungen mit sich und die betreffenden Entwickelungen der alten Mathematiker entbehrten der erforderlichen Strenge. Weierstrass zeigte uns den Weg zu einer neuen und sicheren Begründung der Variationsrechnung.* [HILBERT 1900:258]

(46) *An dem Beispiel des einfachen Integrals und des Doppelintegrals werde ich zum Schlusz meines Vortrages kurz andeuten, wie die Verfolgung dieses Weges zugleich eine überraschende Vereinfachung der Variationsrechnung mit sich bringt, indem zum Nachweis der notwendigen und hinreichenden Kriterien für das Eintreten eines Maximums und Minimums die Berechnung der zweiten Variation und zum Teil sogar die mühsamen an die erste Variation anknüpfenden Schlüsse völlig entbehrlich werden - gar nicht zu reden von dem Fortschritte, der in der Aufhebung der Beschränkung auf solche Variationen liegt, für die die Differentialquotienten der Funktionen nur wenig variieren.* [HILBERT 1900:258]

(47) *As to our aim with regard to any problem, there must be a definite result of some kind; it cannot be laid aside until we have obtained either a satisfactory solution or a rigorous demonstration of the impossibility of a solution. The mathematical rigor that is essential in the treatment of a problem does not require complicated demonstrations; it requires only that the result be obtained by a finite number of logical steps from a finite number of hypotheses furnished by the problem itself; in seeking this rigor we may find simplicity.* [*Apud* THIELE 2003:6]

(48) *It seems to me that with Hilbert the mastering of single concrete problems and the forming of general abstract concepts are balanced in a particularly fortunate manner. He came of a time in which the algorithm had played a more extensive part, and therefore he stressed strongly a conceptual procedure; but in the meantime our advance in this direction has been so uninhibited and with so little concern for the mathematical substance. In Hilbert simplicity and rigour go hand in hand. The growing demand for rigour, imposed by the critical reflections of the nineteenth century upon those parts of mathematics which operate in the continuum, was felt by most investigators as a heavy yoke that made their steps dragging and awkward. Full of longing and with uneasiness they looked back upon Euler's era of happy-go-lucky analysis. With Hilbert rigour figure no longer as enemy, but as promoter of simplicity.* [WEYL 1944A:549]

(49) *An elimination of contexts, on the other hand, marks a critical step in mathematical (or, more generally, scientific) research. It puts, so to speak, a previously differentiated complex of problems onto its own feet. As a conscious or unconscious effect of active decisions taken by scientists, it leads to or completes a modification of the network of scientific disciplines. Typically, the decision to accept a new*

standard of rationality is central in an elimination of contexts. A change of such standards implies a reevaluation and reorganization of the manifold elements of scientific practice, including the perceived architecture of the body of scientific knowledge. [EPPLE 1995:373]

(50) [...] *a memoir full of new ideas and results in potential theory.* [TAZZIOLI 2001:235]

(51) *If they both have the same direction of rotation they will proceed in the same sense, and the ring in front will enlarge itself and move slower, while the second one will shrink and move faster; if the velocities of translation are not too different, the second will finally reach the first and pass through it. Then the same game will be repeated with the other ring, so that the rings will pass alternately one through the other.* [Versão em língua inglesa dada por EPPLE 1998A:316]

(52) *Tait used two boxes with a circular hole on one side and a rubber diaphragm on the opposite side. Within the boxes, a chemical agent (magnesium sulfate) produced a thick, white smoke. When struck on the rubber diaphragm, circular smoke rings shot out of the holes. The boxes could be placed in various positions, causing the smoke rings to interact just as Helmholtz had indicated.* [EPPLE 1998A:319]

(53) [...] *a few days ago Tait showed me in Edinburgh a magnificient way of producing them. [...] We sometimes can make one ring shoot through another, illustrating perfectly your description; when one ring passes near another, each is much disturbed, and is seen to be in a state of violent vibration for a few seconds, till it settles again into its circular form. [...] The absolute permanence of the rotation, and the unchangeable relation you have proved between it and the portion of the fluid once acquiring such motion in a perfect fluid, shows that if there is a perfect fluid all through space, constituting the substance of all matter, a vortex ring would be as permanent as the solid hard atoms assumed by Lucretius and his followers (and predecessors) to account for the permanent properties of bodies (as gold and lead) and the differences of their characters. Thus, if two vortex rings were once created in a perfect fluid, passing through one another like links of a chain, they never could come into collision, or break one another, they would form an indestructible atom.* [*Apud* EPPLE 1998A:321]

(54) [...] *atoms are nothing more than loci of a special type of rotary motion within a homogeneous ether pervanding space, and matter, then, simply, 'a mode of motion'.* [SILLIMAN 1963:461]

(55) *Diagrams and wire models were shown to the Society to illustrate knotted or knitted vortex atoms, the endless variety of which is infinitely more than sufficient to explain the varieties and allotropies of known simple bodies and their mutual affinities. It is to be remarked that two ring atoms linked together or one knotted in any manner with its ends meeting, constitute a system which, however it may be altered in shape, can never deviate from its own peculiarity of multiple continuity.* [*Apud* EPPLE 1998A:322]

(56) *Henceforth I shall call a circuit any closed curve not continuously reducible to a point, in a multiply continuous space.* [EPPLE 1998A:347]

(57) *Chez Riemann, et aussi encore parfois chez Poincaré quarante ans plus tard, les notions d'homologie et d'homotopie ne sont pas toujours clairement séparées, car on ne précise pas si les morceaux de surface*

dont on considère le bord sont simplement connexes (ce que Poincaré énoncera en 1904, dans un Cinquième complément à l'Analysis Situs). [HIRSCH 1986:388]

(58) *When dealing with the central problem of the 'most general stationary flow' on a Riemann surface, Klein pointed out that a more rigorous treatment relied on an application of Green's formula, and he referred to Tait's hydrodynamical justification of the latter (l.c., § 10). Therefore, it seems that Klein's particular interpretation of Riemann's theory was inspired at least as much by the British physicists as it was by Riemann himself, though he wanted his readers to believe that his views represented Riemann's original line of thought (l.c., iii–vi.). The next main step toward the modern understanding of the situation was then taken by Hermann Weyl in his Die Idee der Riemannschen Fläche of 1913. Weyl, who had discussed the material of his book with Klein, acknowledged both the heuristical force of the hydrodynamical interpretation of complex functions on a Riemann surface and the British background to it. In this way, the physical background of dynamical theory, motivating Thomson's proposition on irrotational flows in a space region, contributed to shape the directions in which later explorations of the relation between potentials and topology continued to move.*

(59) *Freilich musz hier das Vorstellungsvermögen wesentlich geschult und erweitert werden. Ich erwähne, nur beispeilsweise, dasz eine Integrationsfläche und eine Singularitätenfläche im Raum von vier Dimensionen so ineinander hängen können, wie zwei Ringe dreidimensionalen Gebiet. Die Integrationsfläche kann dann beliebig verschoben und verändert werden, aber nicht auf einen Punkt reduziert werden.* [EPPLE 1995:381]

(60) *Using work of Michael Freedman, he was able to prove theorems of the following type:* Theorem A. *There exist many compact topological four-manifolds which have no smooth structure.* Theorem B. *There exist many pairs of compact simply connected smooth four-manifolds which are homeomorphic but not diffeomorphic.* [MOORE 2010:1]

(61) *The nonlinearity of the Yang-Mills equations presented difficulties, so many new techniques within the theory of nonlinear partial differential equations had to be developed. Donaldson's theory was elegant and beautiful, but the detailed proofs were difficult for beginning students to master. In the fall of 1994, Edward Witten proposed a set of equations (developed jointly with Nathan Seiberg) which give the main results of Donaldson theory in a far simpler way than had been thought possible.* [MOORE 2010:1]

(62) *At first this use of differential geometry and differential equations had an unexpected and unorthodox flavour, but over the years the ideas have become more familiar; a body of techniques has built up through the efforts of many mathematicians, producing results which have uncovered some of the mysteries of 4-manifold theory, and leading to substantial internal conundrums within the field itself. In the last three months of 1994 a remarkable thing happened: this research area was turned on its head by the introduction of a new kind of differential-geometric equation by Seiberg and Witten: in the space of a few weeks long-standing problems were solved, new and unexpected results were found, along with simpler new proofs of existing ones, and new vistas for research opened up.* [DONALDSON 1996:45]

(63) *These topological invariants have been around for a long time and have been intensively studied. The Seiberg-Witten equations give rise to new invariants of four-dimensional smooth manifolds, called the*

Seiberg-Witten invariants. The key point is that homeomorphic smooth four-manifolds may have quite different Seiberg-Witten invariants. Just as homology groups have many applications, one might expect the Seiberg-Witten invariants to have many applications to the geometry and differential topology of four-dimensional manifolds. Indeed, shortly after the Seiberg-Witten invariants were discovered, several striking applications were found. [MOORE 2010:2]

Capítulo nono

O pensamento estrutural

> "Se houver uma coisa na matemática que sempre, sem dúvida, me fascine mais que outra qualquer, essa coisa é a *forma* e não o *número* ou a *grandeza*. E dentre as mil e uma faces que a forma escolheu para se revelar a nós, a face que me fascinou mais que qualquer outra e que continua a me fascinar é a estrutura recôndita nos objetos matemáticos." (1)
> Alexandre GROTHENDIECK

Sumário

9.1 Antelóquio

9.2 A algebrização

9.3 A algebrização de teoremas

9.4 Uma mudança de perspectiva

9.5 A gênese da estrutura de corpo

9.6 A instituição do método estrutural

9.7 A formação de uma nova imagem da matemática

9.8 As categorias e os seus morfismos

9.9 Fontes

9.1 Antelóquio

No curso deste capítulo, o termo 'estrutura' será usado para designar um aspecto do conhecimento matemático cujo significado se compôs gradualmente, ao se contemplarem diversos fenômenos matemáticos.

Inicialmente, as propriedades estruturais foram percebidas como propriedades operatórias e talvez seja correto afirmar que a ideia não explicitada de propriedades estruturais tenha presidido a manipulação ***analógica*** de expressões que envolvessem

números complexos (na obra de Rafael Bombelli) ou que envolvessem polinômios (na obra de François Viète); e que essa ideia subjacente de propriedades estruturais também tenha propiciado tanto a extensão às séries de potências das operações com polinômios quanto a percepção por Leonhard Euler da autonomia dos símbolos algébricos.

Posteriormente, a crença em um esquema geral de manipulação de símbolos foi fortalecido em diversos contextos, tais quais:

- As propriedades de composição das classes de formas quadráticas binárias (Lagrange e Gauss). [ELLISON 1986:168-169]

- As propriedades da adição e da multiplicação de classes residuais de números inteiros, estudadas por Gauss (que conduziu ao tratamento dos corpos de característica prima).

- As propriedades da adição e da multiplicação de classes residuais de polinômios, estudadas por Cauchy e por Kronecker.

- As sucessivas extensões dos sistemas de números e as traduções das respectivas propriedades operatórias na linguagem algébrica, que suscitaram a formulação do "princípio das formas equivalentes" (por Peacock) e da "princípio de permanência das leis formais" (por Hankel).

- As pesquisas dos quaterniões por Hamilton e as perquisições de anéis matriciais por Cayley e Sylvester, que conduziram à aceitação de multiplicação não comutativa.

- As investigações dos sistemas de números hipercomplexos por Benjamin Peirce, que apontaram a existência de leis de composição não associativas.

- As propriedades de composição de soluções de equações diferenciais ordinárias homogêneas.

- As propriedades operatórias da derivação parcial de funções diferenciáveis de diversas variáveis.

9.2 A algebrização

Os aspectos estruturais foram acentuados, também, por um fenômeno evolutivo, habitualmente referido como ***algebrização***, que tem ocorrido não raramente. Tal fenômeno tem sido descrito no âmbito de definições, de propriedades, de teoremas e de teorias.

Como exemplo de algebrização de **uma definição**, lembremos que os números complexos foram definidos, por Cauchy, mediante classes residuais do anel de polinômios $\mathbb{R}[x]$, tomando-se como módulo de congruência o polinômio $x^2 + 1$, despojando a noção de

número complexo de toda a conotação geométrica que lhe fora atribuída por Caspar Wessel (1797) e Jean Argand (1806).

Como exemplo simplicíssimo da algebrização de **uma propriedade**, considere-se a seguinte sentença, instituída inicialmente no âmbito dos números complexos.

Seja a um número complexo *distinto* de 1. Se, para um dado número natural n, $a^n = 1$, então $1 + a + ... + a^{n-1} = 0$. Essa proposição era interpretada, inicialmente, no contexto geométrico das raízes da unidade ou, equivalentemente, como unidades ciclotômicas (que indicam os pontos do círculo unitário que são vértices de um polígono regular inscrito).

Argumento: Pondo $S = 1 + a + ... + a^{n-1}$, obtemos $a.S = a + a^2 + ... + a^n = S$. Logo, $0 = S - S = S - a.S = (1 - a).S$. Como $a \neq 1$, $S = 0$.

Cedo se percebeu que esse argumento não repousava em propriedades privativas do corpo dos números complexos e que também seria válido no caso de qualquer anel destituído de divisores próprios de zero. Portanto, na redação do argumento anterior, a frase "seja a um número complexo" poderia ser substituída por "seja a um elemento distinto de 1 em um anel de integridade".

Como exemplo de algebrização de teorias, podemos dizer, muito sucintamente, que a introdução de coordenadas na geometria (por René Descartes e Pierre de Fermat) constituiu uma fase da algebrização da teoria geométrica, de consequências notáveis, parcialmente comentadas no capítulo segundo desta tese. CHERN [1990:680] observou que, entre as consequências imediatas, a introdução de coordenadas na geometria propiciou "o estudo de curvas definidas por equações arbitrárias $F(x,y) = 0$, ampliando o espectro de figuras".

E Bourbaki [1960:209] notou que a redução da análise infinitesimal a "um cálculo operacional dotado de um sistema uniforme de notações de caráter algébrico" constitui uma algebrização progressiva dessa teoria.

9.3 A algebrização de teoremas

Um exemplo muito ilustrativo da algebrização é fornecido pela história de um teorema devido a Charles Sturm e anunciado em 1829. "Após haver sido elevado às alturas pelas autoridades acadêmica da época, o teorema de Sturm se encontra hoje ou se encontrou até recentemente relegado pelo *establishment* matemático à loja das antiguidades olvidadas." (2) [BENIS-SINACEUR 1988:106]

Consoante CORRY [1996:323], por volta da segunda década do século XIX, sobretudo na França, a análise matemática se encontrava no foco de toda a investigação

matemática, determinando os métodos de pesquisa, apontando os problemas abertos e definindo os estilos de escrita e de ensino. E o termo 'álgebra' designava um setor específico dessa perquisição: o estudo *geral* das formas polinomiais e o estudo *específico* dos métodos de cálculo das raízes de polinômios.

Inscreve-se nesse esquema de ideias o citado teorema de Sturm, que descreve um método para se determinar o número de raízes reais de um elemento de $\mathbb{R}[x]$ situadas em um intervalo fechado em cujas extremidades esse polinômio ***não*** se anula. Para empregar-se esse método, é necessário calcular-se a derivada do polinômio considerado. [PASTOR 1958:553]

Presentemente, formula-se o conceito de derivada de função polinomial (ou de polinômio) independentemente da existência do corpo dos números reais. Por exemplo, dado um qualquer anel de integridade $\mathbb{A}$, podemos tomar um qualquer polinômio p de $\mathbb{A}[x]$ e, no anel $(\mathbb{A}[x])[z]$, considerar o polinômio $p(x + z)$. Nesse caso, definiremos a derivada de $p(x)$ como o coeficiente do termo de primeiro grau em z do polinômio $p(x + z)$. [QUEYSANNE 1964:400; QUEYSANNE & DELACHET 1955:61]

Mas, na época de Sturm, o conceito de derivada era formulado somente no âmbito da análise infinitesimal. Joseph Fourier considerava que a resolução numérica de equações polinomiais fosse "uma das mais importantes aplicações do cálculo diferencial". (3) [BENIS-SINACEUR 1992:55]

Para tais aplicações, Fourier conjugava métodos algébricos (como a regra de Descartes, que fornece o número de raízes positivas de um polinômio p em $\mathbb{R}[x]$ como função do número de mudanças de sinal na lista dos coeficientes não nulos desse polinômio p) a conceitos e teoremas próprios do cálculo infinitesimal (como a noção de função contínua, o teorema de Bolzano sobre a existência de raízes de uma função contínua em um intervalo no qual esse função mude de sinal ou o teorema de Rolle sobre a existência de raízes da derivada de uma função diferenciável em um intervalo no qual esse função atinge um valor extremo). [BENIS-SINACEUR 1992:55; KOSTRIKIN 1978:254-255].

Fourier defendia a opinião de que não houvesse uma separação nítida entre as questões ditas algébricas e as questões ditas analíticas. E, embora em sua época a álgebra fosse representada pela teoria das equações e a análise pelo cálculo infinitesimal, Fourier empregava o termo 'análise' para designar tanto a teoria das equações quanto o cálculo infinitesimal. [BENIS-SINACEUR 1988:110-111]

Na obra *Analyse des équations déterminées* (1831), Fourier afirmara que as relações expressas pelas equações "não eram pertinentes apenas à ciência abstrata do cálculo: elas existiam nas propriedades das curvas e das superfícies, nos movimentos dos sólidos e dos fluidos, na distribuição do calor e na maior parte dos fenômenos naturais". (4) [*Apud* BENIS-SINACEUR 1988:112]

Esse concepção abrangente de Fourier talvez lhe tenha suscitado a ideia de substituir, no emprego da regra de Descartes, a sucessão de coeficientes de polinômios pela sucessão das derivadas de uma dada função. [BENIS-SINACEUR 1988:110-112]

Mas tal substituição pressupunha que as funções vertentes fossem diferenciáveis e, portanto, no contexto de funções reais de variável real, prejulgava que tais funções fossem ao menos contínuas por partes. De fato, como precisou o próprio Fourier que, "se não ocorresse essa condição [de continuidade], nada impediria que se examinassem, separadamente, os intervalos nos quais a continuidade subsistisse". (5) [*Apud* BENIS-SINACEUR 1988:112-113]

Na demonstração de seu teorema, Sturm adotou a concepção de Fourier acerca do papel da análise. Na memória de 1835, redigiu um argumento no qual se desenham hipóteses gerais (que lhe delimitam o contexto de validade) e hipóteses especiais. Entre as hipóteses gerais encontra-se a suposição de continuidade e o método da permanência do sinal. Entre as hipóteses especiais distinguem-se o algoritmo de Euclides empregado a polinômios, a proposição de que toda função contínua que troca de sinal em um intervalo admite uma raiz nesse intervalo, a proposição de que toda função contínua que se anula em um ponto no qual sua derivada não se anula muda de sinal em um intervalo que contém essa raiz e o teorema de Taylor. [BENIS-SINACEUR 1988:115-116]

Antes de afirmarmos a insuficiência das hipóteses, lembremo-nos de que essa memória foi anterior aos estudos das funções contínuas que não admitem derivadas. BENIS-SINACEUR adverte que, na construção do argumento, a hipótese de continuidade foi preeminente sobre todas as outras.

A autora informa também que esse teorema, na data em que foi anunciado, teria sido mais decisivo para a fama de Sturm que todos seus trabalhos ulteriores sobre as equações diferenciais de segunda ordem. Antes mesmo de se conhecer a versão do argumento proposto em 1835, já o seu enunciado fora incorporado a um *Traité élementaire d'algèbre* (1832), de autores hoje esquecidos. Posteriormente, figuraria no famoso *Cours d'algèbre supérieur* (1866), de Alfred Serret, e no celebrado *Lehrbuch der Algebra* (1892), de Heinrich Weber. Foi também tema frequente na pesquisa por autores que pretenderam aprimorá-lo ou estendê-lo, como Leopold Kronecker e Gaston Darboux. [BENIS-SINACEUR 1988:102-103]

Escreveria Kronecker, em 1869: "Na investigação cujo desenvolvimento acabo de esboçar, parti do teorema de Sturm. Há algum tempo, esse teorema foi estendido por Hermite a sistemas de equações [*Comptes rendus* t. 24, 1852, II, p. 52; *Comptes rendus* t.36, 1853, I, p. 294] porém consegui estender o algoritmo das frações contínuas no qual se baseava o trabalho de Sturm e, então, pude ver uma interpretação natural dos resultados assim obtidos." [Apud SIEGBERG 1981:134]

Mas, no curso de sua reformulação, embora ainda se considerasse uma proposição clássica da análise, esse teorema foi sendo gradualmente algebrizado, na acepção de que os argumentos que dependiam da continuidade das funções foram substituídos por argumentos

que repousavam apenas nas propriedades de polinômios de coeficientes reais. Um dos promotores dessa outra apresentação foi James Sylvester, hoje conhecido sobretudo pela lei da inércia das formas quadráticas, cujas contribuições tiverem sabor algébrico. Após investigar algumas consequências do teorema de Sturm, Sylvester conjecturou acerca da possibilidade de os estender a dimensões superiores.

Assim, foi significativo o comentário seguinte, escrito em 1869 por Kronecker, um matemático cuja contribuição à álgebra ainda não foi totalmente integrada ao *corpus* da matemática: "Tanto quanto eu saiba, o caso simples que acabo de referir foi descoberto por Sylvester, que o interpretou de um modo semelhante mas menos intuitivo. [...] As dificuldades acerca de sua generalização, mencionadas por Sylvester, parecem decorrer sobretudo de ele haver restingido a atenção a estruturas algébricas. Tão logo percebi que todas as considerações relevantes dizem respeito exclusivamente a domínios mais gerais pertinentes à 'geometria da posição', quando n = 2 ou n = 3, encontrei recursos para dominar as dificuldades que se interpunham." [*Apud* SIEGBERG 1981:136]

É irônico que, no próprio curso da algebrização do teorema de Sturm, um notável algebrista (Kronecker) tenha percebido melhor *more geometrico* (ou, dito de outra forma, através de um prisma geométrico) o que outro algebrista não fora capaz de enxergar, de uma perspectiva puramente algébrica.

O teorema de Sturm foi, depois, completamente algebrizado (isto é, inteiramente liberado de sua anterior dependência da continuidade de funções) no âmbito da teoria dos corpos reais fechados. De fato, entre os famosos quesitos propostos por David Hilbert na preleção feita no congresso de Paris (em 1900), encontrava-se o décimo sétimo problema, formulado sob a rubrica '*representação de formas definidas através de quadrados*' [*Darstellung definiter Formen durch Quadrate*], assim enunciado:

> "Dizemos que uma função ou forma racional inteira, dependente de diversas variáveis com coeficientes inteiros, é definida, se ela não assumir valores negativos, para nenhum valor das variáveis consideradas. O sistema de todas as formas definidas é estável sob adição e multiplicação. E também é uma forma definida o quociente de duas formas definidas, desde que tal quociente seja função inteira das variáveis. É claro que também o quadrado de uma qualquer forma é sempre uma forma definida. Porém, se nem toda forma definida se compõe da adição dos quadrados de formas (como já mostrei), somos levados a indagar se toda forma definida pode ser expressa como quociente de somas dos quadrados de formas (pergunta a que já respondi afirmativamente, no caso de formas ternárias). É igualmente desejável sabermos, no caso de certos quesitos relativos à possibilidade de certas construções geométricas, se os coeficientes das formas que se empregarão na representação de uma qualquer forma se poderão escolher no domínio de racionalidade gerado pelos coeficientes dessa forma que se quer representar." (6) [HILBERT 1900:25-26]

Esse quesito suscitou pelo menos três ensaios de Edmund Landau (1903, 1906 e 1919) e um artigo de Carl Siegel (1921). Já no seu primeiro ensaio, Landau obteve a

decomposição de funções racionais inteiras definidas, *de uma variável e de grau par*, a decomposição $\Sigma e_h\{F_h(x)\}^2$, sendo cada e_h um número positivo de um *corpo real*, isto é, subcorpo do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Desse modo, Landau refinou o resultado, por eliminar a necessidade de quocientes. Na segunda memória, Landau mostrou que se o corpo considerado fosse o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais, seriam necessárias no máximo *oito* parcelas. [BENIS-SINACEUR 1984:268, 276]

Finalmente, Emil Artin, em um artigo denominado *Acerca da decomposição, mediante quadrados, de funções definidas* [*Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, 1926], introduziu a noção de **corpo real fechado**. Aponta a autora citada (p. 278) que essa noção não se aparenta com as ideias presentes nos estudos anteriores de Hilbert, Landau e Siegel mas foi forjada em relação estreita com com o conceito de **corpo algebricamente fechado**, proposto por Ernst Steinitz, na já referida *Algebraische Theorie der Körper* (1910).

A teoria dos corpos reais fechados foi exposta por Emil Artin e Otto Schreier em dois seminários (de Hamburgo): A construção algébrica de corpos reais [*Algebraische Konstruktion reeller Körper*, junho de 1926] e Uma caracterização dos corpos reais fechados [*Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper*, janeiro de 1927].

Nesses trabalhos, definiram-se ***os corpos formalmente reais*** como os corpos nos quais -1 não se pode exprimir como a soma de quadrados e ***os corpos reais fechados*** como os corpos formalmente reais que não admitem extensão algébrica própria que seja formalmente real. Assim, os corpos reais fechados são extensões algébricas ordenadas e maximais de corpos ordenados. [BENIS-SINACEUR 1984:279]

Prova-se que, em tais corpos, os quadrados de seus elementos constituem **um cone convexo e pontudo**, que é denominado conjunto dos elementos positivos. A relação de ordem definida mediante tal cone convexo é a única relação de ordem compatível com a estrutura de corpo.

No âmbito dos corpos reais fechados, prova-se, sem recurso ao conceito de continuidade, que toda função polinomial obedece ao teorema de Bolzano: Se f(b) e f(c) tiverem sinais opostos, então haverá, no intervalo cujas extremidades são b e c, um ponto no qual f se anula. Consequentemente, também vigora o teorema de Sturm, completamente algebrizado. [BENIS-SINACEUR 1984:286]

Talvez possamos dizer que, nesse trabalho conjunto, Artin e Schreier tenham perseguido a mesma meta que orientara Kronecker, ao mostrar que a teoria dos números algébricos era independente da teoria dos números reais (consoante foi comentado no capítulo sexto, a propósito da noção de congruência).

9.4 Uma mudança de perspectiva

"Não posso esquecer o antigo dogma de que o aspecto mais interessante da análise é a sua estrutura algébrica." (7)
Michio KUGA

Enfocarei um evento que, na minha opinião, concorreu fortemente para que a ênfase no aspecto ontológico dos conceitos se deslocasse para o seu aspecto estrutural.

Parece-me que a ênfase no aspecto estrutural tenha sido consequência natural da imagem da matemática cultuada em torno de Lejeune Dirichlet (imagem essa a que aludi brevemente na seção sobre a aritmetização da análise, no capítulo quarto, a propósito do *segundo princípio de Dirichlet*). Essa nova imagem da matemática, por sua vez, parece haver decorrido da invenção de novos métodos e dos novos modos de percepção a eles associados.

Talvez o início dessa processo se possa situar nos estudos por Lagrange das formas quadráticas binárias, em cujo seio lhe pareceu evidente que a essência dos fenômenos residia nas transformações e em seus invariantes. Esse novos *modus cogitandi* se manifestou em seu tratamento das equações polinomiais. De fato, Lagrange mostrou que cada um dos radicais cúbicos da fórmula de del Ferro (para resolução da equação polinomial de terceiro grau) podia escrever-se sob a forma $(1/3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$, na qual ω é uma raiz cúbica da unidade e os números x_j representam as três raízes da equação considerada, tomados em uma certa ordem. E observou o fato crucial de que a função $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$ podia assumir apenas *dois* valores distintos para todas as permutações das três raízes. "Uma análise semelhante dos métodos de resolução da equação do quarto grau o conduz à função $x_1x_2 + x_3x_4$ das quatro raízes, que assume apenas *três* valores distintos para toda permutação das raízes e é, consequentemente, raiz de uma equação do terceiro grau, tendo por coeficientes funções racionais dos coeficientes da equação dada; esses fatos contituem, segundo Lagrange, '*os verdadeiros princípios e, por assim dizer, a metafísica da resolução das equações do terceiro e do quarto grau*'. (8) [*Apud* BOURBAKI 1960:100]

Um enorme passo adiante foi dado por Évariste Galois, ao inaugurar a prática de se estudarem os elementos de um certo objeto através do grupo dos automorfismos desse objeto que fixam os elementos de um certo subobjeto. STEIN [1988:240] assinala que, enquanto nas *Disquisitiones arithmeticae* Gauss evitou a introdução de novos objetos ideais mediante a introdução de congruências, Galois não hesitaria em introduzir raízes ideais de congruências irredutíveis de polinômios modulo um número primo, iniciando a teoria algébrica dos corpos finitos. [BOURBAKI 1960:108-109]

Um outro passo decisivo foi dado por Dirichlet, em 1837. Considero esse passo decisivo, porque ele rompeu com a tradição de se considerar que houvesse, em matemática, dois tipos de entes ou objetos distintos: por um lado, as grandezas discretas (como os números naturais) e, por outro lado, as grandezas contínuas (como as medidas conduzidas na geometria e na mecânica).

Essa distinção é postulada por Gauss, na prefação às *Disquisitiones arithmeticae* (1801), quando afirmou que se ocuparia naquela obra apenas de investigações com números inteiros e, às vezes, com frações mas nunca com números irracionais. E, logo adiante, esclareceu que o objeto próprio da aritmética consistia no estudo dos números inteiros e das frações, por estarem essas determinadas por números inteiros.

Foram referidas (na seção sobre a geometria das pluralidades, no capítulo terceiro) tanto uma carta de Gauss quanto a opinião de Riemann, discípulo de Gauss, de que se devessem distinguir entre as pluralidades discretas e as pluralidades contínuas.

Essa suposta distinção ainda era claramente percebida na segunda metade do século passado, consoante informa OTTE [2007:247]: "Até os meados do séculos XIX, os matemáticos discordavam em ser a matemática uma ciência atinente a objetos reais, como a geometria e a mecânica, ou em ser uma ciência resultante de nossas próprias construções mentais, como a aritmética." (9)

E, ao apontar que o quesito da unidade da matemática se havia posto, quase desde os seus primeiros passos, notou BOURBAKI [1962:36] que, "na verdade, mesmo descuidando da matemática aplicada, subsiste, entre a geometria e a aritmética (pelo menos sob o aspecto elementar), uma evidente dualidade de origem, tendo sido essa, inicialmente, ciência do discreto e aquela, ciência da extensão contínua, dois aspectos que se opõem radicalmente desde o descobrimento das grandezas irracionais." (10)

Mas Dirichlet, na memória intitulada *Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres* (1837), recorrendo essencialmente a variáveis contínuas e à teoria dos limites, provou a existência de uma infinidade de números primos em toda progressão aditiva que contivesse dois termos relativamente primos. Dirichlet esteve consciente da *mudança de paradigma*, ao afirmar textualmente haver instituído "uma conexão entre a análise infinitesimal e a aritmética superior". [STEIN 1988:242; SHOKRANIAN 2010:107]

Dirichlet também ressaltou a mudança de perspectiva, ao dizer que fora induzido "a investigar um grande acervo de quesitos pertinentes aos números [entre eles, as questões atinentes ao número de classes das formas quadráticas binárias e à distribuição de números primos] de um ponto de vista inteiramente novo, que se vinculava aos princípios da análise infinitesimal e às propriedades notáveis de uma classe de séries infinitas e de produtos infinitos." [*Apud* STEIN 1988:242-243]

A conexão entre os dois domínios de pesquisa (e, portanto, entre os dois tipos de grandeza) e o recurso a um método *misto* foi determinante no **deslocar o critério de classificação dos objetos matemáticos**, anteriormente apoiado na suposta origem dos conceitos (*critério ontológico*), **para as propriedades características dos conceitos** (*critério fenomenológico*). Sob esse aspecto, os estudos conduzidos por Dirichlet foram precursores do pensamento estrutural, que se concentra nas propriedades dos objetos e não no modo pelo qual tais objetos são concebidos ou definidos.

Notemos, *en passant*, que essas investigações aritméticas conduzidas por Dirichlet, mediante argumentos extraídos do cálculo infinitesimal, são tanto mais surpreendentes, por haverem ocorrido em uma época na qual se iniciara um movimento na outra direção, qual seja, a aritmetização da análise (que foi comentada no capítulo quarto), à qual se seguiria a aritmetização da álgebra (por Kronecker e Dedekind, consoante RECK [2009:155].

Admite-se que a perspectiva adotada por Dirichlet, no privilegiar as propriedades dos objetos matemáticos, tenha influenciado fortemente seus discípulos. Na celebração do centenário do nascimento daquele matemático, pôde declarar MINKOWSKI [1905:163] que "embora como docente, houvesse atuado de modo tão extraordinariamente estimulante, Dirichlet não criou uma escola específica de matemática. Porém muitos [discípulos] que, mais tarde, se dispersaram ao longo de caminhos individuais muito diversos, agradeceram a ele o intenso impulso impresso a suas aspirações científicas. [...] Qual matemático desconhece que procedia da constelação de Dirichlet a órbita resplendente de Riemann, esse meteoro gigante do firmamento matemático?" ([11])

Informa EDWARDS [1983B:10] que, embora houvesse escrito a dissertação sob a direção de Gauss, Richard Dedekind fora influenciado sobretudo pelo pensamento de Dirichlet. Exatamente quando Dedekind iniciava a atuação como *Privatdozent* em Göttingen, Gauss morreu (1855) e Dirichlet o substituiu. Em uma carta de julho de 1856, Dedekind descreveu o quanto significou a presença de Dirichlet em Göttingen. "O que me é mais útil é a associação quase quotidiana com Dirichlet, com quem, pela primeira vez, estou começando a aprender propriamente; [...] ele sempre me revela, sem rodeios, as lacunas que devo preencher e, imediatamente, me dá indicações e meios para fazê-lo." ([12]) [*Apud* EDWARDS 1983B:10]

Logo depois, morreria Dirichlet (1859) e Dedekind lhe faria a edição póstuma das *Preleções à Aritmética* [*Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von* R. *Dedekind*], que se tornariam o primeiro texto inteligível sobre a teoria algébrica dos números, por "romper os sete selos" das *Disquisitiones Arithmeticae*, de Gauss, segundo a expressão de ROWE [2004:91], aludindo a uma frase do historiador da cultura, Theodore Merz, que (em *A History of European Thought in the Nineteenth Century*, Edinburgh 1903:721) chamou as *Disquisições Aritméticas* de 'o grande livro com sete selos'.

Afirma, entre parênteses, EDWARDS [1983B:11] que "embora o livro estivesse certamente *baseado* nas preleções de Dirichlet e embora o próprio Dedekind, durante toda a vida, se referisse a ele como obra de Dirichlet, o livro fora escrito inteiramente por Dedekind, a maior parte após a morte de Dirichlet". ([13]) Contudo, esse livro não refere os fatores primos ideais de Kummer. [EDWARDS 1992A:8]

Ora, já foi referido (na seção sobre a divisibilidade nos domínios de integridade, do capítulo sexto) que, em 1847, Kummer escrevera uma carta a Liouville, afirmando que o teorema da fatoração única não poderia estender-se ao domínio dos inteiros ciclotômicos.

Não obstante, nesse mesmo ano, Kummer apresentou minúcias de uma teoria da fatoração ideal dos inteiros ciclotômicos com *expoentes primos* e, em 1859, recorrendo a sua

teoria da fatoração ideal, provou uma lei geral de reciprocidade, para alguns domínios de números ciclotômicos. Nessa ocasião, anunciou que, em breve, Kronecker divulgaria uma teoria simples e inteiramente elaborada da fatoração, aplicável a corpos arbitrários de números algébricos. [EDWARDS 1980:322; EDWARDS 1982:50]

Dedekind esperou ansiosamente a publicação dessa obra de Kronecker, que não era dada a lume, e, em 1871, apresentou uma teoria completa dos corpos de números algébricos, como *Suplemento X* da segunda edição das *Vorlesungen über Zahlentheorie*, de Dirichlet. [EDWARDS 1980:322]

Logo após sua publicação, foi motivo de encômio por Kronecker, em uma comunicação à Academia de Berlim, nestes termos: "Além disso, devo observar que uma demonstração semelhante também se encontra nos valiosíssimos suplementos que Dedekind acrescentou à sua edição, extremamente recomendável, das preleções de Dirichlet, sobre a teoria dos números, conduzida com tanta habilidade e com tanto cuidado." (14) [*Apud* EDWARDS 1983:16]

Ensina EDWARDS [1983:8-9] que, conceituada a noção de ***elemento inteiro*** em um corpo de números algébricos (ou, equivalentemente, escolhido o domínio de integridade ao qual se aplicará a teoria), existem três modos de se estender a teoria da fatoração dos inteiros ciclotômicos de Kummer. Uma delas consiste simplesmente em se estenderem quase automaticamente as ideias de Kummer para o corpo dos números algébricos e foi isso que Dedekind fizera, na primeira publicação do *Suplemento X*.

A locução 'quase automaticamente' não deve sugerir que a extensão conduzida por Dedekind não introduzisse notável modificação no *modus scribendi*, pois Dedekind se educara na leitura das obras de Gauss e de Galois e nas discussões com Dirichlet, dos quais herdou forte interesse no aspecto conceitual. Com efeito, na redação do *Suplemento X*, Dedekind enfatizou que "Kummer não definira os próprios números ideais mas tão somente a divisibilidade por esses números. [...] Ainda que a introdução de novos números seja inteiramente legítima, devemos todavia recear, de início, que o modo de expressão escolhido, no qual falamos de números ideais determinados e de seus produtos e, também pela suposta analogia com a teoria dos números racionais, tenha conduzido a conclusões precipitadas e, por isso, a demonstrações insuficientes. De fato, esse perigo não foi sempre evitado completamente." (15) [EDWARDS 1983:15]

Contudo, em 1877, Dedekind apresentou, uma revisão de sua teoria, à qual se seguiram duas outras revisões, nas reedições sucessivas (em 1879 e em 1894) das *Vorlesungen über Zahlentheorie*, de Dirichlet. E, se na primeira versão, Dedekind teve alguma inquietação quanto à existência dos números ideais, tal inquietação se foi eclipsando nas versões subsequentes, nas quais substituiu a formulação de Kummer por uma apresentação escrita em um novo estilo, no qual a ênfase se deslocara para *conjuntos descritos por propriedades*. (Na seção sobre as definições nominais do quinto capítulo, foi narrado como Dedekind elaborou a construção corrente dos números inteiros, recorrendo essencialmente a consideraçoes conjuntuais.)

Dedekind pretendeu formular o conceito de número complexo ideal, anteriormente introduzido por Kummer. Ora, a propriedade essencial de um tal número ideal consistia e dividir (ou em *não* dividir) um número complexo *real* ou *não ideal*. (Aqui o qualificativo 'real' opõe-se a 'ideal' assim como, outrora, se opunha a 'imaginário'.) Dessa perspectiva, podemos caracterizar um número complexo ideal, se conhecermos todos os números inteiros algébricos que sejam divisíveis por ele. E assim Dedekind foi conduzido à noção de ideal como um conjunto de números divisíveis por um dado produto de fatores primos ideais, substituindo o problema de *definir números ideais* pelo problema de *definir ideais*, problema esse que ele resolveu com a maior simplicidade: Um conjunto J de números inteiros é denominado um ideal (a) se for estável sob adição e multiplicação; (b) se for estável sob multiplicação por um número inteiro arbitrário. Além disso, um ideal J será primo, se, da pertinência a J do produto de dois fatores, se puder inferir a pertinência a J de um desses dois fatores. Nesse contexto, Dedekind recuperou o teorema da unicidade da fatoração, mostrando que, nesses domínios, todo ideal se pode escrever, de modo único, como o produto de ideais primos. [EDWARDS 1980:343-344; KLEINER 1999:679]

Dedekind considerava que seu estilo de definir era análogo ao tratamento dado por Riemann à teoria das funções, mediante o qual as funções eram caracterizadas por propriedades intrínsecas ou globais e não por fórmulas. [EDWARDS 1982:52; EDWARDS 1992A:8]

Esse *Suplemento X*, inserido por Dedekind às *Vorlesungen über Zahlentheorie*, de Dirichlet, é considerado o *locus ortus* da noção de ideal em um domínio de integridade, conceito que desempenharia papel fundamental na teoria dos anéis, desde os trabalhos de Emmy Noether. Na feliz expressão de Abramo HEFEZ [1993:74], "a variedade dos tipos de ideais de um anel, de certo modo, mede a complexidade do anel".

Se Dirichlet trouxera para a aritmética a técnica do cálculo infinitesimal, Dedekind lhe trouxe o novo *modus cogitandi* praticado pelos analistas.

De fato, já foi referido, no capítulo terceiro (na seção sobre a gênese do culto do rigor), que, por serem tão tênues as condições exigidas para que uma função fosse representável por séries de Fourier, Dirichlet fora levado "às fronteiras do que se poderia conceber como função"; e já foi narrado, no capítulo quarto (na seção sobre a aritmetização da análise), que Dedekind revelara haver sido o desígnio de seus esforços "obter, na teoria dos números, resultados análogos aos que Riemann alcançara na teoria das funções". Ora, Riemann fora o promotor mais notável da ideia de que condições tão amenas quanto as hoje denominadas *condições de Cauchy-Riemann* (que caracterizam as funções de uma variável complexa $z = u + iv$, dizendo que u e v são *conjugadas*) implicassem que uma tal função se pudesse expandir em série de potências. [EDWARDS 1992:7]

Assim, seria de esperar que Dedekind desejasse apoiar a teoria algébrica dos números sobre conceitos simples e gerais; e a sua caracterização dos (conjuntos) ideais lhe parecia ser uma noção tão simples, na aritmética, quanto o eram as *condições de Cauchy-Riemann*, na análise. Desse modo, Dedekind substituiu os habituais métodos construtivos por

métodos não construtivos, fundados na ausência de contradição [*Widerspruchlosigkeit*]. [Cf. EDWARDS 1992:8]

Até então, imperava a divisa proferida por Gauss, ao recusar "o uso de magnitudes infinitas, como se fossem algo acabado; esse uso é inadmissível em matemática. O infinito é apenas uma *façon de parler*". [*Apud* KRAUSE 2002:71]

Mas Dedekind já havia rompido com essa tradição, ao introduzir os cortes de números racionais (hoje denominados *cortes de Dedekind*). Em *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), Dedekind observou que todo número racional r decompõe o corpo $\mathbb{Q}$ em duas classes A e B, de sorte que todo elemento de A é menor que todo elemento de B (podendo o elemento r estar, exclusivamente, em uma qualquer dessas classes). Em seguida, abstraindo o modo pelo qual tais classes foram definidas, Dedekind definiu um corte [*ein Schnitt*] como um par de classes de números racionais que atendessem à condição citada. [DEDEKIND 1963:12-13]

Em uma carta conservada nos arquivos em Göttingen (e *parcialmente* publicada nas suas *Werke*), Dedekind reagiu com rara veemência a uma suposta sugestão de Rudolf Lipschitz de que, na exposição da teoria dos ideais (composta para o *Bulletin des Sciences Mathématiques*), não fosse perseguida a analogia com os cortes. Isso insinua que a mudança de estilo nos procedimentos adotados por Dedekind fosse consciente e deliberada e que refletisse convicções mais profundas. [EDWARDS 1983:14]

9.5 A gênese da estrutura de corpo

Já foi citado (na seção sobre os corpos valorados, do capítulo sétimo) que, na *Teoria das funções algébricas de uma variável* [*Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*, 1882], Richard Dedekind e Heinrich Weber estenderam ao contexto das funções algébricas diversas ideias maturadas no contexto da teoria dos números algébricos, entre elas a noção de *corpo* (no idioma vernáculo desses autores, *Körper*).

A noção de corpo já era implicitamente usada, pelo menos, desde Gauss. Na verdade, podem citar-se pelo menos três defluentes *concretos* que conduziram à noção *abstrata* de corpo. [KLEINER 1999A:677]

O primeiro defluente *concreto* foi a teoria de Galois, na qual a noção de corpo era um conceito central e *concreto*: O termo corpo era usado para se designarem certas partes do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

O segundo defluente *concreto* foi precisamente a teoria da divisibilidade, que se desenvolveu ao longo de duas tradições, das quais a teoria dos ideais de Dedekind se tornou a formulação dominante. De fato, se Dedekind recuperou o teorema da unicidade da fatoração, cabia-lhe caracterizar quais os domínios nos quais tal teorema seria válido. Para responder a essa pergunta, Dedekind introduziu a noção de corpo, especificamente a noção

de corpo de números algébricos Q(α), associado ao número α, raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Tais corpos seriam a *domus* natural dos domínios de integridade (assim como o corpo Q dos números racionais era a *domus* natural do anel Z dos números inteiros.) Assim, Dedekind definiu a noção de corpo (propriamente, um subcorpo do corpo C dos números complexos, que era tudo de que ele precisava): "Chamamos corpo a qualquer sistema infinito de números reais ou complexos fechado em si mesmo e perfeito, de modo que a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de dois quaisquer de tais números seja ainda um número desse sistema." [*Apud* KLEINER 1999A:679]

Na última versão do *Suplemento X* (anexo à quarta edição das *Vorlesungen* de Dirichlet), Dedekind incluiu teoremas e definições que são hoje universalmente aceitos, como os seguintes [KLEINER 1999A:680]:

(a) Dada uma parte S do corpo C dos números complexos, a interseção de todos os corpos que contêm S é um corpo.

(b) Uma permutação de um corpo é uma aplicação do corpo E sobre o corpo F que preserva todas as quatro operações do corpo. (Hoje chamamos homomorfismo a uma tal aplicação.)

(c) Tal permutação será bijetiva, se o corpo F não se reduzir a {0}.

(d) Se E e F coincidirem com o corpo Q dos números racionais, tal permutação será a identidade.

(e) Dado o subcorpo E de K, o grau de K sobre E é a dimensão de K considerado como espaço vetorial sobre E.

(f) Se for finito o grau de K sobre E, então todo elemento de K será algébrico sobre E.

O terceiro defluente *concreto* que conduziu à noção *abstrata* de corpo foi a geometria algébrica. Resumidamente, podemos dizer que a geometria algébrica é o estudo das curvas algébricas e das suas extensões a dimensões superiores, denominadas variedades algébricas. [KLEINER 1999A:681] Uma conceituação mais ambiciosa consiste em afirmar que a geometria algébrica seja o estudo das soluções das equações polinomiais com coeficientes em um corpo ou, com maior generalidade, em um anel comutativo. [RAYNAUD 1999:864]

Chamamos curva algébrica "ao conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas (retangulares ou oblíquas) x e y satisfazem a uma equação da forma f(x,y) = 0, na qual f é um polinômio em duas variáveis". (16) [PASTOR et alii 1955:187]

Diversos tratamentos foram usados no estudo das curvas algébricas. No tratamento analítico, o principal objeto de estudo eram as funções algébricas de uma variável complexa e as suas integrais. Nesse estudo, Riemann introduziu um modo de representar as curvas mediante folhas distintas (posteriormente denominadas *superfícies de Riemann*), sobre as

quais as funções algébricas se tornavam univalentes. [DIEUDONNE 1972:835; KLEINER 1999A:682]

Os argumentos de Riemann repousavam sobre um princípio físico por ele atribuído a Lejeune Dirichlet, embora Riemann soubesse que também Gauss já o formulara, em 1839, em um trabalho sobre forças proporcionais ao inverso do quadrado da distância. (Riemann assistira, por volta de 1856, às preleções sobre alguns temas contemporâneos da física, como a eletricidade e a condução do calor, proferidas por Dirichlet.) [ELSTRODT & ULLRICH 1999:278; GARDING 1979:43]

O princípio de Dirichlet permitia resolver o seguinte problema, denominado problema de Dirichlet:

> Dadas *uma região* (um conjunto aberto e simplesmente conexo do espaço) Ω e uma função contínua f definida sobre a fronteira $\delta\Omega$, encontrar uma função g, harmônica sobre Ω, a qual se estende continuamente sobre $\delta\Omega$, de modo que $g/\delta\Omega \equiv f$. (Equivalentemente, a condição de contorno consiste em exigir-se que a restrição a $\delta\Omega$ do prolongamento contínuo de g coincida com f.)

Tal problema fora considerado por Dirichlet em 1840, no texto *Preleções sobre a relação inversa entre as forças* [*Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*], nos termos seguintes:

> "Dado um domínio delimitado no espaço, sempre existe uma e somente uma função u, continuamente diferenciável, de x, y, z, que satisfaz à equação diferencial $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 + \partial^2u/\partial z^2 = 0$ no interior desse domínio e que assume um dado valor no seu contorno. O problema de determinar explicitamente a função u não pode ser resolvido; assim, o que se coloca é apenas provar a existência dessa função, o que não oferece dificuldade." [*Apud* ELSTRODT & ULLRICH 1999:278]

Presentemente, se supõe que Ω seja uma região do espaço R^n. Cf. GARDING [1979:43].

Assim, o princípio de Dirichlet afirmava a existência de uma tal função, isto é, declarava a existência de solução para a equação $\nabla^2 f(x,y) \equiv 0$, com a condição de contorno $f(x,y) = g(x,y)$, para uma g arbitrária.

Equivalentemente, o princípio de Dirichlet afirmava que a integral $\int\{\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 + \partial^2u/\partial z^2\}dT$ admitia um valor mínimo [TAZZIOLI 2001:233]. Com efeito, a solução de Dirichlet consistiu em transformá-lo em um problema do *cálculo das variações*. Em versão livre:

> "Para cada domínio delimitado e conexo T, existe uma infinidade de funções continuamente diferenciáveis de x, y, z, que assumem um dado valor sobre o contorno.

Entre tais funções haverá pelo menos uma para a qual a seguinte integral, estendida ao domínio T, $U = \int\{\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2\}dT$, assume o valor mínimo, pois é evidente que essa integral admite um valor mínimo, já que ela não pode assumir valores negativos. Os itens seguintes podem ser provados:

1. Uma função u que minimize a integral U também atenderá à equação diferencial $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0$ em toda parte de T.

2. Toda função que satisfaça a essa equação diferencial e às condições de contorno prescritas minimiza a integral U.

3. Essa integral admite apenas um valor mínimo.

Os dois últimos fatos implicam a existência de apenas uma função u do tipo exigido. Com efeito, seja v uma qualquer dessas funções que minimize a integral U. Qualquer outra função u que atenda à equação diferencial e às condições de contorno poderá exprimir-se como v + hw, sendo h um constante arbitrária e w uma função continuamente diferenciável em T, que se anule ao longo da fronteira." [*Apud* ELSTRODT & ULLRICH 1999:278-279]

Dirichlet conduziu um rápido argumento para provar que a constante h fosse nula (e que, portanto, fosse única a função minimizante).

Na opinião de FIGUEIREDO [1985:63], "talvez se trate de um dos primeiros exemplos de transformação de um problema de equações diferenciais parciais em uma questão do cálculo das variações". Acrescenta esse autor:

"É interessante observar que o problema de minimização de funcionais é o objetivo central do cálculo das variações clássico e que, em seu estudo, equações diferenciais (as conhecidas equações de Euler-Lagrange) aparecem, de modo natural, como condições suficientes a que a função que minimiza o funcional deve satisfazer. Assim, no cálculo das variações clássico, a questão de minimização de um funcional é reduzida ao estudo de um problema na teoria das equações diferenciais. Esse programa tem sucesso, na medida em que o problema diferencial seja tratável por alguma outra técnica. A ideia de inverter a direção desse programa, isto é, tratar equações diferenciais através do estudo de um funcional associado, aparece em

meados do século XIX, de modo explícito, com Dirichlet e Riemann." (FIGUEIREDO 1988:21-22)

Seja F a família das funções dotadas de derivadas contínuas em $\Omega\cup(\delta\Omega)$ para as quais o funcional $\iint|\nabla u|^2 dxdy$ esteja bem definido, isto é, $\iint|\nabla u|^2 dxdy < \infty$. Na linguagem hodierna, Dirichlet mostrou que a função ϕ que minimiza tal funcional é a solução do problema anterior. Tal resolução envolve alguns passos:

- Certificar que podemos aplicar o teorema da divergência a esse contexto, o que exigirá que as funções envolvidas apresentem derivadas parciais contínuas de segunda ordem. (Presentemente, esse passo é denominado *regularização da função*.)
- Certificar que existe a função que minimiza o funcional considerado.
- Certificar que F não é vazio.

Riemann (em 1851) admitiu sem discussão a existência de tal função minimizante e tornou a usá-lo (em 1857). Aliás, Riemann "usou as ideias de Dirichlet de um modo muito liberal. Aplicou-as não apenas a domínios planos mas também a domínios completamente arbitrários em superfícies de Riemann. E não se cingiu a funções suficientemente suaves mas admitiu singularidades, especificamente singularidades logarítmicas. Combinando ambas essas ideias, provou maravilhosos teoremas de existência para funções e diferenciais em superfícies de Riemann." [ELSTRODT & ULLRICH 1999:281]

Alguns geômetras contemporâneos começaram a duvidar da validade dos argumentos adotados por Riemann, especificamente do uso liberal do princípio de Dirichlet. NEUENSCHWANDER [1981:247] transcreve uma carta de Georg August Thieme a Richard Dedekind, na qual se refere uma conversa que tiveram em 1962, acerca da ausência de fundamento sólido [*nicht ganz stichhaltige Begründung*] no emprego do princípio de Dirichlet. Também NEUENSCHWANDER [1978:74] copia uma anotação, feita por Casorati (em 15 de outubro de 1864), acerca de um conversa com Leopold Kronecker:

> "Disse Kronecker que os matemáticos são um pouco altivos ao usarem o conceito de função. Também Riemann, geralmente muito exato, não é irrepreensível sob esse aspecto. Se uma função crescer e, depois, diminuir ou vice-versa, Riemann diz que deve existir um mínimo ou um máximo (veja-se a demonstração do assim chamado princípio de Dirichlet); entretanto, essa conclusão deveria restringir-se à esfera das funções por assim dizer razoáveis." (17)

Por volta de 1860, acumulavam-se diversos resultados recentemente obtidos pelo modo projetivo de pensar [*die projektive Sichtweise*], entre eles muitas propriedades de curvas planares de terceira e de quarta ordem e de superfícies de terceira ordem; e também teoremas de caráter geral, referentes a curvas algébricas de ordem arbitrária (como as propriedades

atinentes aos pontos duplos e à tangentes duplas). Havia, pois, um acervo de fatos concretos, que esperavam por conjecturas adequadas. [SHAFAREVICH 1983:135]

O geômetra SHAFAREVICH [1983:135-136] assim descreve a intervenção por Alfred Clebsch:

> "A ideia profunda e audaciosa de Clebsch consistiu em que não se deveria procurar esse conceito abrangente na própria geometria mas na obra de Riemann, recentemente (1856) dada a lume, a qual, então, era compreendida como parte da teoria das funções, dedicada às integrais e às funções θ e baseada no princípio de extremação de Dirichlet. Isso foi essencialmente uma reinterpretação das ideias de Abel e de Riemann, uma tradução em uma outra língua, porém uma tradução altamente não trivial. Enquanto, para Abel, a equação F(w, z) = 0, sendo F um polinômio, determinava uma 'irracionalidade' w e, para Riemann, essa mesma equação determinava uma função algébrica (definida sobre um superfície de Riemann), para Clebsch, essa era a equação de uma curva algébrica e cada novo fato pertinente a essa equação se refletia em uma certa propriedade geométrica da curva." (18)

As primeiras ideias de Clebsch foram apresentadas na memória "*Sobre a aplicação das funções abelianas na geometria*" [*Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie*, 1863], à qual se seguiu outra memória "*Sobre um teorema de Steiner e alguns aspectos da teoria das curvas de terceira ordem*" [*Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung*, 1863], na qual Clebsch provou que as curvas de terceira ordem eram parametrizadas por funções elípticas e reinterpretou o teorema da adição das funções elípticas, mostrando que três pontos de uma curva de terceira ordem se situam sobre uma reta se e somente se a soma dos três argumentos correspondentes da função elíptica for um período dessa função. [SHAFAREVICH 1983:136]

Recorrendo a um mínimo de computação, Clebsch provou um teorema de Steiner acerca de polígonos inscritos e diversos teoremas acerca de cônicas que tangenciam curvas. Obteve ainda uma nova classificação das curvas algébricas de ordem arbitrária, tomando as transformações birracionais como princípio classificador, em harmonia com as ideias de Riemann. [PIERPONT 1999:21]

Juntamente com Paul Gordan, Clebsch publicou a *Theorie der Abelschen Funkionen* (1866), na qual se aplicava à teoria das curvas algébricas reais a teoria das superfícies multiplamente conexas de Riemann. [STRUIK 1987:177]

Mas muitas ideias de Riemann eram reformuladas por Clebsch e Gordan em termos puramente algébricos. Isso ocorreu, em parte, com a noção de conexidade, concebida por Riemann no contexto seguinte: Uma superfície teria conexidade de ordem 2p + 1, se, mediante 2p cesuras, ela se convertesse em um polígono de 4p lados. No livro citado, Clebsch e Gordan, restringindo-se ao contexto das curvas algébricas dotadas somente de pontos duplos e de cúspides, redefiniram o número p (então denominado *genus*) como

(1/2)(n - 1)(n - 2) - d - c, sendo n o grau da equação definidora da curva, d o número de pontos duplos e c o número de cúspides simples. [GRAY 1998:811, 813]

Essas ideias não foram acolhidas com unanimidade. Um antigo aluno de Riemann, Friedrich Prym, em carta (de 2 de dezembro do mesmo ano) ao geômetra Felice Casorati, protestou contra a inovação aduzida por Clebsch, dizendo que:

> "Tereis recebido pelo correio o livro de Clebsch. Ele não devia haver tido a ousadia de publicar a prefação, enquanto Riemann fosse vivo. A tentativa de apoiar a teoria das funções na álgebra pode ser considerada como inteiramente inútil. [...] Pelo contrário, a álgebra é o resultado da teoria das funções e não o contrário. [...] O futuro nos dirá até onde os autores irão." (19) [NEUENSCHWANDER 1978:61]

Felix Klein narrou que Karl Weierstrass lhe havia referido uma discussão que tivera com Riemann na qual este manifestara não atribuir maior importância às provas mediante o princípio de Dirichlet nos teoremas de existência. Admite-se que esse encontro entre Weierstrass e Riemann tenha ocorrido em 1859. [ELSTRODT UND ULLRICH 1999:286]

As objeções de Weierstrass não diziam respeito às conclusões, na teoria das funções, obtidas por Riemann mas à validade geral do princípio de Dirichlet. É possível que essas objeções estivessem associadas à distinção entre os conceitos de mínimo e de ínfimo, que começou a ser percebida, desde os escritos de Bernhard Bolzano e de Augustin Cauchy. [ELSTRODT & ULLRICH 1999:286; GARDING 1979:47]

Na alocução *Acerca do assim denominado princípio de Dirichlet* [*Über die sogenannte Dirichletsche Princip*, proferida na *Königliche Akademie der Wissenschaft*, em 14 de julho de 1870], Weierstrass tentou reconstruir o que Dirichlet efetivamente dissera nas preleções e afirmou que, em nenhum lugar, Dirichlet havia aventado a hipótese da existência de uma função para a qual a integral de Dirichlet assumisse o valor mínimo. E concluiu que apenas se poderia declarar que a integral vertente admite um ínfimo. [GARDING 1979:47]

Nessa alocução, Weierstrass propôs o exemplo seguinte: Seja ϕ o funcional, definido no intervalo [-1, 1], descrito por $\int x^2.(du/dx)^2.dx$, definido na classe das funções contínuas nesse intervalo, que atendem às condições u(-1) = -1 e u(1) = 1. Como $(du/dx)^2$ não é negativo, a fim de que o funcional se anule em u, é necessário que (du/dx) seja nulo. Nesse caso, u é constante (e não está na classe de funções contínuas considerada). Por outro lado, é fácil construir uma sequência de funções contínuas (ω_n) tais, que o funcional vertente calculado sobre elas forneça uma sequência de termos que converge a 0. Contudo, o ínfimo de $\{\phi(\omega_n)\}$ não é atingido por nenhum termo da sequência. De fato, seja $\omega_n(x) = -1$, se $-1 \leq x < -1/2^n$; $\omega_n(x) = 2^n x$, se $-1/2^n \leq x \leq 1/2^n$; $\omega_n(x) = 1$, se $1/2^n < x \leq 1$.

A dificuldade em justificar os argumentos usados por Riemann levaram Amandus Schwarz a observar (no escrito *Ueber einige Abbildungsaufgabe*, 1869) que, "como haviam sido

apresentadas objeções bem fundadas atinentes ao rigor e à admissibilidade desse argumento [usado por Riemann] em provas de existência, era desejável dispor-se de um método de prova independente das dúvidas suscitadas pelo princípio de Dirichlet". [*Apud* ELSTRODT & ULLRICH 1999:285]

Nesse empreendimento obtiveram bom êxito parcial os trabalhos do próprio Amandus Schwarz e de Carl Neumann.

Schwarz provou o teorema da representação de Riemann para domínios bidimensionais convexos sem recorrer ao princípio de Dirichlet. [TAZZIOLI 2001:233]

Também sem recorrer ao citado princípio, Neumann estudou e resolveu o problema de Dirichlet para domínios tridimensionais convexos. Estudou também problemas de representação conforme, mediante um método que lhe permitia exibir explicitamente a solução. Foi no curso desses estudos que Neumann introduziu o problema de se encontrar uma função harmônica em uma dada região, cuja derivada, na direção normal, ao longo da fronteira, tivesse um valor prescrito. (Esse problema hoje traz o seu nome.) [ELSTRODT & ULLRICH 1999:286; GARDING 1979:47-48; TAZZIOLI 2001:234]

No artigo *Teoria das funções algébricas de uma variável* [*Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*, 1882], Dedekind e Weber impuseram a si próprios a tarefa de tornar *rigorosas* as ideias de Riemann: "O escopo destas investigações [...] é justificar, de um ponto de vista simples e, ao mesmo tempo, rigoroso e completamente geral, a teoria das funções algébricas de uma única variável, a qual constitui uma das principais aquisições do labor criativo de Riemann". [*Apud* KLEINER 1999A:682]

Para alcançarem esse fim, estenderam às funções algébricas as ideias que, antes, Dedekind introduzira para os números algébricos. Assim como um corpo de números algébricos é uma extensão finita Q(a) do corpo Q dos números racionais, também assim Dedekind e Weber definiram um corpo de funções algébricas como uma extensão finita C(z)(w) do corpo C(z) das funções racionais (na indeterminada z). Dito de outro modo, w é uma raiz do polinômio $a_0 + a_1t_1 + a_2t^2 + ... + a_nt^n$, do qual os coeficientes $a_j \in C[z]$. [BOURBAKI 1960:107-108; KLEINER 1999A:682]

Perseguindo essa analogia, Dedekind e Weber consideraram o sistema dos inteiros de C(z)(w), isto é, das raízes dos polinômios mônicos com coeficientes em C(z). Esse sistema é um domínio de integridade e todos os ideais não nulos desse domínio se exprimem, univocamente, como o produto de ideais primos. Nessa construção, as funções meromorfas em uma superfície de Riemann constituem um corpo de funções algébricas, das quais as funções inteiras correspondem aos números inteiros. [KLEINER 1999A:682]

Nesse trabalho, os autores acentuaram a analogia entre os ideais primos de um corpo de números algébricos, de um lado, e os pontos de uma superfície de um corpo de funções algébricas, do outro lado. Também enfatizaram que, em nenhum momento, recorreram ao conceito de continuidade e que os teoremas demonstrados continuariam

válidos, se o corpo dos números complexos fosse substituído pelo corpo de todos os números algébricos. [SHAFAREVICH 1974:428]

Ainda nesse artigo, foi provado, pela primeira vez, com apoio exclusivo em argumentos algébricos (e, portanto, sem recorrer ao princípio de Dirichlet), um teorema devido a Roch (1865), aluno de Riemann, que vincula a expressão de uma função com a ordem de conexidade de uma superfície, o número de polos simples e o número de integrandos holomorfos, linearmente independentes sobre essa superfície. (Se uma função **w** admitir **d** polos simples e se **q** integrandos holomorfos, linearmente independentes, se anularem nesses polos, então a função w dependerá de d - p + q + 1 constantes arbitrárias, sendo p a ordem de conexidade da correspondente superfície.) [EDWARDS 1983:14; GRAY 1998:812; KLEINER 1999A:682; RECK 2009:153]

Esse trabalho conjunto de Dedekind e Weber foi notável sob pelo menos três aspectos. Primeiramente, mostrou a fecundidade do tratamento *estrutural* (isto é, o tratamento baseado nas propriedades dos conceitos) praticado por Dedekind. Em segundo lugar, acentuou o fato de que a noção de corpo não era privativa da aritmética *clássica* mas um conceito que perpassava diversos ramos da matemática e que, portanto, seria susceptível de uma formulação autônoma. Em último lugar, constituiu um excelente exemplo do emprego fecundo da **analogia** e do procedimento de **algebrização** de teorias (no caso, da teoria das superfícies de Riemann).

Nesse mesmo ano de 1882, von Dyck apresentou uma definição abstrata de grupo, que abrangia tanto o caso finito (já discutido por Cayley) quanto o caso infinito. Consoante ele mesmo se expressara:

> "O escopo das investigações seguintes consiste em continuar o estudo das propriedades de um grupo em sua formulação abstrata. Especialmente, serão aduzidos o quesito do âmbito dessa formulação (isto é, da presença dessas propriedades em todas as reificações do conceito de grupo) e o quesito de que essas propriedades traduzam o conteúdo essencial do conceito de grupo." [*Apud* KLEINER 1986:210]

Nesse escrito, von Dyck também apresentou a noção de grupo quociente, embora ainda como grupo de permutações. [KIERNAN 1971:133]

A atmosfera cultural já era propícia a apresentações axiomáticas e Heinrich Weber apresentou sua formulação dos *Fundamentos gerais da teoria das equações de Galois* [*Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie*, 1893], de uma perspectiva inovadora:

> "Tentarei apresentar a teoria de Galois das equações algébricas, de um modo igualmente adequado a todos os casos aos quais ela se aplica. Apresentá-la-ei, pois, como consequência direta do conceito de grupo, iluminado pelo conceito de corpo, como estrutura formal completamente independente de qualquer interpretação numérica dos elementos usados. Assim, esta apresentação será independente até

mesmo do teorema fundamental da álgebra acerca da existência de raízes. Sob essa interpretação, a teoria aparecerá como uma formalização completa, que somente obterá significado e existência, mediante a substituição dos elementos por interpretação numérica. Desse modo, esse método de procedimento será aplicável a todos os casos concebíveis nos quais vigorem as hipóteses, desde a teoria das funções, de um lado, até a teoria dos números, pelo outro." [*Apud* KIERNAN 1971:136]

Nesse artigo, Weber apresentou uma formulação axiomática na noção de corpo, a qual se aproxima da que hoje aceitamos.

Nesse ínterim, surgiram ainda dois exemplos, talvez inesperados, de corpos: Por um lado, os corpos de séries formais, introduzidos por Giuseppe Veronese (em 1891) e, por outro lado, e os corpos *p*-ádicos de Kurt Hensel (em 1908). [BOURBAKI 1960:109]

O principal passo seguinte (hoje considerado definitivo) acerca da noção de corpo foi dado por Steinitz, na *Teoria algébrica dos corpos* [*Algebraische Theorie der Körpern*, 1910]. Declarou o autor que "foi o descobrimento desses dois últimos exemplos que o conduziu a libertar as noções abstratas comuns a todas essas teorias" [BOURBAKI 1960:109]. Segundo esse autor, essa obra de Steinitz "pode ser considerada como a geratriz da concepção vigente da álgebra". (20)

9.6 A instituição do método estrutural

"O aspecto comum das diversas noções designadas sob este nome genérico de estrutura reside em que elas se aplicam a conjuntos de elementos cuja natureza não é especificada. A fim de se definir um estrutura, propõem-se relações nas quais esses elementos estão presentes [...]; postula-se, em seguida, que essas relações dadas satisfaçam a certas condições (que são enumeradas) e que sejam os axiomas da estrutura vertente. Conduzir o estudo axiomático de uma dada estrutura consiste em deduzir as consequências lógicas dos axiomas da estrutura, *proibindo-se outra qualquer hipótese* sobre os elementos considerados (especialmente, sobre a sua 'natureza' própria). [...] Na realidade, essa definição de estruturas não é bastante geral para os requisitos da matemática. É necessário considerar os casos nos quais as relações que definem uma estrutura estão instituídas não entre os elementos do conjunto vertente mas entre partes desse conjunto ou mesmo, mais geralmente, entre elementos

> de conjuntos de *grau* ainda mais elevado no que se denomina a *escala dos tipos*." (21) [BOURBAKI 1962:40-41]

> "As estruturas de que trata a álgebra abstrata podem ser comparadas ao sorriso do gato de Cheshire, em *Alice no país das maravilhas*, que permanecia visível, mesmo depois que o gato se tinha esvaecido." (22) [Samuel Eilenberg, apud CARTER 2008:119]

Após os trabalhos de Dedekind e a celebrada *Teoria algébrica dos corpos* [*Algebraische Theorie der Körper*, 1910] de Steinitz, o método estrutural se foi tornando gradualmente aceito como método, tanto de pesquisa quanto de exposição, pela comunidade germânica.

PARSHALL [2004:274] sugere que o termo 'escola' seja usado para indicar uma comunidade que tenha um condutor dotado de alguma forma de carisma (ou de *magia*), o qual advogue uma ideia ou um tratamento fundamental para um conjunto de problemas que constitua o objeto primordial de pesquisa dessa comunidade. Além disso, esse condutor eduque os membros da comunidade a desenvolverem um tipo de sentimento de que o tratamento por eles adotado seja tanto válido quanto fecundo e, mediante esse processo educativo, os membros da comunidade saibam discernir entre as questões pertinentes e as irrelevantes, de tal modo que, quando se afastar, esse condutor seja substituído por outro pesquisador que partilhe de seus ideais, assegurando a permanência desse grêmio, sem que se perceba descontinuidade no seu comportamento.

Sem me deter na verificação de que o conjunto de pesquisadores, formado em torno de Karl Weierstrass, em Berlim (1860-1885), tenha constituído efetivamente uma escola, na acepção proposta por PARSHALL, afirmarei que um dos membros dessa escola foi responsável por um vigoroso afluente da adoção do método estrutural, afluente esse que se constituiu antes do advento da *Algebraische Theorie der Körper* (1910), de Steinitz.

De fato, tendo concluído o doutoramento em março de 1872, Wilhelm Killing continuou frequentando, por um breve interstício, o seminário matemático orientado por Weierstrass e, posteriormente, fortemente estimulado pelo mestre (consoante carta, de 4 de agosto de 1900, endereçada a Mittag-Leffler), iniciou a publicação de seus estudos geométricos. Nos dois ensaios iniciais (1878 e 1880), Killing tratou dos sistemas geométricos não-euclidianos de curvatura constante: a geometria de Nikolai Lobachevski, a geometria esférica de Bernhard Riemann e a geometria elíptica de Felix Klein e Simon Newcomb. A esses sistemas geométricos, os quais considerava compatíveis com a experiência física, Killing chamou *formas espaciais não-euclidianas* [*nicht-euklidische Raumformen*], a fim de distingui-los das *formas espaciais gerais*, que também seriam motivo de sua atenção. [HAWKINS 1980:299]

Nesse mesmo ano de 1880, em carta a Felix Klein, Killing informou haver demonstrado que "as formas espaciais, descritas no texto *Conceitos fundamentais* e *teoremas fundamentais da geometria* [*Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie*, 1880], poderiam ser

representadas por variedades contínuas, no sentido das pluralidades introduzidas por Riemann, isto é, por um sistema de n-uplas (x_1, ..., x_n) de números reais, cujos termos x_j variassem continuamente. Seria, pois, possível um tratamento analítico das formas espaciais gerais e Killing indicou já haver elaborado um amplo trabalho nesse ramo." (23) [HAWKINS 1980:303]

EPPLE [2003:937-938] apresenta uma reconstituição levemente distinta desse episódio.

De qualquer modo, Killing continuou a perquisição e publicou um trabalho, em quatro partes, intitulado *A composição dos grupos de transformação contínuos e finitos* [*Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen*, 1888, 1888, 1889, 1890], no qual instituiu os fundamentos conceituais da teoria estrutural das álgebras de Lie. Note-se que o vocábulo '*Zusammensetzung*' também pode ser vertido por '*estrutura*'. ('*Zusammensetzen*' significa '*dispor os elementos que integram uma unidade*'.) [WILHELM 1963:678; BROCKHAUS 1972:636]

A segunda parte dessa *opus* constituiu o paradigma de todos os esforços subsequentes de classificar as possíveis estruturas de qualquer objeto matemático. [COLEMAN 1989:37]

HAWKINS [1982:*passim*] documenta o fato de que essa memória de Killing constituiu a inspiração imediata da obra de Theodore Molien e de Élie Cartan, os quais contribuíram decisivamente a uma tradição no estudo dos aspectos estruturais dos sistemas hipercomplexos ou, mais precisamente, no estudo das álgebras. Uma outra tradição nasceu das pesquisas de William Hamilton (com quaterniões) e de Cayley (com matrizes). [PARSHALL 1985:226, 261]

Em 1907, Joseph Wedderburn retomou os resultados de Élie Cartan e os estendeu a um corpo de base qualquer, efetuando uma completa *algebrização* de um ramo de pesquisa, cuja tradição mais rica procedia de quesitos analíticos e geométricos (na obra de Sophus Lie). [BOURBAKI 1960:124, 126]

Cabe-me apontar que, no contexto da classificação de álgebras, o termo 'estrutura' tem uma conotação distinta do significado mais recentemente atribuído a esse termo e, mais frequentemente, é usado na locução 'teorema estrutural'. Com aquela conotação também é frequente falar-se do teorema estrutural dos grupos abelianos *finitos*, segundo o qual todo grupo abeliano finito pode ser descrito como o produto iterado de grupos cíclicos e que tal descrição é *essencialmente* única. [MAC LANE 1996:178]

Dois outros defluentes, que conduziram à constituição explícita do método estrutural, foram descritos no quinto exemplo do capítulo sétimo. Refiro-me à teoria das equações integrais (por Volterra, Fredholm, Hilbert e Schmidt). Desses estudos nasceu a noção de espaço de Hilbert, definida axiomaticamente por John von Neumann (1929). Após quatro décadas de pesquisas (desde o início dos estudos por Volterra), Neumann percebeu

claramente o aspecto estrutural do problema, resumido na definição axiomática dos espaços de Hilbert. [NACHBIN 1950:2; RUDIN 1973:373; BERNKOPF 1965:62]

Entrementes, constituiu-se em Göttingen, em torno de Emmy Noether (que desde 1922 lecionou na universidade na condição de *Honorarprofessor*) um núcleo que, na esteira de Steinitz, perseguia o estudo abstrato de estruturas algébricas, concentrando-se, inicialmente na teoria dos ideais.

Impende acentuar que a percepção nítida do conceito de estrutura somente ocorreu, depois que as pesquisas algébricas se conduziram de uma perspectiva abstrata, o que já aconteceu na obra de Steinitz e se tornou dominante, quando "Emmy Noether e seus discípulos viram claramente que muitos fenômenos algébricos podiam ser apreendidos mais efetivamente, se fossem descritos e provados abstratamente". (24) [MAC LANE 1986:120]

Fora provado por Emmanuel Lasker (em 1905) que todo ideal de polinômios é uma interseção de ideais primários. No artigo *Teoria dos ideais em domínios anulares* [*Idealtheorie in Ringbereichen*, 1921], Noether estendeu o teorema de Lasker a anéis comutativos arbitrários cujos ideais satisfizessem a uma condição de cadeia ascendente [*Teilerkettensatz*], isto é, à condição de que fosse estacionária toda cadeia ascendente de ideais. [van der WAERDEN 1975:35; ENDLER 1986:62]

Na data em que Noether publicou esse artigo, o conceito de anel não era ainda familiar à maior parte dos contemporâneos, o que a levou a provar, ao longo do ensaio, as propriedades mais elementares de anéis abstratos. E o seu aspecto estrutural ainda não havia sido acentuado, embora uma outra definição de anel já houvesse sido proposta, desde 1914, por Adolf Fraenkel (já referido no capítulo sétimo, no exemplo da teoria dos corpos valorados). Fraenkel conceituara os anéis como sistemas nos quais estão definidas duas operações abstratas, denominadas adição e multiplicação. A adição atende aos axiomas de grupo (não necessariamente abeliano) e a multiplicação goza de distributividade relativamente à adição e de associatividade. Supõe-se, além disso, a existência de elemento neutro da multiplicação. Finalmente, Fraenkel exigiu que os elementos regulares (isto é, que não são divisores de zero) fossem inversíveis e que a cada par de elementos x e z do anel correspondessem um elemento regular u e um elemento regular v tais, que $xz = uzx = zxv$. Note-se que a exigência de serem inversíveis todos os elementos regulares impede que, consoante essa definição, o domínio de integridade $\mathbb{Z}$ dos inteiros racionais seja um anel. [CORRY 2000:20-21, 25]

O aspecto estrutural da noção de anel adotada por Noether, na qual está integrado o conceito de ideal, foi adotada em três artigos de Wolfgang Krull, denominados *Teoria algébrica dos anéis* [*Algebraische Theorie der Ringe* I (1922), II (1923) e III (1924)]. Krull apontou que a limitação inerente à conceituação proposta por Fraenkel decorria da ausência dos ideais no tratamento dos anéis. [CORRY 2000:24-25]

Por ser muito fraca, a condição da cadeia ascendente é cumprida em qualquer domínio de polinômios sobre qualquer corpo e ainda em diversos outros casos. Se se impuserem ao anel condições mais fortes, poder-se-á provar que os ideais primários são

potências de ideais primos e que todo ideal é o produto de ideais primos. No artigo *Construção abstrata da teoria dos ideais em corpos de números algébricos e em corpos de funções* [*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, 1926], Noether formulou cinco axiomas que implicam ser todo ideal um produto de ideais primos. A anéis que satisfazem a esses cinco axiomas chamamos hoje *anéis* (ou *domínios*) de *Dedekind*, por neles ser válida a teoria dos ideais exposta por Dedekind nos corpos dos números algébricos. [van der WAERDEN 1975:35; ENDLER 1986:69]

Concomitantemente, em Hamburgo, trabalhavam com métodos semelhantes Emil Artin e Otto Schreier (já citados na seção sobre *a algebrização de teoremas*). Barten van der Waerden foi estudar em Göttingen (durante 1924) e em Hamburgo (em 1926). Como Artin houvesse prometido escrever um livro de álgebra para a *Gelbe Folge* da editora Springer, ficou acordado que van der Waerden fizesse anotações das lições e que, conjuntamente, escrevessem o livro. Van der Waerden efetuou as anotações e as mostrava a Artin, separadas em capítulos. Terminado o curso, Artin sugeriu que o livro foi escrito apenas por van der Waerden. [van der WAERDEN 1975:37-38]

Embora, no início do curso, Artin apresentasse as noções fundamentais (tais quais divisor normal, grupo quociente e ideal) e provasse teoremas (como o teorema do homomorfismo), o tema principal de suas lições foram a teoria dos corpos e a teoria de Galois. Van der Waerden aproveitou também as lições dadas por Emmy Noether sobre anéis, o já referido texto de Steinitz e outros ensaios editados recentemente e produziu o livro *Moderne Algebra*, cuja primeira edição foi publicada em 1930 e 1931 e que depois foi renomeado simplesmente como *Algebra*. [van der WAERDEN 1975:*passim*]

Essa *opus magna* contribuiu decisivamente para uma mudança radical na imagem da álgebra, imagem essa que gradualmente se irradiaria aos outros ramos da matemática. Ao falar de uma mudança na imagem da álgebra, estou indicando que, desde a publicação dessa obra, se criou um novo consenso acerca do objeto da álgebra, das questões abertas e dos métodos por serem adotados. (Lembro que, na seção sobre *a imagem do cálculo e da matemática*, do capítulo segundo, foi comentada a proposta por Yehuda Elkana de classificar em duas categorias as sentenças associadas a uma mesma disciplina científica, as sentenças pertinentes ao corpo da disciplina e as sentenças pertinentes à sua imagem.)

Ao enfatizar essa mudança na imagem da matemática, não pretendo que ela se tenha estabilizado. Pelo contrário, como advertem PASTOR *et alii* [1958:88], "enquanto para um geração de algebristas, a expressão 'álgebra moderna' significava o livro de van der Waerden [...] ou, quiçá, um ou dois posteriores, a álgebra evolveu profundamente, em parte por motivações de outros ramos da matemática que, como a topologia algébrica, mostram apetite insaciável por estruturas algébricas. Conceitos quase ignorados pela 'velha álgebra moderna', como a noção de produto tensorial de módulos, detém hoje importância central." (25)

Infelizmente, o *pogron* instituído, desde 1933, pelo governo da Alemanha provocou uma intensa diáspora no meio cultural germânico. Emmy Noether emigrou para os Estados

Unidos da América, onde morreria após dois anos (em 1935). E Emil Artin, cuja consorte era judia, se viu forçado a emigrar (em 1937). Também diversos outros matemáticos e físicos foram afastados da atividade acadêmica, sendo coagidos ao êxodo ou ao confinamento em campos de extermínio. Desse modo, se extinguiu o excelente clima intelectual que antes se havia consolidado em Göttingen e em Hamburgo.

Antes disso, segundo o testemunho de DIEUDONNÉ [1970:134-135], o grande conflito que acometera sobretudo a Europa (de 1914 a 1918) provocara intensa sangradura no magistério francês da matemática: "[...] No que diz respeito às ciências, os governos alemão e francês não pensavam do mesmo modo. O governo alemão punha seus eruditos em trabalho científico, a fim de elevar o potencial das forças armadas, por meio de descobrimentos e aperfeiçoamento de invenções ou de processos, o que, por sua vez, serviria para aumentar o poder bélico alemão. O governo francês, pelo menos no início da guerra e durante um ano ou dois, pensava que todos deveriam ir para a frente de batalha. Desse modo, os jovens cientistas, assim com os demais franceses, cumpriam o dever na linha de frente. Isso mostrava espírito democrático e patriótico, que nos cabe respeitar. Mas o resultado foi uma hecatombe formidável dos jovens cientistas franceses." (26)

Assim, enquanto, na terceira década do século XX, na Alemanha, se renovava o pensamento algébrico, na França, a pesquisa matemática se restringia à teoria das funções, no mesmo espírito que a praticaram notáveis geômetras nas duas primeiras décadas daquele século. Reconhecendo esse estado de coisas, reuniram-se em dezembro de 1934, cinco jovens docentes (Jean Delsarte, Henri Cartan, Jean Dieudonné, André Weil e Claude Chevalley), com o intuito inicial de redigirem um manual de análise que refletisse o estado contemporâneo da arte. Os catalisadores desse cometimento haviam sido André Weil e Henri Cartan, que, desde 1933, eram *maîtres de conférences* (cargo próximo do nosso cargo de *professor adjunto*) na Universidade de Estrasburgo e ministravam lições de cálculo diferencial e integral, segundo o clássico *Traité d'analyse*, de Edouard Goursat. [BOREL 1998:373-374; BOREL 2001B:109; DIEUDONNÉ 1970:136]

Os docentes citados previram que a tarefa seria concluída em três anos. Assegura DIEUDONNÉ [1970:136] que "os colaboradores de Bourbaki eram então muito jovens e que certamente nunca haveriam iniciado esse mister, fossem eles mais velhos e mais bem informados".(27)

Após diversas discusssões, classificaram o material básico nos seis *livros* seguintes, podendo cada um consistir em diversos volumes: teoria dos conjuntos, álgebra, topologia, funções de uma variável real, espaços vetoriais topológicos e integração. Foi escolhido o título *Élements de mathématique* (com o último vocábulo no singular, em vez da forma plural, comum na língua francesa), pretendendo, por um lado, acentuar a unidade da disciplina e aludindo, por outro lado, aos *Elementos* de Euclides de Alexandria. [BOREL 1998:374]

Pensaram em tomar como modelo inicial a *Algebra* de van der Waerden. Mas esse texto tratava apenas de álgebra e somente de uma parte dela. Além disso, a álgebra se tinha desenvolvido desde então, parcialmente como resultado do mesmo tratado composto por

van der Waerden. Quanto aos outros ramos, a tarefa seria bem mais árdua. A topologia geral, por exemplo, se encontrava em umas poucas memórias e em um livro por Fréchet que, na verdade, era uma compilação de um enorme acervo de proposições, distribuídas sem atender a nenhum critério racional de ordenamento. O mesmo ocorria com a análise funcional, cuja fonte principal era um livro escrito por Stephan Banach que, como registro de pesquisa, era admirável mas, como livro de texto, era completamente desordenado. [DIEUDONNÉ 1970:138]

"Aos poucos, ficando bem mais competentes e mais conscientes, [os colaboradores] perceberam a enormidade da tarefa que haviam assumido e compreenderam que não havia esperança de concluí-la tão rapidamente quanto haviam pensado." (28) [DIEUDONNÉ 1970:136]

Gradativamente, foi iniciada a publicação de fascículos, sob o "*nom de plume*" de Nicolas Bourbaki, que respondia coletivamente (isto é, sem declinar as contribuições individuais) pelos cinco escritores citados e por outros tantos que a eles se agregaram. Na sua composição, foi decidido que o texto "se concentraria em ideias matemáticas básicas e em pesquisa essencial". Impôs-se naturalmente o quesito da escolha desses teoremas fundamentais. Nesse ponto, ocorreu-lhes uma ideia nova, a ideia de **estrutura matemática**. O qualificativo 'nova' não pretende sugerir que a ideia de estrutura fosse original mas que era nova a ideia de compor *um tratado de análise* com base na noção de estrutura, consoante o modelo que van der Waerden e, antes dele, Steinitz adotaram nos seus respectivos tratados algébricos. (Em outros termos, Steinitz adotou a concepção estrutural no estudo dos corpos e van der Waerden estendeu essa concepção a toda a álgebra. Bourbaki inovou, ao recorrer à concepção estrutural, que se havia mostrado adequada em álgebra, para fundamentar a análise.) "O feito de Bourbaki foi definir e estender uma ideia que já estava disseminada há bastante tempo." (29) [DIEUDONNÉ 1970:138]

Havia, porém, um quesito que exigia solução e que já fora indicado por Hilbert, na famosa alocução de 1900.

> "Os problemas referidos são apenas exemplos de problemas; são, porém, suficientes para patentear quão diverso e quão extenso é o conhecimento matemático hodierno e somos forçados a nos indagar, se sucederá, um dia, à matemática o que, há muito tempo, ocorreu às outras ciências, a saber, que a matemática se fragmente em ciências parciais insuladas, cujos representantes mal se entendam e cuja concatenação se torne, por conseguinte, cada vez mais frouxa. Não acredito nisso nem desejo que isso aconteça. Na minha opinião, a ciência matemática é um todo indivisível, um organismo cuja vitalidade depende da concatenação de suas partes. Pois percebemos reunidas muito claramente, em toda a diversidade da matéria matemática, a identidade dos recursos lógicos, a afinidade na formação das ideias e as numerosas analogias em seus diversos ramos. Também notamos que, quanto mais vastamente se elabora uma teoria matemática, tanto mais harmônica e uniformemente ela configura a sua estrutura e se desvendam relações imprevistas entre ramos até então separados. Assim, a expansão da

matemática, em vez de destruir o seu caráter homogêneo, o tornará significativamente mais claro." (30)

Essa questão foi retomada por Nicolas Bourbaki, ao referir que "cada ano, a ciência matemática se enriquece com uma grande cópia de resultados novos, se diversifica e se ramifica constantemente em teorias incessantemente modificadas, refundidas, confrontadas e combinadas umas com as outras" (31) e ao perguntar "se essa proliferação exuberante é o desenvolvimento de um organismo construído vigorosamente e que, dia a dia, obtém dos acréscimos que recebe maior coesão e unidade; ou se, pelo contrário, essa proliferação é o indício exterior de uma tendência a um esmigalhamento cada vez mais acentuado, devido à própria natureza da matemática, e se ela não está prestes a se tornar uma torre de Babel de disciplinas autônomas, insuladas umas das outras, tanto por seus objetos quanto por seus métodos, e mesmo no idioma comum. Resumidamente, há hoje uma matemática ou diversas matemáticas? (32)

A ideia de BOURBAKI [1962:43] consiste exatamente substituir os compartimentos bem delimitados da Álgebra, da Análise, da Teoria dos Números e da Geometria por um acervo orgânico, no qual estão próximas, por um lado, a teoria dos números primos e as curvas algébricas e, por outro lado, a geometria euclidiana e as equações integrais; e em adotar como **princípio ordenador** de toda a matéria matemática **a concepção de uma hierarquia de estruturas**, que vai do simples ao complexo, do geral ao particular. (33)

Assim, a instituição desse princípio ordenador torna obsoleta a antiga classificação das disciplinas matemáticas, já que o critério de classificação já não dependeria do aspecto *ontológico* dos conceitos (como *reta*, *número* ou *função*) mas de seu aspecto *fenomenológico*, o qual se reflete nas propriedades estruturais desses conceitos. A adoção desse princípio ordenador foi responsável pelos títulos dos cinco capítulos iniciais dos *Éléments de mathématique*, de Bourbaki, já referidos.

Uma opinião semelhante foi emitida por Henri CARTAN [1942:11]:

"Não há muito tempo que os diversos ramos da matemática eram agrupados conforme os entes matemáticos (elementos explícitos) aos quais se referiam: aritmética, geometria, teoria das funções ... . Do mesmo modo, em zoologia ou em botânica, classificavam-se as espécies, outrora, consoante os sinais exteriores, fornecidos por uma descrição mais ou menos superficial. Hoje em dia, tendemos, cada vez mais, a estudar as estruturas *algébricas*, as estruturas *topológicas*, as estruturas de *conjuntos ordenados* etc.; em suma, o estudo de uma tal estrutura consiste a extrair as consequências de uma certa propriedade R(x), consequências que serão verdadeiras, em seguida, para todo elemento explícito *a* tal, que R(*a*) seja verdadeiro. Estudadas essas estruturas em si mesmas, estudam-se as *encruzilhadas de estruturas* (estudo simultâneo de diversas estruturas que satisfazem a condições de compatibilidade mútua). Por exemplo, os números reais estão no cruzamento de três estruturas: uma algébrica, outra topológica e a última de

conjunto ordenado. Esse princípio contemporâneo de classificação corresponderia, retomando nossa comparação zoológica, a uma classificação das espécies animais, conforme as leis de evolução." (34)

A mudança paulatina que sofreria o projeto original de redação dos *Elementos* seria capturada em um gracejo, no qual se sugeria que o subtítulo inicialmente escolhido para designar a sua primeira parte, *Estruturas fundamentais da análise*, fosse substituído pela locução *Análise fundamental das estruturas*. [BEAULIEU 1999:231]

Desse modo, o tratado, originalmente projetado com escopo didascálico, se converteu em uma tentativa de descrição sistemática das ideias básicas das diversas disciplinas matemáticas, unificadas organicamente pela noção de estrutura. E a ferramenta essencial a essa unificação orgânica mostrou ter natureza algébrica. Aliás, era essa a concepção de Claude Chevalley, claramente delineada no parágrafo inicial da prefação ao seu texto *Conceitos fundamentais da álgebra* [*Fundamental concepts of algebra*, 1956]:

> "A álgebra não é apenas uma parte da matemática. Ela desempenha na matemática o papel que a própria matemática desempenhou, por um longo período, na física. Que tem o algebrista por oferecer aos outros matemáticos? Às vezes, a solução de um problema específico; mas, geralmente, uma linguagem, em que se expressam os fatos matemáticos, e uma diversidade de padrões de raciocínio, postos em uma forma canônica. A álgebra não é um fim em si mesma. Ela tem de estar atenta às exigências externas procedentes das diversas partes da matemática. Esse estado de coisas é altamente benéfico à álgebra, pois uma ciência ou uma parte de uma ciência que existe em função apenas de seus próprios problemas corre sempre o risco de mergulhar em um sono leve e sereno, que preludia um morrer tranquilo. Porém, a fim de obter todo o benefício dessa situação, o algebrista deve exercer a sensibilidade e a habilidade de auferir ganhos do que ele percebe está ocorrendo no exterior de seu domínio. A matemática está mudando constantemente e a álgebra deve refletir essas mudanças, se quiser permanecer viva. Isso fornece o motivo de a álgebra ser uma das partes da matemática que muda mais rapidamente. Ela é sensível não apenas ao que ocorre em seu âmbito mas também às tendências dimanadas de todos os outros ramos da matemática." (35) [CHEVALLEY 1956:v]

Essa opinião acerca da preeminência da álgebra não foi inteiramente partilhada por Hermann WEYL [1932:454], que defendeu "existirem dois modos de entendimento que se mostraram, hoje em dia, especialmente penetrantes e fecundos. Esses dois modos são a topologia e a álgebra abstrata. Uma grande parte da matemática ostenta o sinal desses dois modos de pensar." (36) (Esse excerto foi extraído da versão, em língua inglesa, publicada em 1995, de uma alocução proferida por Weyl em 1931.)

Reproduzem-se, em seguida, o parágrafo inicial e o parágrafo final da resenha aos sete fascículos da *Algèbre* de Bourbaki, escrita por Emil ARTIN, a cujas lições Chevalley assistira em Hamburgo (1931-1932). [BENIS-SINACEUR 1987:12]

> "Nossa época está testemunhando a criação de uma obra monumental: uma exposição de toda a matemática hodierna. Além disso, essa exposição é feita de tal modo que o vínculo comum entre os diversos ramos da matemática se torna claramente visível, que o esquema o qual suporta toda a estrutura não é susceptível de se tornar obsoleto em um breve interstício e que esse esquema poderá facilmente absorver novas ideias. Bourbaki alcança esse escopo, tentando apresentar cada conceito com a maior generalidade e a maior abstração possíveis. [...] A apresentação é abstrata, **inclementemente abstrata**. Porém o leitor que puder sobrepujar as dificuldades iniciais será ricamente recompensado pelos esforços com percepção mais profunda e entendimento mais pleno." (37) [ARTIN 1953:474-479] (O realce gráfico foi atribuído por mim.)

Havia também nos primeiros escritos de Bourbaki certa uniformidade no estilo de redação. Ainda que atribua uma grande parte dos textos iniciais a Jean Dieudonné, Armand Borel afirma que o estilo de Bourbaki não era o estilo de Dieudonné mas o estilo que Dieudonné imprimira aos escritos de Bourbaki, talvez sob a influência de Claude Chevalley, cujo *modus scribendi* era tão austero que um de seus rascunhos, por ser "abstrato demais", fora rejeitado pelos outros colaboradores. [BOREL 1998:376]

A fim de se comprovar a diversidade de temperamentos entre os colaboradores iniciais de Bourbaki, é suficiente a leitura da resenha incompassiva, redigida por André Weil, da *Introdução à teoria das funções algébricas de uma variável* [*Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, 1951] escrita por Claude Chevalley, da qual resenha destaco apenas este excerto: "[...] parece que o autor, de algum modo, exagerou sua pretensão e foi muito tendencioso quanto ao método preferido por seu coração algébrico. [...] É quase com alívio que percebemos traços da fragilidade humana neste livro tão severamente desumanizado." (38)

Sem pretender instituir relação de causalidade histórica, termino esta seção, advertindo o vívido florescimento da produção matemática, na França, em torno de 1950, notadamente na topologia algébrica e na álgebra homológica, aproximadamente uma década depois do início da atividade de Bourbaki. Esse florescimento foi comparável ao enfloramento que medrara na Alemanha, sob a ação enzimática de Emmy Noether e Emil Artin.

Um dos frutos mais notáveis dessa efervescência de ideias foi Paris desempenhar, no interstício de 1959 a 1970, o papel de capital mundial da geometria algébrica. No curso desses anos, as diretrizes de pesquisa eram sugeridas por Alexandre Grothendieck, que integrou a segunda geração dos colaboradores de Bourbaki. Grothendieck seria um dos quatro recipientes da medalha Fields de 1966.

Mas essa "idade áurea" também teve um componente circunstancial. Um empresário francês, Léon Motchane, pretendeu criar, na França, um centro de pesquisa independente, semelhante ao *Institute for Advanced Study*, de Princeton, e convidou Dieudonné a integrar o seu quadro de docentes. Dieudonné apresentou a exigência de que o mesmo

convite fosse feito também a Grothendieck, ao que Motchane atendeu e, em março de 1959, ambos assumiram as funções no recentemente fundado IHÉS (*Institut des Hautes Études Scientifiques*). Nos primeiros anos, a principal atividade nesse instituto consistia na produção das '*publications mathématiques de l'IHÉS*', que foi inaugurada pelos volumes iniciais dos *Éléments de géométrie algébrique*, redigidos por Grothendieck em colaboração com Dieudonné, na qual a geometria algébrica foi estendida ao estudo de equações definidas sobre *anéis*. (Na verdade, a redação do primeiro volume já havia sido iniciada no outono de 1958.) [JACKSON 2004:1049-1050]

Talvez estudos futuros estabeleçam um paralelo significativo entre a colaboração de Dieudonné com Grothendieck, na redação dos *Éléments de géométrie algébrique*, e a colaboração de Friedrich Engel com Sophus Lie, na redação da *Theorie der Transformationsgruppen* (1888-1893). (Também se poderá encetar o confronto com a edição, por Richard Dedekind, da obra de Lejeune Dirichlet.)

9.7 A formação de uma nova imagem da matemática

> "Os momentos importantes e solenes, no desenvolvimento da matemática recente, são aqueles em que dois domínios, que eram até então cultivados por si mesmos e que pareciam destinados a uma limitação definitiva, de repente, entram em contacto e se prestam um auxílio inesperado." (39) [BRUNSCHVICG 1972:446]

> "O escopo essencial da axiomática consiste precisamente naquilo que o formalismo lógico, por si só, é incapaz de fornecer, a inteligibilidade profunda da matemática. Assim como o método experimental se apoia sobre a crença *a priori* na permanência das leis naturais, o método axiomático encontra seu ponto de apoio na convicção de que, se a matemática não é apenas um encadeamento de silogismos formados aleatoriamente, com tanto mais razão ela não é um coleção de artifícios mais ou menos *astuciosos*, resultante de apropinquações fortuitas nas quais triunfa a pura habilidade técnica. Nos locais em que o observador superficial vê apenas teorias aparentemente distintas, prestando-se *auxílio inesperado* (BRUNSCHVICG), pela mediação de um matemático genial, o método axiomático ensina a buscar as razões profundas desse descobrimento, a encontrar as ideias comuns escondidas sob o aparelho exterior das minúcias

próprias de cada uma das teorias consideradas, a desenovelar essas ideias e a as expor à luz. (40) [BOURBAKI 1962:37-38]

Para melhor exprimir-me, lembrarei a concepção, por Thomas Kuhn, da ideia de matriz disciplinar. Escreveu ele [1970:182] que:

> "Tendo insulado uma certa comunidade de especialistas por técnicas semelhantes às discutidas, podemos indagar oportunamente acerca do que os seus membros partilham que explique a integridade relativa de sua comunicação profissional e a relativa unanimidade de seus julgamentos profissionais. [...] Para essa finalidade, sugiro 'matriz disciplinar': 'disciplinar', porque refere a possessão comum pelos praticantes de uma disciplina particular; 'matriz', porque é composta de elementos ordenados de vários tipos, cada um dos quais requer especificação ulterior." (41)

Em seguida, Kuhn especifica quatro termos das matrizes disciplinares:

- *as generalizações simbólicas*, expressões como f = ma, que são tanto legislativas quanto definidoras (*ibidem*, p. 182-183);
- *as crenças em modelos particulares*, como a crença de que o calor é a energia cinética das partes constituintes do corpo (*ibidem*, p. 184);
- *os valores* acerca das qualidades das teorias, de predições, de apresentação de matérias científicas etc. (*ibidem*, p. 184-186);
- *os modelos ou os paradigmas*, que são soluções de problemas concretos que mostram como se deve efetuar a tarefa (*ibidem*, p. 187-191).

Creio poder afirmar-se que a locução '*matrizes disciplinares*' de Kuhn designa o mesmo aspecto do conhecimento denotado pelo termo '*imagens*', consoante a caracterização dos conhecimentos científicos como sistemas culturais, proposta por Yehuda Elkana (comentada na seção 'as imagens do cálculo e de matemática', do capítulo segundo).

No caso vertente da matemática, as matrizes disciplinares e as imagens de um conhecimento nutrem-se de **crenças *metafísicas* acerca dos objetos e das teorias** (como a crença professada por Platão de que a matéria fosse composta de quatro dentre os cinco poliedros convexos regulares; ou a crença, vigente durante séculos, de que o sistema geométrico euclidiano fosse o modelo de uma teoria científica), dos **valores compartilhados** (como a indispensabilidade da prova dos teoremas), dos **paradigmas** (como certos textos que, durante um longo interstício, constituem modelos, a exemplo das *Disquisições aritméticas*, de Gauss; ou como certos problemas considerados canônicos, a exemplo da classificação dos grupos simples finitos). Além disso, as matrizes disciplinares e as imagens do conhecimento operam como **seletores de problemas para o corpo do conhecimento**, pois orientam os pesquisadores na escolha dos problemas abertos que irão enfrentar e no reconhecimento de conjecturas interessantes (como a conjectura de Henri

Poincaré, de que toda variedade, de dimensão três, simples, conexa e fechada fosse homeomorfa à esfera S^3).

Defende CORRY [1997A:277] que Bourbaki compôs uma imagem da matemática: "Van der Waerden jamais ofereceu uma explicação explícita, nem formal nem informal, do que se deva entender por 'estrutura algébrica' ou por 'perquisição estrutural em álgebra'; ele mostrou o que isso é, simplesmente fazendo-o. Bourbaki, por outro lado, não somente tentou, em diversas ocasiões, explicar a essência do abordamento estrutural e o motivo de ele ser tão novo e importante para a matemática, como também formulou sua expectativa do que fosse uma teoria matemática elaborada, a teoria das *estruturas*, destinada a suportar e a endossar suas explicações, por meio de uma teoria matemática, supostamente unificadora. Na verdade, Bourbaki descreveu seu sistema completo de imagens da matemática." (42)

Na composição dessa imagem da matemática, BOURBAKI lhe acentuou o caráter metafísico, ao comparar a convicção na justeza do emprego do método axiomático com "a crença *a priori* na permanência das leis naturais" (consoante o excerto que serve de epígrafe à presente seção, extraído de *L'architecture des mathématiques*).

Nesse ensaio, BOURBAKI [1962:35] sustenta que "é no interior da matemática que devemos permanecer", a fim de mostrarmos que a matemática seja "uma ciência caracterizada por um objeto e um método únicos". (43)

Essa nova imagem da matemática é a reação oportuna à temporânea desilusão, provocada pelo "colapso, mais ou menos aparente, dos diversos sistemas [...] que quase implicaram na renúncia a enxergar-se na matemática uma ciência caracterizada por um objeto e um único método". (44) [BOURBAKI 1962:35]

Os dois elementos que integram essa imagem da matemática são: (a) A unidade essencial dessa ciência, evidenciada mediante o método axiomático. (b) O asserto de que o objeto da matemática sejam as estruturas ou, dito de outro modo, que a substância matemática se caracterize por estruturas, ordenadas consoante uma hierarquia, que vai do simples ao complexo, do geral ao particular.

Segundo BOURBAKI [1962:37], "hoje em dia, pelo contrário, cremos que a evolução interna da ciência matemática, a despeito das aparências, estreitou a unidade de suas diversas partes, como nunca o fizera, e criou um tipo de núcleo central mais coerente que sempre o fora. O essencial dessa evolução consistiu em uma sistematização das relações vigentes entre as doversas teproas matemáticas e se resume em uma tendência que é conhecida, geralmente, sob o nome de *método axiomático*." (45)

Em seguida, BOURBAKI [1962:41] esclarece que "conduzir o estudo axiomático de uma dada estrutura consiste em deduzir as consequências lógicas dos axiomas dessa estrutura, proibindo-se qualquer outra hipótese sobre os elementos considerados (em particular, qualquer hipótese sobre sua *natureza* própria)". (46)

BOURBAKI [1962:41, 43] distingue três tipos de estruturas genetrizes. **As estruturas algébricas**, as quais são caracterizadas por leis de composição, que associam a um par de elementos um terceiro elemento. **As estruturas de ordem**, as quais consistem em relações entre dois elementos de um mesmo conjunto que atendem a certos requisitos. Finalmente, **a estrutura topológica** é caracterizada por propriedades *não dos elementos mas das classes de elementos*. (Cf. o terceiro exemplo do capítulo sétimo.)

BOURBAKI [1962:43-44] distingue, além disso, entre as estruturas genetrizes, nas quais predomina grande diversidade, e as estruturas que se obtêm impondo-se axiomas suplementares. Assim, subordinam-se à teoria geral dos grupos tanto a teoria dos grupos *finitos*, quanto a teoria dos grupos *abelianos* e, também, a teoria dos grupos finitos e abelianos. Aponta ainda BOURBAKI [*ibidem*] as estruturas múltiplas, nas quais comparecem, simultaneamente, duas ou mais estruturas genetrizes, não apenas justapostas (o que não traria novidade alguma) mas organicamente combinadas (através de axiomas que as vinculem). Como exemplo, citam-se a **álgebra topológica**, que estuda as estruturas algébricas nas quais as leis de composição são funções contínuas, e a **topologia algébrica**, que estuda conjuntos definidos por propriedades topológicas, que são submetidos a leis de composição.

BOURBAKI [1962:44-45] acentua que essa descrição da substância matemática é *esquemática*, *idealizada* e *cristalizada*.

É esquemática (melhor diria, *é superficial*), pois existem outros fenômenos que não foram contemplados nessa exposição. Por exemplo, pode uma teoria particular, como a teoria dos números reais, prestar ajuda indispensável à edificação de uma teoria geral, como a topologia.

É idealizada, porque nem toda teoria admite uma delimitação adequada de todas as estruturas envolvidas. Por exemplo, na teoria dos números há diversos teoremas que ainda não foram classificados como propriedades estruturais.

É cristalizada, por contrariar o dinamismo evolutivo da matemática. De fato, "as estruturas não são imutáveis nem quanto ao número de tipos nem quanto à essência. É perfeitamente possível que a maturação ulterior da matemática aumente o número das estruturas fundamentais, revelando a fecundidade de novos axiomas ou de novas combinações de axiomas. Podemos também jubilar antecipadamente com progressos decisivos dessas *invenções* de estruturas, se nos espelharmos nos avanços trazidos pelas estruturas conhecidas hoje em dia. Por outro lado, essas últimas não são, absolutamente, edifícios acabados e seria surpreendente que todo o suco de seus princípios estivesse desde agora exaurido." (47) [BOURBAKI 1962:45]

Não se pretende que seja definitiva a imagem da matemática descrita por Bourbaki, pois a sua inexorável dinâmica evolutiva poderá exigir reformulação. Com efeito, a unidade e a diversidade da matemática se podem representar, segundo a descrição metafórica por BOURBAKI [1962:45], como "uma grande cidade, cujos subúrbios não cessam de crescer, de um modo um tanto caótico, sobre o terreno circundante, enquanto o centro se reconstrói periodicamente, cada vez segundo um plano mais claro e um ordenamento mais

majestoso, derrubando os bairros antigos e seus dédalos de vielas, para construir alamedas, mais largas e mais cômodas, que conduzem à periferia". (48)

Apenas com o intuito de apontar que a ênfase em aspectos estruturais não foi um fenômeno histórico restrito ao meio cultural matemático, consigno o estudo por David AUBIN [1997], que sugeriu a noção de *conector cultural*, a fim descrever a emergência e o declínio concomitantes da ferramenta estrutural, tanto na cultura matemática, quanto nas culturas etnográfica e literária francesas. Entre os fatos citados por AUBIN encontram-se a redação, por André Weil (fundador e colaborador de Bourbaki), de um apêndice às *Estruturas elementares do parentesco* [*Structures élémentaires de la parenté*, 1948], de Claude Lévi-Strauss; e a fundação de um influente grupo literário, o *Oulipo*, por Raymond Queneau e François Le Lionnais, em 1960. Le Lionnais fora o editor do livro no qual apareceu, pela primeira vez, o ensaio *A arquitetura da matemática* [*L'architecture des mathématiques*, 1948], de Bourbaki; e Queneau, que também contribuiu para esse livro com o ensaio *O lugar da matemática na classificação das ciências* [*La place des mathématiques dans la classification des sciences*], era um conhecido escritor, autor do romance *Zazie dans le métro* (1959). Segundo AUBIN [1997:299-300], conectores culturais são referências, mais ou menos explícitas, que permitem aos autores conectar esferas culturais distintas, a fim de reforçar o significado de seu próprio trabalho. Os conectores culturais, atuando em diversos níveis, tornam mais eficazes os fluxos de conjuntos de significados e de práticas entre as diversas esferas da cultura.

Na perspectiva da expansão das ideias estruturais, tampouco se podem omitir os estudos de epistemologia genética, conduzidos em torno de Jean Piaget, em Genebra. [Cf., por exemplo, BETH & PIAGET 1961:176-204]

9.8 As categorias e os seus morfismos

> "Ninguém deve poder expulsar-nos do paraíso que Cantor criou para nós." (49) [HILBERT 1926:170]

> A teoria das categorias e os seus functores "pode ser considerada uma abstração *em segundo grau*, em que desaparecem os conjuntos dotados de estruturas e as aplicações entre esses conjuntos ou, antes, são *sublimados* em *objetos* e *flechas* desprovidos de qualquer conexão com as noções usuais de coleção e de lei." [DIEUDONNÉ 1990:167]

Nicolas Bourbaki fora clarividente ao pronunciar-se sobre a fugacidade da descrição feita na seção anterior. De fato, o texto acima fora escrito em 1948. A data que indiquei nas citações é a que figura no frontispício de sua segunda edição (na qual *não* foi consignada a data da primeira). Foi publicada, em 1950 (em *The American Mathematical*

Monthly, vol. 57, n. 4), uma versão em língua inglesa do ensaio de Bourbaki (*The architecture of mathematics*). (CORRY [1997A:272] atribui a Jean Dieudonné a escrita do artigo.)

Na época em que o artigo fora escrito, era habitual admitir-se tacitamente que, aceitos alguns princípios lógicos e uma teoria formalizada dos conjuntos (do tipo Zermelo-Fraenkel, com o axioma da escolha), se poderia construir toda a matemática.

Mas se retardou muito a escrita dos fascículos previstos pelo plano inicial dos colaboradores de Bourbaki e esse atraso pode ser imputado, em grande parte, ao modo de trabalho adotado. Esse modo de trabalho é descrito por DIEUDONNÉ [1970:141-142]:

> "O método de trabalho adotado por Bourbaki em terrivelmente longo e penoso mas é quase que imposto pelo próprio projeto. Em nossos encontros, que ocorrem duas ou três vezes por ano, assim que houvermos acordado na necessidade de se redigir um livro ou um capítulo acerca desse ou daquele tema (geralmente, prevendo o número de capítulos para um livro), a tarefa de redigir um rascunho é atribuída um dos colaboradores que deseje fazê-lo. Assim, ele escreve um versão do capítulo ou do livro proposto, consoante um plano assaz vago. Nessa fase, geralmente, o redator tem a liberdade de inserir ou de excluir o que quiser, por sua própria conta, como veremos. Após dois ou três anos, concluída a tarefa, é trazida perante o Congresso de Bourbaki, onde é criticado, por ponto, impiedosamente. É preciso assistir a um Congresso de Bourbaki, para se ter uma ideia da virulência da crítica e se compreender que ela suplanta, em muito, qualquer agressão externa. [...] Depois que a primeira versão é rasgada em pedaços — reduzida a nada — escolhe-se um segundo colaborador, para recomeçar o procedimento. Esse pobre coitado sabe o que acontecerá, porque, ainda que ele inicie consoante as novas instruções, entrementes, mudarão as ideias do Congresso e, no próximo ano, *sua* versão também será rasgada em pedaços. Um terceiro membro reiniciará e assim o procedimento continuará. Podemos pensar que seja um procedimento inacabável, porém, de fato, será interrompido somente por razões humanas. Após vermos o mesmo capitulo retornar seis, sete, oito ou dez vezes, todos estarão tão indispostos que haverá um voto unânime de que ela siga para a editora. [...] É necessária uma média de oito a doze anos, contados desde o primeiro instante em que se inicia um capítulo até que ele apareça nas livrarias. Os capítulos que agora estão sendo editados foram discutidos, pela primeira vez, em torno de 1955." (50)

Encontra-se em CORRY [1992-318] uma descrição semelhante desse *modus operandi*, a qual considero confiável, por CORRY haver tido acesso a documentos fidedignos, as minutas dos encontros, que circulavam entre os membros na forma de um boletim interno denominado *La Tribu*. CORRY [1992-343] refere explicitamente ter consultado coleções privadas de Charles Ehresmann, de Claude Chevalley e de Szolem Mandelbrojt.

É possível que a redação repetida de cada texto decorresse de um princípio adotado por Bourbaki, citado por BOREL [1998:376] como uma de suas divisas: a censura do especialista pelo não especialista.

Redigido por um especialista no ramo vertente, cada texto seria, em seguida, submetido à crítica pelos demais colaboradores, que admitiriam a generalidade no tratamento do tema, apenas quando a generalidade lhes conferisse maior eficiência. Desse modo, seriam excluídas, por exemplo, extensões de teoremas que apenas excitassem a imaginação dos especialistas, sem aparentemente aumentar substancialmente o domínio de aplicações. [BOREL 1998:376]

Enfim, sejam quais forem os motivos, ocorria pronunciada demora entre a concepção inicial dos capítulos dos *Éléments de mathématique* e a sua efetiva publicação. Em princípio, esse procedimento não seria inconveniente, pois "os temas que Bourbaki pretendia explicar eram teorias matemáticas que já estavam quase completamente exauridas, pelo menos quanto às fundações". (51) [DIEUDONNÉ 1970:141]

Assim, mal havia começado a edição dos fascículos dos *Éléments de mathématique* (o fascículo de resultados da teoria dos conjuntos apareceu em 1939 e os quatro capítulos da *Teoria dos conjuntos* somente viriam a lume entre 1954 e 1957), se percebeu a necessidade de se refundirem alguns textos já escritos, se se quisessem incluir as noções de categoria e de functor, introduzidas por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane, em 1945.

O termo 'categoria' foi escolhido, para designar conjuntos de objetos dotados de uma mesma estrutura, devendo acrescentar-se-lhes compulsoriamente os morfismos entre duas quaisquer dessas categorias. [DIEUDONNÉ 1989:97]

Mais precisamente, uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em objetos A, B, C ... e em flechas f, g, h ... . A cada flecha f estão associados dois objetos , o seu domínio, A, e o seu codomínio, B. Escreve-se $f: A \rightarrow B$.

Se o domínio da flecha $g: B \rightarrow C$ for o codomínio da flecha f, então se define a flecha composta $(g.f):A \rightarrow C$. As flechas compostas estão sujeitas à condição de que, se $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$, então $h.(g.f) = (h.g).f$ (associatividade).

Além disso, a cada objeto A está associada a flecha identidade $1_A: A \rightarrow A$. Dada a flecha $f: A \rightarrow B$, as flechas identidades atenderão às condições $f.1_A = f = 1_B.f$. [Cf. MAC LANE 1986:386]

Essa exposição, feita quatro décadas depois da publicação do artigo original [EILENBERG & MAC LANE 1945], está levemente simplificada. Curiosamente, no artigo original, não se usa o termo 'flecha' [arrow] porém o vocábulo 'aplicação' [mapping].

Comenta MAC LANE [1986:386] que essa descrição pode ser feita no contexto de uma teoria dos conjuntos. Nesse caso, uma categoria é considerada como um conjunto de objetos e um conjunto de flechas que satisfazem às condições impostas. Por outro lado, essas condições podem ser consideradas como axiomas autônomos, em uma linguagem de primeira ordem com dois símbolos não lógicos: os objetos e as flechas.

Esclarece todavia MAC LANE [1986:387] que tais modelos "não existem legalmente no âmbito de uma teoria dos conjuntos do tipo ZFC, porque as coleções de todos os objetos e de todas as flechas vertentes não são conjuntos porém 'classes', como a classe de todos os conjuntos ou a classe de todos os ordinais". (52) Em outros termos, o sistema conjuntual de Zermelo-Fraenkel, "que é suficiente para a matemática tradicional, cujo objetivo é o estudo das estruturas *à la* Bourbaki ou em outra versão conjuntista, não se mostra apropriado como fundamento das categorias". [DA COSTA 1999:82]

Entre os modelos de categorias citam-se:

- Grupos e seus homomorfismos.
- Espaços vetoriais e transformações lineares (que são seus isomorfismos).
- Espaços dotados de produto interno e transformações ortogonais.
- Espaços topológicos e funções contínuas.
- Variedades diferenciáveis e funções suaves.

No artigo original, para motivar a definição dos novos conceitos, Eilenberg e Mac Lane consideraram o vínculo entre um espaço vetorial V de dimensão finita, sobre o corpo R dos números reais, e o seu dual (ou conjugado), que eles denotaram por por T(V). De fato, sejam V_1 e V_2 dois espaços vetoriais desse tipo e L uma transformação linear L: $\mathsf{V}_1 \rightarrow \mathsf{V}_2$. Essa transformação induz uma transformação T(L):T(V_2) $\rightarrow$ T(V_1), definida do modo seguinte: A cada forma linear f: $\mathsf{V}_2 \rightarrow \mathsf{R}$ corresponde uma forma linear T(f): $\mathsf{V}_1 \rightarrow \mathsf{R}$, definida por T(f)(x) = (fL)(x), $\forall x \in \mathsf{V}_1$. Além disso, se considerarmos as transformações lineares L_1: $\mathsf{V}_1 \rightarrow \mathsf{V}_2$ e L_2: $\mathsf{V}_2 \rightarrow \mathsf{V}_3$, obteremos que $T(L_2.L_1) = T(L_1).T(L_2)$. "Assim, o procedimento de formar o espaço conjugado envolve, na verdade, duas operações distintas de funções. A primeira operação associa com cada espaço V o seu conjugado T(V); a segunda operação associa a cada transformação linear L entre espaços vetoriais a transformação linear induzida T(L)." (53) [EILENBERG & MAC LANE 1945:232]

Acrescentaram os autores (p. 233) que esses dois aspectos associados à correspondência entre um espaço vetorial e o seu dual são as duas partes componentes do que se chama **o functor T**. E que, como o procedimento de passar ao espaço dual pode ser iterado, haverá um functor composto associado à transição do espaço V ao espaço T(T(V)).

Além disso, no caso da transição de um espaço V ao espaço T(V), esse functor T é **contravariante**, enquanto no caso da transição do espaço V ao espaço T(T(V)), o correspondente functor composto será **covariante**. [EILENBERG & MAC LANE 1945:233]

Após aprofundarem a discussão desse exemplo, os autores afirmaram que "tal consideração dos espaços vetoriais e de suas transformações lineares é apenas um caso dentre muitas situações matemáticas semelhantes; por exemplo, podemos tratar de grupos e de seus homomorfismos, de espaços topológicos e de suas aplicações contínuas [...]. A fim de tratar dessas situações de um modo geral, introduzimos o conceito de *categoria*. Assim, uma categoria $\mathcal{C}$ consistirá em elementos abstratos de dois tipos: os objetos A (por exemplo, espaços vetoriais e grupos) e as aplicações α (por exemplo, transformações lineares e homomorfismos). Para alguns pares de aplicações na categoria está definido um produto (nos exemplos, o produto é a composição usual de duas transformações). Algumas dessas transformações atuam como identidades com respeito ao produto e existe uma correspondência biunívoca entre os objetos da categoria e essas identidades. A formulação do conceito de categoria consiste em certos axiomas simples, expostos de tal modo que incluam todos os exemplos do tipo descrito acima." (54) [EILENBERG & MAC LANE 1945:234]

Baseado em consulta aos fascículos de *La Tribu* referentes à sexta década do século passado, Leo CORRY informa que os colaboradores de Bourbaki consideraram, algumas vezes, a redação de capítulos relativos à teoria das categorias e a seus functores. O próprio Eilenberg fora, diversas vezes, comissionado para redigir rascunhos sobre esse tema e a preparação do fascículo de resultados sobre categorias e functores fora atribuída, sucessivamente a Grothendieck e a Pierre Cartier. Contudo, esse capítulo nunca foi publicado. [CORRY 1992:331-332]

CORRY [1992-332] defende que a publicação do capítulo sobre categorias "se teria mostrado um tanto problemática, quando fosse confrontada com a insistência de Bourbaki na centralidade do conceito de *estrutura*. A tarefa de fundir, de modo sensível, ambos os conceitos, quais sejam, categorias e estruturas, haveria sido árdua e pouco elucidativa e a adoção de ideias próprias da teoria das categorias teria exigido provavelmente a reescrita de diversos capítulos do tratado. Essa afirmativa é corroborada, além disso, pelo fato interessante de que, quando finalmente foi publicado o capítulo acerca da álgebra homológica (1980), não se adotou o tratamento de categorias. Ainda que, desde a publicação do livro de Cartan e Eilenberg [*Homological algebra*, 1956], o amplo arcabouço fornecido pelas categorias se houvesse tornado o esquema canônico para se tratarem conceitos homológicos, esses conceitos, na apresentação própria de Bourbaki, foram definidos no âmbito do esquema mais estreito dos módulos." (55)

Não tendo acesso aos fascículos de *La Tribu*, não disponho de uma argumentação fundamentada para contestar a opinião de Leo CORRY de que os colaboradores de Bourbaki houvessem enxergado incompatibilidade entre a imagem estrutural da matemática, propugnada por Bourbaki, e o enfoque functorial, adotado por Eilenberg e Mac Lane. Certamente que a incorporação da teoria das categorias exigiria a reescrita de diversos capítulos (como afirma Corry e como, provavelmente, reconheceram os colaboradores de Bourbaki). Essa também é a opinião de MAINARD [2001:173]:

"Não obstante o interesse manifesto pela linguagem das categorias e dos functores por parte dos membros de Bourbaki, como Eilenberg, evidentemente, mas também por Ehresmann ou, ainda, por Grothendieck, o grupo não revisou sua '*Arquitetura da Matemática*' nem conseguiu integrar as categorias no texto, a despeito de diversas discussões entre os diferentes membros do grupo, naquela época. A razão essencial foi, sem dúvida, que a introdução das categorias teria exigido uma revisão profunda dos volumes do tratado, já aparecidos. Cartier reconheceu, ulteriormente, que, se os colaboradores de Bourbaki fossem levados a recompor o tratado, muito certamente teriam começado pela introdução das categorias." (56)

Também assim se pronunciou DA COSTA [1999:82]:

"A teoria das categorias, frisemos, impôs-se em matemática para sistematizar e simplificar domínios como a geometria algébrica e a álgebra homológica. Eliminá-la de partes da matemática, onde ela encontra aplicação óbvia, torna tudo mais complexo e artificial. Bourbaki procurou, em seus *Élements*, suprimir as categorias da álgebra homológica, sem convencer (cf. Bourbaki, *Homological algebra*, 1980). Talvez o principal motivo, consciente ou inconsciente, pelo qual ele assim procedeu se deva à circunstância de que o tratamento das categorias e dos funtores, como novos objetos, o obrigaria a modificar sua teoria dos conjuntos e adaptar a definição de espécie de estruturas ao ponto de vista funtorial."

Não vejo, porém, dificuldade em conciliar-se o tratamento estrutural com o tratamento functorial. Aliás, a incompatibilidade de que fala Corry, tampouco a enxergaram Garrett Birkhoff e Saunders Mac Lane. Autores de um *Panorama da álgebra abstrata* [*A survey of modern algebra*, 1941], cuja primeira edição foi quase contemporânea com os *Fascículos de Resultados* da Teoria dos Conjuntos, de Bourbaki (1939) e, portanto, somente uma década mais nova que a *Moderne Algebra* de van der Waerden, Birkhoff e Mac Lane não se furtaram a proceder à reescrita do livro ou, melhor, à escrita de um outro livro, *Algebra* (1967), publicado dois anos após a terceira edição do *Survey*, sob a motivação seguinte, declinada no primeiro parágrafo da prefação:

"Os anos recentes assistiram a um desenvolvimento notável na organização conceitual da matemática. Esses desenvolvimentos usam certos conceitos novos, como 'módulo', 'categoria' e 'morfismo', que ostentam caráter algébrico e que, na verdade, podem ser introduzidos naturalmente, com base em tópicos elementares. A eficiência dessas ideias sugere uma nova apresentação da álgebra." (57)

Nesse novo livro, os autores introduziram, desde os capítulos iniciais, a noção de functor, embora somente o penúltimo capítulo seja dedicado precipuamente às *Categorias e aos functores adjuntos* [*Categories and adjoint functors*]. Nele trataram de grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais (que já eram estudados na primeira edição do *Survey*, publicado antes do surgimento da teoria das categorias) e, ainda, de módulos, reticulados e álgebras

multilineares, mostrando que a concepção estrutural e a concepção functorial são compatíveis.

Mais recentemente, MACLANE [1996:180] se pronunciou inequivocamente a respeito do vínculo entre essas duas concepções, ensinando que

> "a noção dos distintos tipos de estrutura matemática fornece, realmente, um meio efetivo de se organizar e de se entender a matemática. Por exemplo, estruturas conduzem a *morfismos*; a cada tipo T de estrutura corresponde a noção consequente de homomorfismo — abreviadamente, um morfismo — de um modelo dessa estrutura para outro modelo. Emmy Noether enfatizara a importância da noção de homomorfismo $j:G \rightarrow H$ de um grupo G em um grupo H (nos casos que ela considerava, sempre *sobre* o grupo H). Trata-se de uma função f que associa a cada elemento x de G um elemento imagem f(x) em H, de tal modo que, sempre será $f(x.y) = f(x).f(y)$. Em outros termos, a *estrutura* dada pela multiplicação no grupo é preservada: produtos são convertidos em produtos (e, consequentemente, inversos são convertidos em inversos)." (58)

E, mais adiante [MACLANE 1996:181]:

> "Bourbaki e muitos outros sempre consideraram um quesito central pertinente a toda invenção matemática: 'Quais são os seus morfismos?' Estruturas conduzem inexoravelmente a morfismos, para Bourbaki e para qualquer pessoa.
>
> Por exemplo, quando espaços vetoriais são definidos axiomaticamente, torna-se inevitável perguntar pelos morfismos $V \rightarrow W$ de tais espaços. São exatamente as transformações lineares (as funções de V em W que preservam a adição vetorial e a multiplicação de escalares por vetores). A transformação dada poderá, então, ser representada (relativamente a bases nos espaços V e W) por matrizes. Foi essa observação que elucidou fortemente o antigo cálculo com matrizes, pobremente motivado. Essa é uma boa ilustração do sentido em que ideias sobre estrutura esclarecem a compreensão. Assim, em matemática, existe uma noção comum e efetiva de estrutura matemática, ainda que não nos preocupemos em satisfazer a uma definição formal de *estrutura*." (59)

E, ainda mais recentemente, afirmou MAC LANE [1997:985] que "a teoria das categorias fornece um esquema conceitual simples e sistemático para a matemática, incluindo as ideias de conjuntos, funções entre conjuntos e entre 'conjuntos dotados de estrutura' e as formulações axiomáticas da composição de funções. (60) [MAC LANE 1997:985]

Referindo-se ao fato de formarem uma categoria todos os modelos de um tipo de estrutura, comenta MAC LANE [1996:181] ser esse um teorema que se pode provar explicitamente, com base na definição de estrutura proposta por Bourbaki. E acrescenta que "curiosamente, tanto quanto eu saiba, essa prova nunca foi escrita, embora consista

exatamente em um exercício mecânico. Bourbaki nunca o fez, talvez porque, claramente, ele não gostasse de categorias. Eilenberg & Mac Lane (que primeiramente desenvolveram a teoria das categorias) nunca o fizeram, porque o acharam supérfluo e porque consideraram a definição bourbakiana de 'tipo de estrutura' em uma 'escala' de conjuntos uma peça incômoda de vaidade. Certa feita (em 1954), tentei discutir esse quesito geral em um encontro de Bourbaki mas não consegui convencê-lo. (61)

Assim, o reparo que se pode fazer ao projeto de Bourbaki se resume no excerto seguinte, de MACLANE [1996A:177]:

> "Contudo, não é verdade que toda a matemática se ocupe de tais estruturas. Importantes questões clássicas acerca de funções analíticas de uma variável complexa permaneceram perfeitamente concretas, isto é, específicas, enquanto quesitos canônicos acerca de números (porque π e e são transcendentes; como se distribuem os números primos?) dificilmente são estruturais. Grande parte do estudo ativo de equações diferenciais parciais e de suas soluções (por exemplo, para a mecânica dos fluidos) não podem ser descritos naturalmente em termos de 'estruturas' axiomatizadas. A teoria dos números permanece perfeitamente concreta. Por essas e por razões semelhantes, não podemos pretender que a matemática seja exatamente o estudo de estruturas definidas axiomaticamente — mas podemos observar que tais estruturas são usada ampla e eficazmente." (62)

Assim, me parece que o arrazoado de Corry, acerca da incompatibilidade entre os tratamentos estrutural e functorial, não seja pertinente. Por outro lado, assevera KUTATELADZE [2005:3] que Mac Lane sempre considerou a teoria das categorias "um aspecto natural e talvez inevitável da ênfase matemática, praticada no século XX, nos métodos axiomáticos e abstratos — especialmente nos métodos envolvidos na álgebra abstrata e na análise funcional". (63)

Além disso, Mac Lane "acentuara que, não houvessem Eilenberg e ele próprio proposto essa teoria, ela necessariamente haveria aparecido nos trabalhos de outros matemáticos. Entre esses potenciais inventores das novas concepções, Mac Lane elencara Claude Chevalley, Heinz Hopf, Norman Steenrod, Henri Cartan, Charles Ehresmann e John von Neumann". (64) [KUTATELADZE 2005:3]

Finalmente, "na opinião de Mac Lane, as concepções da teoria das categorias estavam próximas dos princípios metodológicos do projeto de Nicolas Bourbaki. Mac Lane tinha simpatia por esse projeto e quase se vinculou a ele mas isso nunca aconteceu (sendo de natureza idiomática os principais obstáculos)". (65) [KUTATELADZE 2005:3]

Informa ainda KUTATELADZE que "o termo 'teoria das categorias' teve raízes no interesse de ambos os seus autores pela filosofia e, especialmemte, pela obra de Immanuel Kant". (66) [KUTATELADZE 2005:3]

Cabe-me documentar que era recíproca a simpatia de alguns colaboradores de Bourbaki pelo tratamento functorial. Por exemplo, já em 1970, Jean DIEUDONNÉ [1970:138] afirmava que:

> "Desde Hilbert e Dedekind, sabemos muito bem que grande parte da matemática se pode desenvolver lógica e produtivamente de um pequeno acervo de axiomas bem escolhidos. Isto é, dadas as bases de uma teoria na forma axiomática, podemos desenvolver toda a teoria de um modo mais compreensível do que podíamos. Foi isso que deu a ideia geral de estrutura matemática. Digamos imediatamente que essa noção foi, há pouco, substituída pela ideia de categoria e functor, que a inclui sob forma mais geral e conveniente. É certo que será o dever de Bourbaki, que nunca receia mudanças, incorporar as ideias válidas dessa teoria em seus escritos." (67)

E, para que não falte uma ponta de humor (o qual, segundo BEAULIEU [1999:228-229], frequentava os encontros dos colaboradores de Bourbaki), resta consignar que o congresso celebrado em março de 1957 seria cognominado '**o congresso do functor inflexível**', porque nele fora apresentado o rascunho acerca da teoria elementar dos feixes, destinado a fornecer os elementos básicos de topologia algébrica, fibrados tangentes, variedades diferenciáveis, geometria analítica (na acepção de *teoria dos espaços analíticos*) e geometria algébrica. Porém Alexandre Grothendieck discordou, propondo que se reescrevessem o livro VII (álgebra homológica) e o livro VIII (topologia), dedicando-se o primeiro capítulo desse último às **categorias** topológicas, às **categorias** locais, ao aglutinamento de **categorias** locais e aos feixes. [BOREL 1998:378]

Concluirei a presente seção, reproduzindo os parágrafos finais da introdução, redigida por EILENBERG & MACLANE [1945:236-237].

> "Em um sentido metamatemático, nossa teoria fornece conceitos gerais aplicáveis a todos os ramos da matemática abstrata e, assim, contribui à tendência corrente ao tratamento uniforme de disciplinas matemáticas distintas. Em particular, fornece oportunidades de comparação de construções e de isomorfismos que ocorrem em ramos distintos da matemática; desse modo, pode ocasionalmente sugerir novos resultados por analogia.
>
> A teoria também enfatiza que, sempre que são construídos novos objetos abstratos, de um modo específico dentre diversos modos, é recomendável considerar a construção das correspondentes aplicações induzidas sobre os novos objetos como parte integrante de sua definição. A persistência desse programa vincula uma consideração simultânea de objetos e de suas aplicações (em nossa nomenclatura, isso significa a consideração não dos objetos individuais mas das categorias). Essa ênfase no tipo das aplicações empregadas concede maior visão do grau de invariância dos diversos conceitos envolvidos. Por exemplo, mostraremos [...] que o conceito do subgrupo comutador de um grupo é, em um certo sentido, mais invariante que o centro, o qual,

por sua vez, é mais invariante que o conceito de grupo de automorfismos de um grupo, embora, no sentido clássico, os três conceitos sejam invariantes." (68)

Em seguida, os autores acentuaram o 'aspecto metafísico' (como diria Lagrange) da matemática, da perspectiva functorial:

> "O caráter invariante de uma disciplina matemática pode ser formulado nestes termos. Assim, na teoria dos grupos, todas as construções básicas podem ser consideradas como definições de functores covariantes ou contravariantes, de modo que podemos formular a máxima: O objeto da teoria dos grupos é, essencialmente, o estudo das construções de grupos que, sob a ação de homomorfismos induzidos, se comportam de modo covariante ou contravariante. Mais precisamente, a teoria dos grupos estuda functores definidos em categorias de grupos bem especificadas, com valores em outra categoria do mesmo tipo.
>
> Isso pode ser considerado como a continuação do *Programa de Erlangen*, de Klein, no sentido de que um espaço geométrico com seus grupos de transformações é estendido a uma categoria com sua álgebra de aplicações." (69) [EILENBERG & MACLANE 1945:237]

9.9 Fontes

(1) *C'est dire que s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni* le nombre*, ni la* grandeur*, mais toujours* ***la forme****. Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que toute autre et continue à me fasciner, c'est* ***la structure*** *cachée dans les choses mathématiques.* [GROTHENDIECK *Récoltes et Semailles*, p. 27]

(2) *Ainsi, après avoir été porté aux nues par les autorités académiques de son époque, le théorème de Sturm se trouve aujourd'hui, ou jusqu'à une date récente, renvoyé par l'establishment mathématique au magasin des antiquités oubliées.* [BENIS-SINACEUR 1988:106]

(3) *Par ce biais et d'autres encore, la résolution numériques des équations est, selon lui, 'une des plus importantes applications du calcul différentiel' [Fourier, 1831, 18].* [BENIS-SINACEUR 1992:55]

(4) *En effet, les relations exprimées par les équations "n'appartiennent pas seulement à la science abstraite du calcul: elles existent dans les propriétés des courbes et des surfaces, dans les movements des solides et des fluides, dans la distribution de la chaleur et dans la plupart des phénomènes naturels".* [BENIS-SINACEUR 1988:112]

(5) *Et lorsque cette condition n'a pas lieu, précise Fourier, rien n'empêche d'examiner séparément chacune des parties où la continuité subsiste.* [*Apud* BENIS-SINACEUR 1988:112-113]

(6) *Definit heiszt eine solche ganze rationale Funktion oder Form beliebig vieler Veränderlichen mit reellen Coefficienten, die für keine reellen Werte dieser Veränderlichen negativ ausfällt. Das System aller definiten Funktionen verhält sich invariant gegenüber den Opperationen der Addition und der Multiplikation; aber auch der Quotient zweier definiten Funktionen ist — sofern er eine ganze Funktion der Veränderlichen ist — eine definite Form. Das Quadrat einer jeden beliebigen Form ist offenbar stets eine definite Form; da aber, wie ich gezeigt habe, nicht jede definite Form durch Addition aus Formenquadraten zusammengesetzt werden kann, so entsteht die Frage — die ich für den Fall ternärer Formen in bejahenden Sinne entschieden habe —, ob nicht jede definite Form als Quotient von Summen von Formenquadraten dargestellt werden kann. Zugleich ist es für gewisse Fragen hinsichtlich der Möglichkeit gewisser geometrischer Konstruktionen wünschenswert, zu wissen, ob die Coefficienten der bei der Darstellung zu verwendenden Formen stets in demjenigen Rationalitätsbereiche angenonommen werden dürfen, der durch die Coefficienten der dargestellten Form gegeben ist.* [HILBERT 1900:25-26]

(7) *Above all, I cannot forget the old dogma that the most interesting aspect of analysis is its algebraic structure.* [KUGA 1993:viii]

(8) *Une analyse semblable des méthodes de résolution de l'équation du quatrième degré l'amène à la fonction* $x_1x_2 + x_3x_4$ *des quatre racines, qui ne prend que* trois *valeurs distinctes pour toute permutation des racines, et est par suite racine d'une équation du troisième degré à coefficients fonctions rationnelles de ceux de l'équation donnée; ces faits constituent, dit Lagrange,* 'les vrais principes et, pour ainsi dire, la métaphyisique de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré'. [*Apud* BOURBAKI 1960:100]

(9) *Up to the middle of the nineteenth century, mathematicians were for the most part divided according to whether mathematics was supposed to deal with real meanings, like geometry or mechanics, or whether it was the result of our own mental constructions, like arithmetic.* [OTTE 2007:247]

(10) *C'est qu'en effet, même en négligeant les mathématiques appliquées, il subsiste, entre la géométrie et l'arithmétique (du moins sous leur aspect élémentaire) une évidente dualité d'origine, celle-ci étant initialement science du discret, celle-là de l'étendue continue, deux aspects qui s'opposent radicalemnent depuis la découverte des irrationnelles.*" [BOURBAKI 1962:36]

(11) *So auszerordentlich anregend Dirichlet als Lehrer gewirkt hat, eine besondere mathematische Schule hat er nicht gegründete. Aber viele, die sich hernach auf individuell sehr verschiedene Wege zerstreuten, verdankten ihm die stärksten Impulse ihres wissenschftlichen Strebens. Seinen Enthusiasmus für die Anregungen Dirichlets meinte der junge Eisenstein nicht warm genug schildern zu können, auch wenn ihm ein ehernes Herz und eine tausendfältige Zunge verliehen wären. Welcher Mathematiker hätte kein Verständnis dafür, dasz die leuchtende Bahn Riemanns, dieses riesigen Meteors am mathematischen Himmel, vom Sternbilder Dirichlets ihren Ausgangspunkt nahm.* [MINKOWSKI 1905:163]

(12) *Am nützlichsten ist mir wohl der fast tägliche Umgang mit Dirichlet, bei dem ich eigentlich erst recht zu lernen anfange; [...] er sag mir onhe Umschweife, was für Lücken ich auszufüllen habe, und giebt mir unmittelbar die Anweisung und die Mittel dazu.* [Dedekind, *apud* EDWARDS 1983B:15-16]

(13) *Although the book is asuredly* based *on Dirichlet's lectures, and although Dedekind himself referred to the book throughout his life as Dirichlet's, the book itself was entirely written by Dedekind, for the most part after Dirichlet's death.* [EDWARDS 1983B:11]

(14) *Ich bemerke dabei, dasz eine ähnliche Herleitung sich auch in einem der verdienstvollen Supplemente findet, welche Hr. Dedekind seiner überaus dankenswerthen, mit geschickter und sorgsamer Hand veranstalteten Herausgabe der Dirichletschen Vorlesungen über Zahlentheorie beigefügt hat.* [Kronecker, *apud* EDWARDS 1983:16]

(15) Kummer n'a pas défini les nombres idéaux eux-mêmes, mais seulement la divisibilité par ces nombres. [...] Bien que cette introduction de nouveaux nombres soit tout à fait légitime, il est toujours à craindre d'abord que, par le mode d'expression que l'on a choisi, dans lequel on parle de nombres idéaux déterminés et de leurs produits, et aussi par l'analogie présumée avec la théorie des nombres rationnels, on se soit entrainé à des conclusions précipitées et par là à des démonstrations insuffisantes, et en effet cet écueil n'est pas toujours complètement évité." [Dedekind, *apud* EDWARDS 1983:15]

(16) *Se llama curva algebraica al conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas (rectangulares u oblicuas) x, y satisfacen a una ecuación de la forma f(x,y) = 0, donde f(x,y) es un polinomio en las dos variables x, y.* [PASTOR et alii 1955:187]

(17) *I matematici sono un po'* hochmüthig *nell'uso del concetto di funzione. Anche Riemann, generalmente molto esatto, non è irreprensibile sotto questo rapporto. Se una funzione cresce e poi diminuisce o viceversa dice Riemann dovervi essere un minimo od un massimo (vedi la dimostrazione del cosi detto Dirichletsche Princip); mentre dovrebbesi restringere la conclusione alla sfera delle funzioni per cosi dire ragionevoli.* [*Apud* NEUENSCHWANDER 1978:74]

(18) *Die tiefe und kühne Idee von Clebsch bestand darin, dasz man dieses umfassende Konzept nicht in der Geometrie selbst suchen sollte, sondern in den kürzlich (1856) erschienen Arbeiten Riemanns, die damals aufgefaszt wurden als Teil der Funktionentheorie, und die sich den Integralen und* θ*-Funktionen widmeten und auf dem analytischen Extremalprinzip von Dirichlet basierten. Im Grunde genommen war das eine Umdeutung der Ideen von Abel und Riemann, ihre Übersetzung in eine andere Sprache, aber eine höchst nichttriviale Übersetzung. Wenn für Abel die Gleichung F(w, z) = 0, F ein Polynom, eine 'Irrationalität' w und für Riemann eine algebraische Funktion w (gegeben auf einer Riemannschen Fläche) bestimmte, so war das für Clebsch die Gleichung einer algebraischen Kurve, und jede neue Tatsache über diese Gleichung spiegelte eine gewisse geometrische Eigenschaft der Kurve wider.* [SHAFAREVICH 1983:135-136]

(19) *Das Buch von Clebsch werden Sie durch den Buchhandel erhalten haben. Die Vorrede würde er bei Lebzeiten Riemann's nie zu veröffentlichen gewagt haben. Der Versuch, die Functionenlehre auf die Algebra zu stützen, ist als vollkommen unnütz zu betrachten. [...] Die Algebra ist im Gegentheile ein*

Ausflusz der Functionenlehre und nicht umgekehrt. [...] Nun die Zukunft wird ja lehren, wie weit die Herren kommen. [*Apud* NEUENSCHWANDER 1978:61]

(20) *C'est la découverte de ces derniers qui conduisit Steinitz (comme il le dit explicitement) à dégager les notions abstraites communes à toutes ces théories, dans un travail fondamental, qui peut être considéré comme ayant donné naissance à la conception actuelle de l'Algèbre.* [BOURBAKI 1960:109]

(21) *Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique [de structure] est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature* n'est pas spécifiée*; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments [...]; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les* axiomes *de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure,* en s'interdisant toute autre hypothèse *sur les éléments considérés (en particulier sur leur 'nature' propre). [...] En réalité, cette définition des structures n'est pas assez générale pour les besoins des mathématiques; il faut envisager les cas où les relations définissant une structure auraient lieu, non entre des éléments de l'ensemble considéré, mais aussi entre des* parties *de cet ensemble et même, plus géneralement, entre des éléments d'ensembles de 'degré' encore plus élevé dans ce qu'on appelle l'échelle des types.*" [BOURBAKI 1962:40-41]

(22) *The structures with which modern algebra is concerned have been compared to the grin of the Cheshire Cat in* Alice in Wonderland*, which remained visible after the cat itself faded away.* [Samuel Eilenberg, apud CARTER 2008:119]

(23) *In a letter of 5 October, Killing informed Klein that he had proved that space forms as conceived in* Grundbegriffe und Grundsätze *can be represented by continuous manifolds in the sense of Riemann, that is, by a system of n-tuples* $(x_1, ..., x_n)$ *of real numbers where the* x_j *vary continuously. An analytical treatment of general space form was thus possible, and Killing implied he had done extensive work in this area.* [HAWKINS 1980:303]

(24) *Algebra is thus inevitably abstract, even though this was not fully recognized until the 1920's, when Emmy Noether and her disciples saw clearly that many algebraic phenomena could be grasped more effectively when stated and proved abstractly.* [MAC LANE 1986:120]

(25) *Mientras para una generación de algebristas, 'Álgebra moderna' significó el libro de VAN DE WAERDEN (cuya primera edición data de 1931) o acaso uno o dos posteriores, el Álgebra ha evolucionado profundamente, en parte por motivaciones de otras ramas de la Matemática que, como la Topología algebraica, muestran insaciable apetito por estructuras algebraicas. Conceptos casi ignorados por la 'vieja Álgebra moderna', como el de producto tensorial de módulos, son hoy de importancia central.* [PASTOR *et alii* 1958:88]

(26) *In the great conflict of 1914-1918, the German and French governments did not see things in the same way where science was concerned. The Germans put their scholars to scientific work, to raise the potential of the army by their discoveries and by the improvement of inventions or processes, which in turn served to augment the German fighting power. The French, at least at the beginning of the war and for a year or two, felt that everybody should go to the front; so the young scientists, like the rest of the French, did their duty at the front line. This showed a spirit of democracy and patriotism that we*

can only respect, but the result was a dreadful hecatomb of young French scientists. [DIEUDONNÉ 1970:134-135]

(27) *I must say that the collaborators of Bourbaki were very young at the time and doubtless they would never have started this job had they been older and better informed.* [DIEUDONNÉ 1970:136]

(28) *Little by little, as we became rather more competent and more aware, we realized the enormity of the job that had been taken on, and that there was no hope of finishing it as quickly as that.* [DIEUDONNÉ 1970:136]

(29) *What Bourbaki has done is to define and generalize an idea which already was widespread for a long time.* [DIEUDONNÉ 1970:138]

(30) *Die genannten Probleme sind nur Proben von Problemen; sie genügen jedoch, um uns vor Augen zu führen, wie reich, wie mannigfach und wie ausgedehnt die mathematische Wissenschaft schon heute ist und es drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich daß sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander verstehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganze, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissenstoffes im Einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hülfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogieen in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen, werden entdeckt. So kommt es, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.* [HILBERT 1900:296-297 Mathematische Probleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen]

(31) [...] *chaque année la science mathématique s'enrichit d'une foule de résultats nouveaux, se diversifie et se ramifie constamment en théories sans cesse modifiées, refondues, confrontées, combinées les unes aux autres.* [BOURBAKI 1962:35]

(32) *Mais on peut se demander si cette prolifération exubérante est le développement d'un organisme vigoureusement charpenté, acquérant chaque jour plus de cohésion et d'unité des acroissements qu'il reçoit, ou si au contraire elle n'est que le signe extérieur d'une tendance à un émiettement de plus en plus poussé, dû à la nature même des mathématiques, et si ces dernières ne sont pas en train de devenir une tour de Babel de disciplines autonomes, isolées les unes des autres, tant dans leurs buts que dans leurs méthodes, et jusque dans leur langage. En um mot, y a-t-il aujourd'hui* une *mathématique ou* des *mathématiques*? [BOURBAKI 1962:35-36]

(33) *Au lieu des compartiments bien délimités de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Théorie des Nombres et de la Géométrie, nous verrons, par exemple, la théorie des nombres premiers voisiner avec celles des courbes algébriques, ou la géométrie euclidienne avec les équations intégrales; et le principe ordonnateur sera la*

conception d'une hiérarchie de structures, allant du simple au complexe, du général au particulier. [BOURBAKI 1962:43]

(34) *Il n'y a pas si longtemps que les diverses branches des mathématiques étaient groupées suivant les êtres mathématiques (éléments explicites) auxquelles elles se rapportaient: arithmétique, géométrie, théorie des fonctions ... De même, en zoologie ou en botanique, on classait autrefois les espèces suivant les signes extérieurs fournis par une description plus ou moins superficielle. Aujourd'hui, on tend de plus en plus à étudier les structures* algébriques*, les structures* topologiques*, les structures* d'ensemble ordonné *etc.; l'étude d'une telle structure revient, en somme, à tirer les conséquences d'une certaine propriété* R*(x), conséquences qui son vraies, ensuite, pour tout élément explicite* a *tel que* R*(a) soit vraie. Une fois ces structures étudiées pour elles mêmes, on étudie les carrefours de structures (étude simultanée de plusieurs structures qui satisfont à des conditions de compatibilité mutuelle): par exemple, les nombres réels sont au carrefour des trois structures algébrique, topologique, et d'ensemble ordoné. Ce principle contemporain de classification correspondrait, pour reprendre notre comparaison zoologique, à une classification des espèces animales suivant les lois de l'évolution.* [CARTAN 1942:11]

(35) *Algebra is not only a part of mathematics; it also plays within mathematics the role which mathematics itself played for a long time with respect to physics. What does the algebraist have to offer to other mathematicians? Occasionally, the solution of a specific problem; but mostly a language in which to express mathematical facts and a variety of patterns of reasoning, put in a standard form. Algebra is not an end in itself; it has to listen to outside demands issued from various parts of mathematics. This situation is of great benefit to algebra; for, a science, or a part of a science, which exists in view of its own problems only is always in danger of falling into a peaceful slumber and from there into a quiet death. But, in order to take full advantage of this state of affairs, the algebraist must have sensitive ears and the ability to derive profit from what he perceives is going on outside his own domain. Mathematics is changing constantly, and algebra must reflect these changes if it wants to stay alive. This explains the fact that algebra is one of the most rapidly changing parts of mathematics: it is sensitive not only to what happens inside its own boundaries, but also to the trends which originate in all other branches of mathematics.* [CHEVALLEY 1956:v]

(36) *There are two modes of understanding that have proved, in our time, to be especially penetrating and fruitful. The two are topology and abstract algebra. A large part of mathematics bears the imprint of these two modes of thought.* [WEYL 1932:454]

(37) *Our time is witnessing the creation of a monumental work: an exposition of the whole of present day mathematics. Moreover this exposition is done in such a way that the common bond between the various branches of mathematics becomes clearly visible, that the framework which supports the whole structure is not apt to become obsolete in a very short time, and that it can easily absorb new ideas. Bourbaki achieves this aim by trying to present each concept in the greatest possible generality and abstraction. [...] The presentation is abstract, merciless abstract. But the reader who can overcome the initial difficulties will be richly rewarded for his efforts by deeper insights and fuller understanding.* [ARTIN 1953:474-479]

(38) *Thus it appears that the author has somewhat overstated his claims, and has been too partial to the method dearest to his algebraic heart. [...] It is rather with relief that one observes such signs of human frailty in this severely dehumanized book.* [WEIL 1951:397]

(39) *Les moments importants, les moments solennels, dans le développement de la mathématique moderne, sont ceux où deux domaines qui étaient jusque-là cultivés pour eux-mêmes, et qui paraissaient voués à une limitation définitive, entrent tout d'un coup en contact et se prêtent un secours inattendu.* [BRUNSCHVICG 1972:446]

(40) *Ce que se propose pour but essentiel l'axiomatique, c'est précisément ce que le formalisme logique, à lui seul, est incapable de fournir, l'intelligibilité profonde des mathématiques. De même que la méthode expérimentale part de la croyance a priori en la permanence des lois naturelles, la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins 'astucieux', fait de rapprochements fortuits où triomphe la pure habilité technique. Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes, se prêtant, par l'entremise d'un mathématicien de génie, un 'secours inattendu' (BRUNSCHVICG), la méthode axiomatique enseigne à rechercher les raisons profondes de cette découverte, à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détais propres à chacune des théories considérées, à dégager ces idées et à les mettre en lumière.* [BOURBAKI 1962:37-38]

(41) *Having isolated a particular community of specialists by techniques like those just discussed, one may usefully ask: What do its members share that accounts for the relative fulness of their professional communication and the relative unanimity of their professional judgements? [...] For present purposes I suggest 'disciplinary matrix': 'disciplinary' because it refers to the common possession of the practitioners of a particular discipline; 'matrix' because it is composed of ordered elements of various sorts, each requiring further specification.* [KUHN 1970:182]

(42) *Van der Waerden never provided an explicit explanation, either formal or nonformal, of what is to be understood by an 'algebraic structure' or by 'structural research in algebra'; he showed what this is by simply doing it. Bourbaki, on the other hand, not only attempted at various times to explain what the structural approach is and why it is so novel and important for mathematics, but formulated what they expected to be an elaborate mathematical theory, the theory of structures, meant to sustain and endorse their explanations — indeed, their whole system of images of mathematics — by means of an allegedly unifying, mathematical theory.* [CORRY 1997A:277]

(43) *Notre tâche est plus modeste et plus circonscrite: nous n'entreprendrons pas d'examiner les rapports des mathématiques avec le réel ou avec les grandes catégories de la pensée; c'est à l'intérieur de la mathématique que nous entendons rester, et chercher, en analysant ses démarches propres, une réponse à la question que nous nous sommes posée.* [BOURBAKI 1962:35]

(44) *Après la faillite plus ou moins apparente des divers systèmes auxquels nous avons fait allusion plus haut, il semblait, au début de ce siècle, qu'on eût à peu près renoncé à voir dans les mathématiques une science caractérisée par un objet et une méthode unique* [...]. [BOURBAKI 1962:35]

(45) *Aujourd'hui, au contraire, nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de 'méthode axiomatique'.* [BOURBAKI 1962:37]

(46) *Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur nature propre).* [BOURBAKI 1962:41]

(47) *Les estructures ne sont pas immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces inventions de structures, si l'on en juge d'après ceux qu'ont apportés les structures actuellement connues; d'autre part ces dernières ne sont en aucune manière des édifices achevés, et il serait très surprenant que tout le suc de leurs principes fût d'ores et déjá épuisé.* [BOURBAKI 1962:45]

(48) *Telle une grande cité, dont les faubourgs ne cessent de progresser, de façon quelque peu chaotique, sur le terrain environnant, tandis que le centre se reconstruit périodiquement, chaque fois suivant un plan plus clair et une ordonnance plus majestueuse, jetant à bas les vieux quartiers et leurs dédales de ruelles, pour lancer vers la périphérie des avenues toujours plus directes, plus larges et plus commodes.* [BOURBAKI 1962:45]

(49) *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.* [HILBERT 1926:170]

(50) *The work method used in Bourbaki is a terribly long and painful one, but is almost imposed by the project itself. In our meetings, held two or three times a year, once we have more or less agreed on the necessity of doing a book or chapter on such and such a subject (generally, we foresee a certain number of chapter for a book), the job of drafting it is put into the hands of the collaborator who wants to do. So he writes one version of the proposed chapter or chapter from a rather vague plan. Here, generally, he is free to insert or neglect what he will, completely at his own risk and peril, as you will see. After one or two years, when the work is done, it is brought before the Bourbaki Congress, where it is read aloud, not missing a simple page. Each proof is examined, point by point, and is criticized pitilessly. One has to see a Bourbaki Congress to realize the virulence of this criticism and how it surpasses by far any outside attack. [...] Once the first version has been torn to pieces — reduced to nothing — we pick a second collaborator to start it all over again. This poor man knows what will happen because although he sets off following the new instructions, meanwhile the ideas of the Congress will change and next year his version will be torn to bits. A third man will start, and so it will go on. One would think it was an unending process, a continuous recurrence, but in fact, we stop for purely human reasons. When we have seen the same chapter come back six, seven, eight, or ten times, everybody is so sick of it that there is a unanimous vote to send it to press. [...]An average of eight-twelve years is necessary from the first moment we set to work on a chapter to the moment it appears in the bookshop. The ones that are*

coming out now are the ones that were discussed for the first time about 1955. [DIEUDONNÉ 1970:141-142]

(51) *So, I repeat, those which Bourbaki proposes to set forth are generally mathematical theories almost completely worn out already at least in their foundations.* [DIEUDONNÉ 1970:141]

(52) *They do no legally exist within ZFC because the collections of all the objects and all the arrows in question are not sets but are classes, like the class of all sets or the class of all ordinals.* [MAC LANE 1986:387]

(53) *The process of forming the conjugate space thus actually involves two differente operations of functions. The first associates with each space L its conjugate space T(L); the second associates with each linear transformation λ between vector spaces its induced linear transformation T(λ).* [EILENBERG & MAC LANE 1945:232]

(54) *Such a consideration of vector spaces and their linear transformations is but one example of many similar mathematical situations; for instance, we may deal with groups and their homomorphisms, with topological spaces and their continuous mappings [...]. In order to deal in a general way with such situations, we introduce the concept of a category. Thus a category $\mathcal{A}$ will consist of abstract elements of two types: the objects A (for example, vector spaces, groups) and the mappings α (for example, linear transformations, homomorphisms). For some pairs of mappings in the category there is defined a product (in the examples, the product is the usual composite of two transformations). Certain of these mappings act as identities with respect to this product, and there is a one-to-one correspondence between the objects of the category and these identities. A category is subject to certain simple axioms, so formulated as to include all examples of the character described above.* [EILENBERG & MAC LANE 1945:234]

(55) [...] *the publication of such a chapter could have proved somewaht problematic when coupled with Bourbaki's insistence on the centrality of* structures. *The task of merging both concepts, i. e., categories and structures, in a sensible way, would have been arduous and unilluminating, and the adoption of categorical ideas would have probably necessitated the rewriting of several chapters of the treatise. This claim if further corroborated by the interesting fact that when the chapter on homological algebra was finally issued (1980), the categorical approach was not adopted therein. Although since the publication of the above mentioned textbook of Cartan and Eilenberg [*Homological algebra*, 1956] the broad framework provided by categories became the standard framework for treating homological concepts, in Bourbaki's own presentation these concepts are defined within the narrower framework of modules.* [CORRY 1992-332]

(56) *Malgré l'intérêt manifesté pour le langage des catégories et les foncteurs, par certains membres de Bourbaki comme Eilenberg évidemment, mais aussi Ehresmann ou encore Grothendieck, le groupe n'a pas révisé son 'Architecture des mathématiques' ni réussi à intégrer les catégories dans son texte et cela malgré de nombreuses discussions entre les différents membres du groupe à l'époque. La raison essentielle en est sans doute que l'introduction des catégories aurait demandé une révision profonde des volumes du traité déjà parus. Cartier a reconnu ultérieurement que si les Bourbakis avaient été amenés*

à refaire leur traité ils auraient très certainement commencé par l'introduction des catégories. [MAINARD 2001:173]

(57) *Recent years have seen striking development in the conceptual organization of mathematics. These developments use certain new concepts such as 'module', 'category', and 'morphism' which are algebraic in character and which indeed can be introduced naturally on the basis of elementary materials. The efficiency of these ideas suggests a fresh presentation of algebra.* [MAC LANE & BIRKHOFF 1967]

(58) [...] *the notion of different types of mathematical structure does provide an effective means of organizing and of understanding mathematics. For example, structures lead to 'morphisms'; for each type T of structure there is a consequent notion of a homomorphism — in brief, a 'morphism' — from one model of the structure to another. Emmy Noether had emphasized the importance of this notion for a homomorphism $j:G \to H$ from a group G to a group H (in her case, always 'onto' H). It is a function which assigns to each element x of G an 'image' element $f(x)$ in H in such a way that always $f(xy) = f(x)f(y)$. In other words, the 'structure' given by the group multiplication is preserved; products map to products (and in consequence, inverses map to inverses).* [MACLANE 1996:180]

(59) *Bourbaki and many others always put a central question to any new mathematical gadget: 'What are the morphisms?' Structure inevitably leads to morphisms for Bourbaki and everyone else. For example, once vector spaces are defined axiomatically, it becomes inevitable to ask for the morphisms $V \to W$ of such spaces. These are exactly the linear transformations (those functions from V to W which preserve vector addition and multiplication of vectors by scalars). The given transformation can then be represented (relative to bases in the spaces V and W) by matrices. It is this observation which has greatly clarified the earlier poorly motivated calculations with matrices: they are representations of morphisms. This is a good illustration of the sense in which ideas about structure clarify understanding. In mathematics, there is thus a common and effective notion of a mathematical structure, even though one did not usually bother to attend to a formal definition of 'structure'.* [MACLANE 1996:181]

(60) *Category theory provides a simple and systematic conceptual framework for mathematics including the ideas of sets, functions between sets and of 'sets with structure', and the axiomatic formulations of the composition of functions.* [MAC LANE 1997:985]

(61) *Curiously, this proof has never (to my knowledge) been actually written out; to do so would be just a mechanical exercise. Bourbaki never did this, perhaps because he clearly did not like categories. Eilenberg & Mac Lane (who first developed Category Theory) never did this because they found it needless and considered the Bourbaki definition of 'type of structure' in an 'échelle' of sets a cumbersome piece of pedantry. At one time (in 1954), I tried to argue this general issue at a meeting of Bourbaki: I failed to convince him.* [MAC LANE 1996:181]

(62) *However, it never was the case that all of mathematics was concerned with such structure. Important classical questions about analytic functions of a complex variable remained quite concrete, i.e., specific, while standard questions about numbers (why are π and e transcendental; how are the prime numbers distributed?) are hardly structural. Much of the active study of partial differential equations and their solutions (e.g., for fluid mechanics) cannot naturally be described in terms of axiomatized 'structures'.*

Number theory remains quite concrete. For these and related reasons, we cannot claim that mathematics is just the study of axiomatically defined structures — but we can observe that such structures are widely and effectively used. [MACLANE 1996A:177]

(63) *Mac Lane always considered category theory "a natural and perhaps inevitable aspect of the twentieth century mathematical emphasis on axiomatic and abstract methods — especially as those methods when involved in abstract algebra and functional analysis".* [KUTATELADZE 2005:3]

(64) *He stressed that even if Eilenberg and he did not propose this theory it will necessarily appear in the works of other mathematicians. Among these potential inventors of the new conceptions Mac Lane listed Claude Chevalley, Heinz Hopf, Norman Steenrod, Henri Cartan, Charles Ehresmann, and John von Neumann.* [KUTATELADZE 2005:3]

(65) *In Mac Lane's opinion, the conceptions of category theory were close to the methodological principles of the project of Nicholas Bourbaki. Mac Lane was sympathetic with the project and was very close to joining in but this never happened (the main obstacles were in linguistic facilities).* [KUTATELADZE 2005:3]

(66) *It is worth noting in this respect that the term "category theory" had roots in the mutual interest of its authors in philosophy and, in particular, in the works of Immanuel Kant.* [KUTATELADZE 2005:3]

(67) *Since Hilbert and Dedekind, we have known very well that large parts of mathematics can develop logically and fruitfully from a small number of well-chosen axioms. That is to say, given the bases of a theory in an axiomatic form, we can develop the whole theory in a more comprehensible way than we could otherwise. This is what gave the general idea of the notion of mathematical structure. Let us say immediately that this notion has since been superseded by that of category and functor, which includes it under a more general and convenient form. It is certain that it will be the duty of Bourbaki, who [...] never fears change, to incorporate the valid ideas of this theory in his works.* [DIEUDONNÉ 1970:138]

(68) *In a metamathematical sense, our theory provides general concepts applicable to all brances of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines. In particular, it provides opportunities for the comparison of constructions and of the isomorphisms occurring in different branches of mathematics; in this way it may occasionally suggest new results by analogy. The theory also emphasizes that, whenever new abstract objects are constructed in a specified way out of given ones, it is advisable to regard the construction of the corresponding induced mappings on these new objects as an integral part of their definition. The pursuit of this program entails a simultaneous consideration of objects and their mappings (in our terminology, this means the consideration not of individual objects but of categories). This emphasis on the specification of the type of mappings employed gives more insight into the degree of invariance of the various concepts involved. For instance, we show in Chapter III, § 16, that the concept of the commutator subgroup of a group is in a sense a more invariant one than that of the center, which in its turn is more invariant than the concept of the automorphism group of a group, even though in the classical sense all three concepts are invariant.* [EILENBERG & MACLANE 1945:236-237]

(69) *The invariant character of a mathematical discipline can be formulated in these terms. Thus, in group theory all the basic constructions can be regarded as the definitions of co- or contravariant functors, so we may formulate the dictum: The subject of group theory is essentially the study of those constructions of groups which behave in a covariant or contravariant manner under induced homomorphisms. More precisely, group theory studies functors definied on well specified categories of groups, with values in another such category. This may be regarded as a continuation of the Klein Erlanger Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformations is generalized to a category with its algebra of mappings*. [EILENBERG & MACLANE 1945:237]

Conclusão da tese

Sumário

- Resumo histórico
- Contribuição ao estudo do pensamento matemático
- Implicações didascálicas
- Prolongamento da investigação

Resumo histórico

Sistematizadas, por François Viète, as técnicas algébricas disponíveis em 1591, tornou-se possível o seu emprego na descrição dos fenômenos geométricos conhecidos no âmbito da geometria do plano. Esse método de investigação, denominado *método analítico*, foi definitivamente instituído na *Géométrie*, apêndice ao Discurso do Método (1637) de René Descartes. A conjugação do método analítico com diversos estudos que remontavam à antiguidade permitiu a invenção do cálculo infinitesimal (1684) por Gottfried Leibniz. A essa linha de pesquisa afluíram os estudos acerca das séries de potências, que tinham atingido um nível elevado de proficiência na obra de Isaac Newton.

Inventado o cálculo infinitesimal, cedo se percebeu a potencialidade de seu emprego tanto na geometria quanto na mecânica.

No âmbito da mecânica, um dos problemas para o qual, até então, não se dispunha de uma técnica apropriada consistia na determinação da trajetória de uma massa pontual sujeita a uma força dada. Conjugando-se o cálculo infinitesimal com a segunda lei de Newton, se percebeu que tal problema se reduzia a resolver-se uma equação diferencial (de segunda ordem). Esse foi um dos motivos de se haver decidido que o diálogo com a Natureza se deveria instituir através das equações diferenciais.

No âmbito da geometria, definiram-se diversos conceitos que se tornariam nucleares, como a curvatura de curvas planares [*capítulo segundo*]. Logo essa noção foi estendida ao conceito de curvatura secional (por Euler), o que permitiu o estudo acurado das superfícies, tanto do ponto de vista extrínseco (por Monge) quanto intrínseco (por Gauss) [c*apítulo terceiro*]. O tratamento adotado por Gauss possibilitou uma visão geral, proposta por Beltrami, dos dois tipos de teoria geométrica então conflitantes: a teoria de Euclides e a teoria de Lobachevski. [*Capítulo terceiro*.]

O emprego do cálculo infinitesimal à geometria e à mecânica fomentou o estudo das **equações diferenciais**. Se anteriormente a teoria das equações tratava apenas das equações algébricas e de algumas equações transcendentes (cujas soluções eram **números** que designavam comprimentos, áreas, volumes ou razões entre medidas, como os ângulos), desde então se impuseram equações cujas soluções eram **funções**, um conceito que ainda se estava configurando.

Da perspectiva hodierna, diríamos que, conformado inicialmente pelo modelo polinomial, o conceito de função esteve associado a duas propriedades que, somente bem depois, se percebeu não lhe serem inerentes: a continuidade e a diferenciabilidade. Talvez seja mais adequado afirmar que o conceito inicial de função, plasmado pelas propriedades das funções racionais, incorporasse noções (como continuidade e diferenciabilidade, *avant la lettre*) que depois foram distinguidas com maior clareza e separadas. Dessas propriedades já não havia vestígio na conceituação proposta por Dirichlet (em 1837). A evolução da ideia de função constitui um caso típico de mudança conceitual. [*Capítulo terceiro*.]

Entre as técnicas de resolução das equações diferenciais, estiveram presentes, desde os primórdios dessa teoria, **as séries de potências**. E foi exatamente mediante séries de potências que Weierstrass descreveria **funções contínuas que não admitem derivadas**. [*Capítulo terceiro*.]

O recurso às séries de potências também foi decisivo a Weierstrass na elaboração de sua teoria das funções de variáveis complexas, em um certo modo baseado em uma concepção oposta à visão adotada por Riemann.

Por outro lado, o estudo das equações diferenciais propiciou a percepção de que se distinguiam duas classes de quesitos: O primeiro quesito consistia na elaboração de técnicas que permitissem resolverem-se equações, pressupondo-se tacitamente que tais equações admitissem soluções, pressuposto esse fundado quer em uma expectativa intuitiva, quer em a natureza dos problemas por elas descritos (geralmente, procedentes da mecânica ou da geometria). Mas, à medida que amadurecia o pensamento matemático, se foi impondo outra classe de quesito, a demonstração da existência de soluções. Dessa prática resultou o fenômeno referido como **a autonomia da teoria das equações diferenciais**, relativamente ao domínio de fenômenos que se pretendessem descrever.

Ora, desde sua origem, a resolução de equações diferenciais (quer ordinárias, quer parciais) constituiu um tipo de problemas nos quais 'os pontos extremantes' (de mínimo ou de máximo) não eram pontos de um espaço euclidiano mas eram funções. Problemas dessa natureza se impuseram desde, pelo menos, quando Johann Bernoulli propôs que se determinasse a trajetória (denominada braquistócrona), descrita, em tempo mínimo, por uma partícula sujeita apenas a seu peso, que conectasse um ponto P a um ponto Q (não situados em uma reta vertical, sendo a altura do ponto P maior que a altura do ponto Q).

Essa teoria, preludiada por Euler e Lagrange e nomeada *cálculo das variações*, provocaria a criação da análise funcional, disciplina que somente se pôde constituir, quando já tinham

amadurecido as técnicas da análise (clássica) e da álgebra linear, muito embora, hoje, a análise funcional não se restrinja aos fenômenos lineares. Embora fosse uma disciplina de origem geométrica, por permitir a resolução de problemas nos quais se buscavam comprimentos, áreas e volumes mínimos, **o cálculo das variações esteve desde a origem associado ao princípio teleológico de que a Natureza sempre se manifestasse por ações mínimas** e, por isso, seu emprego às ciências foi questionado pelos integrantes do Círculo de Viena. (Ironicamente, o mesmo motivo que presidiu à sua ascensão foi determinante do seu declínio.)

O curso evolutivo do cálculo infinitesimal nos induz a parodiar Bachelard, afirmando que o cálculo infinitesimal criou o seu próprio objeto de estudo, a teoria das funções, "assim como o microscópio criou a microbiologia". E nos leva a evocar uma balada de Goethe, *O aprendiz de feiticeiro*, o fato de o cálculo infinitesimal, ferramenta construída precipuamente para estudar retas tangentes a curvas planares, haver permitido descobrirem-se curvas planares que não admitem reta tangente por nenhum de seus pontos. [*Capítulo terceiro*.]

Colocadas essas questões, o capítulo quarto expõe como a comunidade matemática respondeu a elas, primeiramente tentando liberar a álgebra da aritmética, para lhe conferir um fundamento autônomo. E, em seguida, reificando o movimento fundador da análise, denominado *aritmetização*.

Consequente a esse movimento e concomitante com ele, impôs-se, desde a obra de Riemann, o questionamento acerca do fundamento da geometria. [*Capítulo terceiro*.]

Iniciou-se então a renovação da filosofia da matemática, na exposição e na defesa de concepções fundacionais (o logicismo, o intuicionismo e o formalismo) cujos proponentes não se satisfizeram em descrever os fenômenos evolutivos do pensamento matemático mas pretenderam, também, apontar os rumos de sua evolução futura. A essas concepções, a comunidade matemática respondeu com o estruturalismo (nascido da prática efetiva dos investigadores e depois convertido em concepção normativa, pelos colaboradores de Nicolas Bourbaki) e o pragmaticismo (que me parece ser, hoje, a visão dominante na comunidade matemática).

Na descrição da prática matemática (conduzida na terceira parte da tese), foram distinguidas duas classes de fenômenos: A formulação dos conceitos e a argumentação comprobativa dos juízos de inerência.

No tratamento dos conceitos, foram considerados três tipos de definições: as definições explícitas, as definições por recorrência e as definições implícitas. O estudo das definições implícitas suscitou a exposição do método axiomático. Na descrição da definição explícita foi comentado, à propósito da introdução de novos conceitos, o recurso à analogia, à extensão e à oposição.

No tratamento da argumentação, foram referidas as provas restritivas e as provas educadas, as provas justificativas e as provas explicativas.

Finalmente, fez-se uma breve exposição do pensamento estrutural.

Contribuição ao estudo do pensamento matemático

É possível que já seja familiar a diversos estudiosos a interpretação dos fatos históricos que pretendi apresentar como contribuição ao conhecimento descritivo da evolução do pensamento matemático. Todavia, tanto quanto eu saiba, essa interpretação ainda não havia sido traduzida em assertos compilados e documentados mediante dados históricos. Resumo essa interpretação nos parágrafos seguintes.

As ideias que constituem o tecido conceitual do pensamento matemático podem expor-se **implicitamente**, mediante um sistema de postulados, ou podem ser definidas **explicitamente** ou podem ser geradas, mediante as **definições por recorrência**.

Nas definições explícitas, cada noção depende das noções anteriores, que figuram na sua definição, o que, de certo modo, instaura um ordenamento entre elas. A esse sequenciamento de conceitos correspondia a oposição (habitualmente apontada nos textos de Lógica da primeira metade do século XIX) entre *a extensão* e *a compreensão* de um conceito. Tal oposição era descrita, dizendo-se que, quanto maior fosse a extensão de um conceito, tanto menor seria a sua compreensão.

No modo implícito de definir, não ocorre ordenamento, pois cada um dos conceitos pertinentes a uma certa teoria formulada axiomaticamente está intimamente entrelaçado com os demais conceitos dessa teoria.

As definições explícitas consistem simplesmente na substituição de uma oração por uma palavra ou por uma locução. Sob esse aspecto, apenas operam uma redução no conjunto de vocábulos empregados em um texto, à custa de um esforço mnemônico pelos seus potenciais leitores.

Mas, a despeito da simplicidade, as definições explícitas são extremamente úteis na extensão conceitual, especialmente quando dadas *por abstração* de certos elementos contextuais que não são relevantes ao propósito vertente. Em linhas gerais, quando um pesquisador dispõe de um conjunto de objetos matemáticos que lhe parece insuficiente, ele pode ampliá-lo. Mas, muitas vezes, é *enorme* o conjunto de novos objetos que se apresentam à sua consideração. Então, mostra-se oportuna uma redução na *extensão* mediante um aumento na *compreensão*.

O exemplo mais simples e, ao mesmo tempo, mais notável dessa ideia, que encontrei na história do pensamento matemático, foi a definição dos números racionais (*positivos*), que se pode resumir no relato seguinte.

A comunidade humana dispunha dos **números naturais** que, embora constituíssem uma ferramenta eficaz na contagem dos elementos de qualquer conjunto *concreto* (em oposição a *ideal* ou a *virtual*), gozavam de uma propriedade característica: São *bem ordenados* e, por isso, podem ser dispostos consecutivamente. Além disso, é constante a distância entre dois quaisquer elementos consecutivos (segundo a métrica usual). Por isso, os números naturais não se prestam a todas as medidas. (Os geômetras gregos tentaram contornar esse fato, recorrendo às proporções determinadas sobre dois dos lados de um qualquer triângulo por retas paralelas ao terceiro lado, consoante o denominado teorema de Tales.)

Como a inépcia dos números naturais a efetuar medidas decorre de ser igual à unidade *a distância* entre dois elementos consecutivos, então, a fim de obtermos números aptos a efetuar qualquer medida (de grandezas *comensuráveis*), será suficiente recorrer a uma unidade menor de medida, de preferência que se adapte à medida de qualquer problema *concreto*. Isso se obtém, inserindo-se entre dois quaisquer elementos consecutivos outros tantos números. Tecnicamente, é suficiente considerar-se o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Mas, se antes havia poucos elementos, agora os há em demasia. Cumpre pois operar-se uma redução, identificando-se diversos pares, consoante a regra $a/b = c/d$, se e somente se $ad = bc$. Desse modo, os novos números (os números **racionais positivos**) serão *definidos explicitamente* como classes de equivalência. E o mesmo procedimento que permitiu classificarem-se os elementos do produto cartesiano, também permitirá ordenar-se totalmente o conjunto quociente: Dadas duas classes (distintas) de equivalência M e N, tomam-se um qualquer representante a/b da classe M e um qualquer representante c/d da classe N. Consoante o ordenamento dos números *naturais* ad e bc serão ordenadas as classes M e N.

O procedimento adotado para se construirem os números racionais, conhecido como definição **por abstração**, constitui **uma ferramenta indispensável** ao pensamento matemático contemporâneo.

Ao lado das definições implícitas e explícitas, têm um papel específico as definições por recorrência, as quais considero genéticas, na acepção de que produzem novos objetos.

A extensão conceitual é, muitas vezes, obtida por analogia com outras ideias, não é privativa da definição nominal. Aliás, é frequente o recurso à analogia em todo o tecido conceitual do pensamento matemático. O exemplo talvez mais frequente seja a noção de ponto, nascido na geometria euclidiana, que se estendeu tanto para designar elementos de um espaço pluridimensional como para denotar elementos de estruturas muito mais gerais, como variedades diferenciáveis, espaços funcionais, espaços métricos e espaços topológicos.

No capítulo sexto, foi descrito o recurso à analogia em alguns casos bem simples, como a definição dos sistemas hipercomplexos e a definição do corpo dos números algébricos.

Também foi apontado ser frequente o recurso a definições (***o ajuste conceitual***, introduzido no capítulo sexto (na seção dedicada à *divisibilidade em domínios de integridade*), para se preservarem propriedades específicas de certos conjuntos de objetos. E foi sugerido que esse fenômeno seja correlato, na visão de Lakatos, à ideia do cinturão protetor [*protective belt*].

Essencialmente, esse fenômeno consiste na **conversão de um pseudoteorema em uma definição e** admite a seguinte descrição simplificada.

Inicialmente, descobre-se que alguns elementos de um certo conjunto C gozam de uma certa propriedade p. (Na linguagem conjuntual, define-se uma parte não vazia M do conjunto C.) Em seguida, presume-se que tal propriedade seja inerente a todos os elementos de C e esse fato é instituído como teorema (nosso pseudoteorema). (Na linguagem conjuntual, presume-se que M coincida com C.) Então, se enriquece a teoria com o estudo das diversas consequências da propriedade p conjugadas às propriedades de C. Porém, a uma certa altura do amadurecimento da teoria vertente, se descobre que não se sustenta a presunção de que M coincidisse com C: Existem, efetivamente, elementos de C que não estão em M. Isso se descobre quer construindo-se explicitamente tais elementos, quer mediante uma prova indireta, supondo-se que M seja C e encontrando-se uma contradição. Diante disso, efetua-se, apenas, uma correção na trajetória da investigação, definindo-se explicitamente o conjunto M que se converte no sujeito da subteoria elaborada. Desse modo, mediante *um ajuste conceitual*, se preserva grande parte dos resultados que haviam sido obtidos, antes de se detectar o erro de predicação.

Dentre os exemplos estudados, são facilmente aduzidos os casos seguintes, escolhidos um da topologia e outro da álgebra:

(a) Nos espaços métricos, as sequências convergentes apresentam um único limite. Como isso não ocorre nos espaços topológicos, introduziram-se os **espaços de Hausdorff**, que gozam dessa propriedade. Mais precisamente, verificou-se que na unicidade do limite nos espaços métricos decorria da seguinte propriedade: Pontos distintos admitem vizinhanças disjuntas. Essa propriedade foi usada para se definirem os espaços de Hausdorff, nos quais, portanto, vigora a unicidade do limite. Desse modo, foi preservada, no âmbito dos espaços de Hausdorff, toda a teoria dos limites que fora elaborada nos dois séculos anteriores.

(b) No anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, todo ideal é principal, isto é, pode ser gerado por um único elemento. Essa propriedade decorre do algoritmo da divisão euclidiana. Para estender a citada propriedade a um outro qualquer anel A (que pode não ser ordenado), introduziu-se a noção de **anel euclidiano**, exigindo-se a existência de uma função $d:A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ (conjunto dos inteiros não negativos) que desempenha o papel do resto na divisão euclidiana. Assim, o teorema que institui a divisão euclidiana no anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros foi convertido na definição de um novo conceito; e, mediante essa definição, se puderam estender à classe dos anéis euclidianos diversas propriedades do anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

A título de encerramento, lembro que, se for verdadeiro o apotegma de que "*nada mude tão depressa quanto o imutável passado*" [KOYRÉ 1985:379], leituras ulteriores dos fatos históricos comentados na presente tese poderão conduzir a outra interpretação.

Implicações didascálicas

Não é esse o lugar adequado para uma resenha dos estudos pertinentes ao emprego da história da matemática ao ensino da matemática. Os leitores mais interessados nesse tema podem consultar qualquer fascículo da revista ZDM The International Journal on Mathematics Education (antigo *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*).

Meu desígnio nesta seção consiste tão somente em advertir que, embora seja bastante adequado empregar no ensino da matemática o aforismo de que "a ontogênese reproduza a filogênese", isto é, embora seja pertinente conduzir o educando ao longo da trajetória percorrida pela comunidade de matemáticos, no estilo adotado por Harold EDWARDS [1977], na sua *Introdução genética à teoria algébrica dos números*, podem ocorrer situações nas quais o ordenamento didático não deve seguir necessariamente o suposto sequenciamento histórico. No restante desta seção, destinada à defesa desse meu último asserto, considerar-se-ão **três exemplos**, nos quais não me parece que o simples exame do estrito sequenciamento histórico seja a via didática mais adequada.

Meu **primeiro** comentário pontual diz respeito à definição do raio de curvatura. Textos excelentes (como o clássico manual de PISKUNOV [1974A:208]) definem o raio de curvatura de uma curva planar, em um dado ponto, como o inverso do valor absoluto de sua curvatura, no ponto considerado. Penso que essa ideia de definição resulte da **analogia com o caso do círculo**.

Contudo, considero mais pertinente recorrer à **analogia com o círculo**, para se definir o centro de curvatura de um arco de curva (planar e regular), adotando os passos seguintes. (Na verdade, como a curva é descrita como o gráfico de uma função diferenciável, a condição de regularidade é necessariamente preenchida.)

Primeiramente, consideramos um arco de curva planar Γ, de extremidades P e Q, e definimos o centro médio de curvatura desse arco como o ponto de concurso das retas normais a esse arco, traçadas por suas extremidades P e Q. (Nesse caso, estou imitando a determinação do centro de um círculo, que é o ponto de concurso de duas quaisquer normais.) Em seguida, mantenho fixa a extremidade P e faço a outra extremidade, o ponto Q, aproximar-se do ponto P. E defino **o centro de curvatura no ponto P** como o limite C das posições sucessivas da interseção entre as duas retas.

Finalmente (também em **analogia com o círculo**), defino o raio de curvatura no ponto P como a distância entre esse ponto P e o centro de curvatura C do arco Γ, nesse ponto. Instituída a fórmula que exprime a curvatura (exatamente como o faz PISKUNOV [1974A:204-206]), mostro que o valor absoluto da curvatura de uma curva em um ponto coincide com o inverso de seu raio de curvatura, fato que, não raramente, provoca alguma surpresa e contentamento nos estudantes mais interessados. (Esse caminho coincide com a apresentação desses conceitos dada no capítulo segundo desta tese.)

Meu **segundo** apontamento é suscitado pela apresentação do triedro de Serret-Frenet (ou, simplesmente, de Frenet). No notável curso de geometria diferencial de DO CARMO [1976:17-18], o vetor normal e o vetor binormal são introduzidos, depois que se estudou o cadenciamento de curvas parametrizadas. E esse ordenamento é geralmente adotado por diversos autores.

Ora, o cadenciamento de curvas envolve duas ordens de quesitos. Primeiramente, a composição de funções, para se definir a reparametrização de curvas e para se apresentar o lema pertinente ao cálculo da velocidade e da aceleração da curva reparametrizada (*regra da cadeia*). Em segundo lugar, o cadenciamento (ou *reparametrização pelo comprimento do arco*) pressupõe, minimamente, que já se tenha introduzido o conceito de comprimento de arco. É indiscutível que a exposição das **fórmulas de Serret-Frenet** exige que esse percurso seja concluído. Embora essas fórmulas tenham sido obtidas somente em 1847 e publicadas em 1851 [STRUIK 1988:19], a fidelidade ao ordenamento histórico para se introduzir *o triedro de Serret-Frenet* parece, nesse caso, inadequada.

Seja-me permitido um depoimento de caráter pessoal. Em minha experiência docente, tenho lecionado cálculo diferencial, com frequência, a estudantes de Física, de Geofísica e de Engenharia. Esses estudantes são iniciados na teoria dos espaço vetoriais, logo que ingressam no ensino de terceiro grau. Ora, o recurso às técnicas vetoriais se mostra muito adequado no ensino do cálculo, tanto por facilitar a exposição, quanto por articular ideias expostas em outros componentes curriculares com as noções que se apresentam nos cursos de cálculo (o que concorre a **uma percepção integrada da matemática** por parte dos discentes). Além disso, a exposição sugerida por DO CARMO (que adotei, quando iniciei a prática da docência) provocava óbices cognitivos. Os estudantes pensavam que, para entenderem o triedro de Serret-Frenet, teriam que, antes, aprender a reparametrizar curvas e compreender o seu cadenciamento. Esses fatos me autorizaram a escolher uma exposição que privilegiasse a formação dos estudantes, ainda que fosse historicamente falsa. Em resumo, passei a adotar a seguinte apresentação.

(a) Para as curvas parametrizadas *regulares*, defino o vetor tangente (T) como *o versor* (ou *o unitário*) do vetor velocidade. Defino, em seguida, o plano normal.

(b) Definida a aceleração de tais curvas (supostas parametrizadas pela função p), considero o caso no qual p''(t) e p'(t) sejam linearmente independentes e defino o *plano osculador* à curva considerada como o subespaço gerado por esses dois vetores (a menos de translação).

(c) À interseção do plano normal com o plano osculador (a uma mesma curva, no mesmo ponto) chamo *reta normal principal*.

(d) À reta ortogonal ao plano osculador (pelo ponto vertente da curva) chamo reta binormal. (E ao versor dessa direção chamo vetor binormal, B.)

(e) Ao produto vetorial B x T chamo vetor normal (N). Os estudantes parecem perceber claramente que esse vetor normal (N) tem a mesma direção que a reta normal principal.

(f) Como os estudantes sabem que, se for constante a norma de um vetor q(t), então sua derivada q'(t) lhe será ortogonal, também podem recorrer à derivada (d/dt)T, para obter um vetor colinear com o vetor normal N e dotado da mesma orientação.

A apresentação adotada por DO CARMO pode ser muito mais elegante que a minha, porém me louvo no apotegma proferido por Walter Feit (capítulo oitavo desta tese), segundo o qual é preferível instituir "o resultado em *um contexto mais compreensível*". Além disso, ao contrário do triedro de Frenet, as três retas egrégias (a tangente, a normal principal e a binormal) são invariantes sob reparametrização da curva considerada (que lhe preserve a regularidade), ao contrário do que ocorre ao triedro de Serret-Frenet (cf. NIKOLSKY 1977:206). Por isso, é mais simples definirmos conceitos, amparando-nos nessa retas que nos correspondentes vetores do triedro de Frenet.

Meu **terceiro** apontamento refere-se à noção de continuidade de funções. Vimos (no segundo capítulo) que o cálculo das fluxões de Newton se apoiava em uma noção de limite. Vimos, também (no capítulo sétimo) que, embora Newton se houvesse aproximado bastante da conceituação de função contínua, somente depois dos trabalhos de Bolzano, Cauchy e Weierstrass, a comunidade percebeu que a continuidade era uma propriedade acidental das funções. Esse fato pode conduzir à conclusão de que a apresentação didática da noção de limite deva preceder a apresentação da noção de continuidade.

Para refutar essa opinião, poderá ser conduzido o argumento seguinte. Inicialmente, a noção de *função contínua* esteve confundida com a própria noção de *função*. E o próprio conceito de função não era bastante claro. Vimos (no capítulo segundo) que, para definir *a composição analítica de quantidades*, James Gregory recorrera à composição da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão e da radiciação (ou seja, de funções que, na conceituação hodierna, são contínuas) e de '*qualquer outra operação imaginável*'. Vimos, também (no mesmo capítulo segundo), que ainda Euler considerava que o termo 'função' correspondesse a 'uma qualquer curva desenhada à mão livre'. Assim, não surpreende que a percepção da continuidade como propriedade *acidental* das funções (e não como propriedade *inerente*) tenha sido muito posterior à conceituação de 'limite'. Esse episódio admite outra narrativa, segundo a qual a decisão de expurgar do conceito de função todas as propriedades ditas *analíticas* (como a continuidade e a diferenciabilidade) foi conscientemente tomada por Dirichlet (1837), mais de um século e meio depois que o termo fora usado, pela primeira vez, por Leibniz (1673). E, novamente, cerca de um século depois, já sob a influência das

ideias de Skolem (1922), Fraenkel (1925), von Neumann (1925) e Bernays (artigos de 1937 a 1954, resumidos em 1958), se aceitou que uma função f seja apenas uma relação que goza da propriedade: Se $(x,u) \in f$ e $(x,v) \in f$, então $u = v$. [KNEEBONE 2001:290-295; HALMOS 1974:30]

Assim, apoiando-se nesse argumento, poder-se-á afirmar que, na apresentação *didática*, não seja pertinente **subordinar o conceito de continuidade ao conceito de limite**; e que o ordenamento na apresentação *didática* desses conceitos deva repousar sobre uma reflexão mais cuidadosa.

Uma primeira proposta alternativa consiste em notar-se que, no contexto de limites de funções, os limites mais importantes são exatamente aqueles que definem as derivadas, isto é, os limites dos quocientes de Newton, do tipo $\{f(a+h) - f(a)\}/ h$, quando $h \to 0$. Ora, o que se pretende no cálculo desse limite é justamente **prolongar por continuidade** o quociente de Newton a um ponto de acumulação de seu domínio. É claro que me estou beneficiando de uma visão retrospectiva, que dificilmente seria acessível ao próprio Newton. Mas podemos defender que essa visão retrospectiva nos autorize a propor que, no ensino desses conceitos, a continuidade de funções seja exposta antes de ser introduzida a noção de limite. Assim procedendo, em vez de figurar como definição, será apresentado como teorema o fato de que, se f for contínua e se o ponto x_0 for ponto de acumulação do seu domínio, então, quando $x \to x_0$, $\lim f(x) = f(x_0)$.

Minha preferência didática se volta, porém, para outra proposta, a qual me parece mais sedutora e mais próxima da evolução do conceito de continuidade, ainda que introduza uma mudança radical na sua apresentação (e que, por isso, poderá enfrentar a inércia psíquica decorrente do *habitus docendi*).

Na fase de reconstrução da análise (de Bolzano a Weierstrass), na ambição de eliminarem todas as inconsistências até então encontradas, aos atores históricos pareceu adequado assimilar a noção de continuidade à noção de limite, mantida uma distinção essencial: Na conceituação do limite de uma função em um ponto x_0, se exigiu que x_0 fosse ponto de acumulação do domínio da função. E, na conceituação da continuidade de uma função em um ponto x_0, se exigiu que x_0 fosse ponto do domínio da função.

Mas tal assimilação me parece inteiramente artificial, pois **o conceito de limite de uma função tem natureza local, o que não ocorre, *necessariamente*, ao conceito de continuidade de uma função**. Na verdade, foi o conceito de *descontinuidade* que, inicialmente, se apresentou como local. Os exemplos de funções descontínuas em todo um intervalo (como a função de Dirichlet, comentada na seção sobre *a maturescência do cálculo infinitesimal*, do capítulo segundo desta tese) foram concebidas um século e meio depois que se iniciou o emprego do cálculo diferencial e foram, por décadas, consideradas como casos patológicos. Confronte-se, a esse respeito, o comentário feito por Henri Poincaré [1898:4], citado como epígrafe da seção *Novamente* o *conceito de função* (do capítulo segundo).

Por outro lado, somente em 1891, Vito Volterra publicou um estudo sobre as funções pontualmente descontínuas, sendo seguido por René Baire que, em 1898, escreveu uma nota sobre *as funções descontínuas que se desenvolvem em séries de funções contínuas* [*sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues*]. Em seguida, a classificação proposta por Baire foi complementada por Henri Lebesgue, mostrando que nenhuma das classes de Baire era vazia e exibindo um exemplo de uma função que não era prevista pela classificação de Baire. [LUZIN 1998:266; DUGAC 1976:318]

Além disso, na conceituação de função contínua em contextos mais gerais (como os espaços topológicos), **não** é necessário apresentar primeiramente o conceito de função contínua em um ponto, como fazemos, quando definimos a continuidade em um ponto mediante o conceito de limite.

A definição usual de função contínua que figura nos textos de cálculo ou de análise constitui, a meu ver, o ponto de chegada de um longo percurso evolutivo e não o ponto de partida na tarefa de ensinar essa noção a estudantes que se iniciam no cálculo diferencial. Para citar dois textos recentes, FLEMMING & GONÇALVES [2007:106] e STEWART [2005:124], ambos definem a continuidade de uma função em um ponto, mediante o conceito do limite da função no ponto considerado. A meu ver, a apresentação *inicial* do conceito *local* de função contínua é admissível no âmbito de espaços topológicos. Mas, mesmo nesse contexto, diversos autores preferem oferecer, primeiramente, a ideia de função contínua e, somente depois, a ideia de função contínua *em um ponto*. Veja-se, por exemplo, LIMA [1976:60].

Correndo o risco de ser repetitivo, lembro que o conceito de continuidade foi apreendido juntamente com o conceito de função, quando se conheciam sobretudo funções algébricas e, especialmente funções racionais. E lembro que essas funções são contínuas em intervalos. Nisso se baseia minha opinião de que **a ideia de continuidade de uma função tenha sido, em sua origem, um conceito não local**.

Por isso, minha proposta didática consiste em associar a noção de continuidade a outra noção, extremamente clara aos neófitos, a qual, frequentemente, também se apresenta em intervalos, **a monotonia**. (As funções racionais, por exemplo, são monótonas em intervalos.)

Em suma, minha proposta consiste em iniciarmos a apresentação didática da continuidade de funções, dizendo que uma função monótona f no intervalo J é contínua nesse intervalo, se a imagem f(J) desse intervalo por f for um intervalo; resumidamente, se f converter intervalos em intervalos. Em outros termos, diremos que **uma função monótona f é contínua no intervalo J, se essa função f gozar da propriedade de Darboux no intervalo considerado**. (Na seção sobre *a aritmetização da análise*, do capítulo quarto desta tese, foi dito que uma função goza da propriedade de Darboux, quando "não pode passar de um valor a um outro, sem assumir todos os valores intermediários".)

Desse modo, é recuperado, na forma em que foi percebido historicamente, o conceito de função contínua, o qual, hoje em dia, ou é apresentado primeiramente na versão local mediante ε e δ positivos (nos textos de análise) ou é evitado através de sua redução ao conceito de limite (nos textos de cálculo). Embora eu não disponha de dados de caráter estatístico, arrisco afirmar que o conceito de função contínua permanece uma noção *enigmática* para muitos discentes. E isso não causará surpresa, se lembrarmos que, embora Dirichlet houvesse exposto, em 1828, um exemplo de uma função descontínua (em quase todo o seu domínio) que gozava da propriedade de Darboux, ainda em 1847, Cournot tinha da continuidade uma concepção distinta da que foi defendida por Bolzano, Cauchy e Weierstrass (consoante foi narrado na seção *A intuição e a aritmetização da análise*, do capítulo quarto desta tese).

A fim de que o leitor possa entender claramente o teor de minha proposta e se possa convencer de sua viabilidade, apresento dois lemas auxiliares (que reduzem limites de funções a limites de sequências) e dois teoremas (que vinculam a noção de limite de funções definidas em intervalos com a propriedade de Darboux). Os argumentos apresentados baseiam-se em demonstrações oferecidas em textos clássicos, como LIMA [1976:121-122], LIMA [1977:125-126, 139] e LIMA [1982:184], aqui consideradas apenas no âmbito de funções monótonas definidas em intervalos.

Lema A —

Sejam f uma função monótona no intervalo J e z um ponto de acumulação de J. Se $\lim f(x) = L$, quando $x \to z$, então $\lim f(u_n) = L$, quando $n \to \infty$, para toda sequência (u_n) com termos em J e convergente a z.

Argumento: Seja (u_n) uma sequência, com termos em J, convergente a z. Da hipótese decorre que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal, que, para todo ponto x de J, se for $0 < |x - z| < \delta$, também será $|f(x) - L| < \varepsilon$. Da convergência da sequência ao ponto z resulta a existência de um índice m tal, que $|u_n - z| < \delta$, para todos os índices n estritamente maiores que m. Logo, $|f(u_n) - L| < \varepsilon$.

Lema B —

Sejam f uma função monótona no intervalo J e z um ponto de acumulação de J. Se, para toda sequência (u_n) com termos em J e convergente a z, for $\lim f(u_n) = L$, quando $n \to \infty$, também será $\lim f(x) = L$, quando $x \to z$.

Argumento: Se não fosse $\lim f(x) = L$, quando $x \to z$, então existiria um $\varepsilon > 0$ tal, que, para todo $\delta > 0$, haveria um certo s em J, satisfazendo à condição $|s - z| < \delta$ e, nada obstante, $\varepsilon < |f(t) - L|$. Tomando $\delta = 1/n$, para valores sucessivos do índice n (de um certo valor m em diante, de modo que a condição $|u_n - z| < 1/n$ implique a pertinência de u_n a J), obteríamos uma sequência,

com termos em J, convergente a z, cujas imagens por f comporiam uma sequência (u_n) com termos em J e não convergente a L, contradizendo a hipótese.

Teorema A —

Seja f uma função monótona no intervalo J. Se f gozar da propriedade de Darboux nesse intervalo, então, para todo ponto z de J, $f(x) \to f(z)$, quando $x \to z$.

Argumento: Podemos supor que f seja não decrescente e que z seja um ponto interior ao intervalo J. Definamos (como é feito habitualmente) $f(z-) = \sup\{f(t): t \in J, t < z\}$ e $f(z+) = \inf\{f(t): t \in J, t > z\}$.

Decorre da monotonia de f que $f(z-) \leq f(z)$. Suponhamos que seja $f(z-) < f(z)$. Como f goza da propriedade de Darboux, deveria existir em J um ponto ξ tal, que $f(\xi) = (1/2)\{f(z-) + f(z)\}$. Da monotonia de f decorre que não pode ser $z < \xi$. Logo, $\xi \leq z$ e, da definição de f(z-) decorre que $f(\xi) \leq f(z-)$. Como $f(\xi)$ é a média entre f(z-) e f(z), também vigora a relação $f(z-) \leq f(\xi)$. Logo, $f(\xi) = f(z-)$ e $f(z-) = f(z)$, contradizendo a suposição de que fosse $f(z-) < f(z)$. Logo, $f(z-) = f(z)$. De modo análogo, mostramos que $f(z+) = f(z)$.

Finalmente, para mostrarmos que $f(x) \to f(z)$, quando $x \to z$, tomemos $\varepsilon > 0$. De $f(z) - \varepsilon < f(z)$ decorre que $f(z) - \varepsilon < f(z-)$ e da definição de supremo de um conjunto resulta que existe algum s em J tal, que seja $s < z$ e $f(s) > f(z) - \varepsilon$. Assim, tomando $\delta_E = z - s$, certificamos que, se for $0 < z - x < \delta_E$, será $f(z) - f(x) < \varepsilon$. De modo análogo, de $f(z) < f(z) + \varepsilon$ decorre que

$f(z+) < f(z) + \varepsilon$ e da definição de ínfimo de um conjunto resulta existe algum t em J tal, que seja $z < t$ e $f(t) < f(z) + \varepsilon$. Assim, tomando $\delta_D = t - z$, certificamos que, se for $0 < x - z < \delta_D$ será será $f(x) - f(z) < \varepsilon$. Tomando, finalmente, $\delta = \min\{\delta_E, \delta_D\}$, concluímos que $f(x) \to f(z)$, quando $x \to z$.

Teorema B —

Seja f uma função monótona no intervalo J. Se, em cada ponto z de J, $f(x) \to f(z)$, quando $x \to z$, então f gozará da propriedade de Darboux nesse intervalo.

Argumento: Podemos supor que f seja *não decrescente* no intervalo J.

Sejam a e c dois pontos quaisquer de J tais, que $a < c$ e t um qualquer ponto que atenda à condição $f(a) < t < f(c)$. Seja $\Lambda = \{x \in J: f(x) < t\}$. Como Λ não é vazio (pois $a \in J$) e é majorado (por c), Λ admite supremo. Seja $s = \sup \Lambda$. Notemos, inicialmente, que $a < s < c$ e que, portanto, existe f(s).

Mostremos, primeiramente, que $f(s) \leq t$. De fato, se fosse $t < f(s)$, tomaríamos em J uma sequência (u_n) *crescente* e convergente a s. Por hipótese, a sequência $(f(u_n))$ convergiria a f(s). Logo, escolhido $\varepsilon = (1/2)\{f(s) - t\}$, obteríamos $\delta > 0$ tal, que a condição $0 < s - u_n < \delta$ implicasse as desigualdades $f(s) - f(u_n) < \varepsilon$. Daí obteríamos que $t < t + \varepsilon = f(s) - \varepsilon < f(u_n)$, contradizendo a definição de s como supremo de Λ. A existência de uma infinidade de índices n que atendam à condição de que $|s - u_n| < \delta$ é certificada pela convergência de (u_n) a s.

Mostremos, agora, que não pode ser $f(s) < t$. Para tanto, é suficiente mostrar que Λ não admite máximo. Ora, sejam z um qualquer ponto de Λ e v_n uma sequência *decrescente* com termos em J e convergente a z. Como supusemos que f fosse não decrescente, a sequência $(f(v_n))$ também será decrescente e convergirá a f(z). Mas isso significa que, tomando-se $\varepsilon = (1/2)(t - f(z))$, existirá um índice m tal, que, para todo índice $n > m$, $f(v_n) - f(z) < \varepsilon$ ou $f(v_n) < (1/2)(t + f(z))$, isto é, $f(v_n)$ é a média entre t e f(z) e, portanto, menor que t. Isso significa que também v_n está em L e que, portanto, dado um qualquer ponto z em Λ, podemos construir em Λ um ponto maior que z. Logo, Λ não admite máximo e s, o supremo de Λ, não pertence a Λ. Portanto, não pode ser $f(s) < t$.

Dos dois fatos anteriores resulta que $t = f(s)$ e que, portanto, f goza da propriedade de Darboux no intervalo J.

Concluímos do exposto ser legítimo afirmar que, no caso de funções monótonas definidas em intervalos, a continuidade e a propriedade de Darboux são condições equivalentes. Isso nos autoriza a **definir como contínua em um intervalo J** uma função monótona que, nesse intervalo, goze da propriedade de Darboux.

Para dirimir eventual reação a minha proposta de *ensino* do conceito de continuidade de funções em cursos de cálculo diferencial, lembro que a teoria *elementar* da integração se ocupa apenas das funções de variação limitada. Ora, toda função real de variação limitada, definida em um intervalo fechado, se escreve como a diferença entre duas funções monótonas (definidas no mesmo intervalo); e o conjunto de seus pontos de descontinuidade é, quando muito, enumerável. [RUDIN 1964:120-121; BERBERIAN 1979:209]

Lembro, também, que o teorema do valor médio para integrais de funções contínuas de uma variável (isto é, do teorema que institui a existência de um ponto do domínio da função integranda na qual essa função assume o valor médio correspondente) depende apenas de a função vertente gozar da propriedade de Darboux (e, é claro, da existência de mínimo e máximo mas esse fato, habitualmente, não é demonstrado em cursos introdutivos).

Assim, em curso *propedêutico* de cálculo, é suficiente definir-se a continuidade para o caso das funções monótonas. Contudo, nada impede que, já tendo os discentes compreendido claramente a noção de função monótona e contínua em um intervalo, se lhes seja apresentada a

definição *local* de função contínua, recorrendo-se à noção de limite e dizendo-se que a função f é contínua no ponto x_0 de seu domínio, se o ponto x_0 for insulado nesse domínio; senão, se $f(x) \rightarrow f(x_0)$, quando $x \rightarrow x_0$.

Para que melhor se estime o quanto minha proposta didática de introdução à continuidade de funções disside da apresentação corrente, note-se que, no texto clássico de RUDIN [1964], a matéria é exposta consoante o ordenamento seguinte: O limite de uma função (p. 72), funções contínuas (p. 74), continuidade e compacidade (p. 77), continuidade e conexidade (p. 80), descontinuidades (p. 81) e funções monótonas (p. 81).

É claro que minha proposta de introdução à continuidade (mediante funções monótonas em intervalos) presume que o ambiente adotado seja o corpo dos números reais, consoante o axioma: Existe um corpo ordenado e completo (denominado corpo dos números reais). [LIMA 1982:64]

Na ausência da plenitude do corpo (isto é, da propriedade de que todas as suas partes majoradas e não vazias admitam supremo), não subsistiria, para as funções monótonas definidas em intervalos, a equivalência entre a definição habitual da continuidade de funções e a definição que propus. Especialmente, não vigeria tal equivalência no corpo dos números racionais, considerado como espaço métrico, no exemplo dado na seção *Novamente o conceito de função*, do capítulo segundo.

Finalmente, impende-me esclarecer que, embora não saiba de nenhum autor que a tenha defendido, não reivindico que seja inédita essa proposta de ensino do conceito de continuidade de funções.

Prolongamento da investigação

A descrição proposta nesta tese é, sob certo aspecto, fragmentada, no sentido de que resultou do exame de fatos históricos, através do qual se contemplavam, separadamente, os diversos aspectos presentes. Um outro modo de qualificar a descrição proposta consiste em atribuir-lhe o predicado 'analítico', para lembrar um outro modo de descrição, o modo *sintético*.

Uma caracterização sintética das teorias físicas, que se poderia tentar aplicar também às teorias matemáticas foi sugerida por Ernst Mach. "Acreditava ele que todo o conhecimento estivesse dirigido para a adaptação do animal ao seu meio ambiente. Todos os conceitos, as teorias, as máximas e assim por diante eram, para ele, funções de nosso instinto de sobrevivência biológica." [JANIK & TOULMIN 1991:153]

Karl Popper ensinou que a adaptação do seres humanos ocorre em três níveis: a adaptação genética, a adaptação do comportamento e a adaptação cognitiva. E que essa última se processa, mediante a produção do conhecimento científico. [PELUSO 1995:108-109]

Defendeu ainda Popper que a teoria da evolução proposta por Darwin, ao apontar que a evolução das espécies se processe por tentativas e eliminação de erro, apresenta semelhança ao modo evolutivo das teorias científicas. [PELUSO 1995:95]

A fim de obtermos uma outra caracterização abrangente do modo evolutivo das teorias matemáticas, poderemos recorrer às noções da teoria dos sistemas do biólogo Ludwig von Bertalanffy.

Muito resumidamente, definiu BERTALANFFY [1975:84] que os elementos de um conjunto estão em **interação**, quando a mudança no comportamento de um deles repercute no comportamento dos outros. E que **um sistema** é um conjunto cujos elementos estão em interação.

Consoante essa definição, um sistema de postulados pode ser pensado como um sistema, na acepção cibernética de Bertalanffy.

BERTALANFFY [1975:82-83] predica como **aditivas** as propriedades de um sistema decorrentes da natureza e da cardinalidade de seus elementos. Mas as propriedades *estruturais* de um sistema não decorrem da reunião de seus elementos.

Essa conceituação de propriedades estruturais coincide com a noção aceita nas teorias axiomáticas (cf. o capítulo nono desta tese).

Outra noção que desempenha papel fundamental na teoria dos sistemas é o conceito de **organismo**, como um sistema espontaneamente ativo que, "mesmo sob condições externas constantes e na ausência de estímulos externos", apresenta um nível significativo de atividade. [BERTALANFFY 1975:149]

De acordo com essa definição, as teorias matemáticas se comportam como organismos, pois mesmo sem contacto com o *mundo físico*, continuam a evolver.

Além disso, alguns sistemas possuem uma característica, denominada **segregação progressiva**, que consiste na fragilidade estrutural, na acepção de que, no curso do tempo, se reduz o nível de interação entre as partes, que passam a manifestar uma certa autonomia. [BERTALANFFY 1975:101]

Também isso acontece com as teorias matemáticas, cujas partes se podem tornar autônomas, sob a ação de um processo de crescimento muito intenso, como ocorreu, por exemplo, com a álgebra comutativa, que era apenas um capítulo da teoria dos anéis.

A teoria dos sistemas também incorporou um conceito, oriundo da fisiologia, sob o nome de **homeóstase** (ou *equilíbrio dinâmico*), que corresponde na físico-quimica ao princípio de Le Chatelier e na mecânica ao princípio de Maupertuis: Sempre que um agente externo a um sistema (isto é, um agente que não pertence ao sistema considerado) atuar sobre esse sistema, o sistema reagirá, de sorte que a perturbação causada pelo citado agente seja minimizada. Se o sistema conseguir retornar a condições próximas das anteriores, diremos que o sistema é **estável**; senão, que o sistema é **instável** e que a perturbação atingiu um valor crítico.

As teorias matemáticas, em geral, se têm comportado como organismos estáveis. Mas me parece que, nesse caso, o princípio da homeóstase deva ser estendido, a fim de incluir também os perturbantes internos (as *crises* na teoria de Thomas Kuhn). O fenômeno que designei acima como ajuste conceitual (a conversão de um pseudoteorema em definição) constitui um modo de reação do organismo (a teoria) a uma situação imprevista. E, quando uma teoria se desgarra, a teoria que lhe deu origem não se degrada necessariamente, pois pode enriquecer-se em outra direção. Por exemplo, a *analysis situs* reunia o estudo tanto dos processos contínuos quanto dos processos diferenciáveis. (Para Henri Poincaré, por exemplo, *homeomorfismo* designava o que hoje descrevemos por *difeomorfismo de classe infinita*). À medida que o estudo dos fenômenos diferenciáveis se foi constituindo em uma disciplina autônoma (topologia diferencial e teoria das variedades diferenciáveis), a antiga *analysis situs* se converteu na topologia geral, que trata apenas das funções contínuas (ou, como se prefere dizer, da classificação de espaços, a menos de homeomorfismos).

Finalmente, como os organismos vivos que exigem alimento (exigência que se manifesta em intervalos de tempo distintos, conforme a espécie animal ou vegetal), também as teorias matemáticas devem nutrir-se quer de problemas novos (de acordo com a alocução de Hilbert, proferida no Congresso de Paris, em 1900, e discutida na última seção do capítulo oitavo), quer de novas ideias empíricas, de acordo von Neumann:

> "Quando se afasta muito de sua fonte empírica [...], uma disciplina matemática é afligida por graves perigos. [...] Há o perigo de que o tema se desenvolva ao longo da linha de menor resistência, de que a corrente, tão longe de sua fonte, se separe em uma diversidade de ramos insignificantes e que a disciplina se torne um acervo desorganizado de minúcias e de complexidades. Em outros termos, a grande distância de sua fonte empírica ou após muita proliferação *consanguínea abstrata*, um tema matemático corre o risco de degenerar. [...] Em qualquer caso, sempre que chegar a essa fase, o único remédio que enxergo é o retorno rejuvenescente à fonte: A reinjeção de ideias mais ou menos diretamente empíricas." [NEUMANN 1947:186]

Assim, para verificar até que ponto o modelo oferecido pela teoria dos sistemas de Bertalanffy pode descrever acuradamente a evolução das teorias matemáticas, caberá um estudo histórico de **espectro mais amplo**, que contemple, pelo menos, os seguintes **casos históricos**:

- A teoria dos invariantes, cf. FISHER [1966] *The death of a mathematical theory*. Ocorreu absorção por outra teoria?

- Os motivos do declínio da geometria projetiva, que fora considerada por Cayley (em 1859) "toda a geometria", juízo que persistiu até 1917. [RICHARDS 1986:310; COXETER 1977:22] O seu ocaso terá sido consequente ao crescimento impetuoso de sua 'irmã gêmea' [STRUIK 1987:164], a geometria algébrica? Essa investigação é tanto mais importante por a geometria projetiva haver sido o berço da noção de dualidade, que reapareceu na obra de Henri Poincaré e, mais recentemente, foi convertida na dualidade de Eckmann-Hilton e na dualidade forte [*strong duality*] de Dold e Pupp. [BECKER & GOTTLIEB 1996]

- Como, situar, no âmbito da teoria dos sistemas, a algebrização de teorias e a tendência antípoda, a geometrização de teorias, que se efetuou através da estrutura de espaço de Hilbert e, mais recentemente, através dos espaços simplécticos (cuja abrangência inclui algumas teorias físicas)? Para responder a essas perguntas, será necessário perseguir, também, cuidadosamente, a evolução da topologia algébrica e da topologia diferencial.

- Como entender o relacionamento entre a análise clássica e a análise não canônica.

- Como descrever organicamente a influência recíproca entre as ideias matemáticas e as ideias filosóficas. Tal influência tem sido revelada nos casos de René Descartes (capítulo segundo), de Gottfried Leibniz (capítulo segundo), de Isaac Newton (capítulo segundo), Carl Gauss (capítulo terceiro), Bernhard Riemann (capítulo terceiro), Hermann Grassmann (capítulo quinto), Rowan Hamilton (capítulo sexto), Georg Cantor [DAUBEN 1977; HILL 1977].

- Como descrever o impacto das ideias físicas sobre os constructos matemáticos. Foi indicada, no capítulo segundo, a repercussão sobre a teoria das equações diferenciais dos avanços obtidos na mecânica. Mas a influência das ideias físicas se tornou mais premente, através do princípio da menor ação no cálculo das variações [SILVA 2006], da teoria geral da relatividade na geometria diferencial [ROMERO & DAHIA 2005] e da teoria dos quantos na teoria da representação dos grupos, na teoria dos operadores em espaços de Hilbert e na teoria dos espaços simplécticos [LOCHAK 1994].

Fontes referidas

- AABOE, Asger [1984]. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

- ABADÍA, Oscar Moro [2008]. Beyond the whig history interpretation of history: lessons on 'presentism' from Hélène Metzger. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 39 (2008) 194-201.

- ABRANTES, Paulo [2002]. *Problemas metodológicos em historiografia de ciência*. In: SILVA Filho [2002:51-91].

- AHNERT, Thomas [2004]. Newtonianism in early Enlightenment Germany, circa 1720 to 1750; metaphysics and the critique of dogmatic philosophy. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 35 (2004) 471-491.

- ALEXANDROV, A. D. [1956]. *Geometrias no euclidianas*. In: ALEXANDROV et alii [1976c:124-227].

- ALEXANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. [1976 (1956)]. *La matemática, su contenido, métodos y significado*, três tomos. Madrid, Alianza Editorial.

- ALEXANDROV, P. S. [1956]. *Topología*. In: ALEXANDROV et alii [1976c:231-266]

- ALFONSO-GOLDFARB & BELTRAN [2004]. *Escrevendo a história da ciência: tendências, propostas e discussões historiográficas*. São Paulo, EDUC.

- ALVAREZ, Carlos [2003]. Two ways of reasoning and two ways of arguing in geometry. Some remarks concerning the application of figures in Euclidean geometry. Euclidean geometry. *Synthese*, vol. 134 (2003) 289-323.

- ARAÚJO, Paulo Ventura [1998]. *Geometria diferencial*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- ARNOLD, D. H. [1983A]. The *Mécanique physique* of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840) — I. Physics in France after the revolution. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 28, n. 3 (September 1983) 243-266.

- ARNOLD, D. H. [1983B]. The *Mécanique physique* of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840) — II. The

Laplacian program. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 28, n. 3 (September 1983) 267-287.

- ARNOLD, D. H. [1983E]. The *Mécanique physique* of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840) — V. Fresnel and the circular screen. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 28, n. 3 (September 1983) 321-342.

- ARTIN, Emil [1950]. The influence of Wedderburn on the development of modern algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society* 56 (1950) 65-72.

- ARTIN, Emil [1953]. Éléments de mathématique, by Bourbaki: Book II, Algebra, chapter I-VII (*review*). *Bulletin of the American Mathematical Society* 59 (1953) 474-479.

- ATIYAH et alii (1994). Responses to 'Theoretical mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics', by A. Jaffe and F. Quinn. *Bulletin (new series) of the* American Mathematical Society, vol. 30 n. 2 (April 1994) 178-207.

- ATIYAH, Michael; MacDONALD, I. [1969]. *Introduction to commutative algebra*. Oxford, Westview Press.

- ATIYAH, Michael; MINIO, Roberto [1984]. An interview with Michael Atiyah. *The mathematical intelligencer*, vol. 6, n. 1 (1984) 9-19.

- AUBIN, David [1997]. The withering immortality of Nicolas Bourbaki: a cultural connector at the confluence of mathematics, structuralism, and the Oulipo in France. *Science in Context*, vol. 10, n. 2 (1997) 297-342.

- AVENS, Roberts [1993]. *Imaginação é realidade*. Petrópolis, Editora Vozes.

- AWODEY, S. [1996]. Structures in mathematics and logic: a categorical perspective. *Philosophia Mathematica*, vol. 4, n. 3 (September 1996) 209-237.

- AWODEY, S. [2004]. An answer to Hellman's question: Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? *Philosophia Mathematica*, vol. 12, n. 1 (February 2004) 54-64.

- BABB, Jeff [2005]. Mathematical concepts and proofs from Nicole d'Oresme. *Science and Education* 14 (2005) 443-456.

- BABINI, José [1974]. *Historia de las ideas modernas en matemática*. Washington, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

- BABOR, Joseph A.; IBARZ, José [1960]. *Química general moderna*. Barcelona, Ediciones Manuel Marín.

- BACHELARD, Gaston [1978 (1934)]. *Le nouvel esprit scientifique*. Paris, Presses Universitaires de France.

- BACHMAN, George; NARICI, Lawrence [1966]. *Functional analysis*. New York, Academic Press.

- BAIRE, René; BOREL, Émile; HADAMARD, Jacques; LEBESGUE, Henri [1905]. Cinq lettres sur la théorie des ensembles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 33 (1905) 261-273.

- BALTUS, Christopher [2004]. D'Alembert proof of the fundamental theorem of algebra. *Historia Mathematica*, vol. 31 (2004) 414-428.

- BARBEAU, E. J. [1979]. Euler subdues a very obstreperous series. *The American Mathematical Monthly*, vol. 86, n. 5 (1979) 356-372.

- BARKE, Antonia [2004]. Epistemic contextualism. *Erkenntnis* 61 (2004) 353-373.

- BARKER, Stephen F. [1976]. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro, Zahar Editores.

- BARROW, John D. [1994 (1991)]. *Teorias de tudo – A busca da explicação final*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- BASHMAKOVA, I. G.; RUDAKOV, A. N. [1995]. The evolution of algebra 1800-1870. *The American Mathematical Monthly*, vol. 102, n. 3 (March 1995) 266-270.

- BASSALO, José Maria Filardo [1992]. *Crônicas da Física*, tomo 3. Belém, Editora da Universidade Federal do Pará.

- BASSALO, José Maria Filardo [1996]. *Nascimentos da Física*: *3500 a.C. — 1900 a.D*. Belém, Editora da Universidade Federal do Pará.

- BEAULIEU, Liliane [1999]. Bourbaki's art of memory. *Osiris* 2nd. series, vol. 14, Commemorative practices in science: Historical perspectives on the politics of ollective memory (1999) 219-251.

- BECKER, James C.; GOTTLIEB, Daniel Henry [1996]. A history of duality in algebraic topology. <http://www.math.purdue.edu/~gottlieb/Bibliography/53.pdf>

- BEHBOUD, Ali [2006]. The mathematical works of Bernard Bolzano, by Steve Russ. *Philosophia Mathematica*, vol. 14, n. 3 (October 2006) 352-362.

- BELL, John L. [2006]. Bolzanos's philosophy and the emergence of modern mathematics, by Paul Rusnock. *Philosophia Mathematica*, vol. 14, n. 3 (October 2006) 362-364.

- BELNA, Jean-Pierre [2002]. Frege et la géométrie projective: La Dissertation inaugurale de 1873. *Revue d'histoire des sciences* tome 55, n. 3 (2002) 379-410.

- BENIS-SINACEUR, Hourya [1987]. Structure et concept dans l'épistémologie de Jean Cavaillès. *Revue d'histoire des sciences* tome 40, n. 1 (1987) 5-30.

- BENIS-SINACEUR, Hourya [1988]. Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch. F. Sturm. *Revue d'histoire des sciences* tome 41, n. 2 (1988) 99-132.

- BENIS-SINACEUR, Hourya [1992]. Cauchy, Sturm et les racines des équations. *Revue d'histoire des sciences* tome 45, n. 1 (1992) 51-68.

- BERBERIAN, S. K. [1979]. Regulated functions: Bourbaki's alternative to the Riemann integral. *The American Mathematical Monthly*, vol. 86, n. 3 (March 1979) 208-211.

- BERKELEY, George [2002 (1735)]. A defence of free-thinking in mathematics. Edited by David R. Wilkins.

- BERNIS, Jeanne [1987 (1954)]. *A imaginação. Do sensualismo epicurista à psicanálise*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- BERNKOPF, M. [1966]. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 3, n. 1 (1966) 1-96.

- BERTALANFFY, Ludwig von [1975]. *Teoria geral dos sistemas*. Petrópolis, Editora Vozes.

- BETH, Evert W. [1955]. *Les fondements logiques des mathématiques*. Louvain, E. Nauwelaerts.

- BETH, Evert W. [1959]. *The foundations of mathematics*. New York, Harper and Row.

- BETH, Evert W.; Piaget, Jean [1961]. *Épistémologie mathématique et psychologie - Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*. Paris, Presses Universitaires de France.

- BIRKHOFF, Garret [1969]. Mathematics and psychology. SIAM Review, vol. 11, n. 4 (October 1969) 429-469.

- BIRKHOFF, Garret; MAC LANE, Saunders [1965 (1941, 1953)]. *A survey of modern algebra*. New York, The Macmillan Company.

- BIRKHOFF, Garret; VON NEUMANN, John [1936]. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, vol. 37 n. 4 (October 1936) 823-843.

- BKOUCHE, Rudolf [2006]. La géométrie entre mathématiques et sciences physiques. *Proceedings of the Fourth International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, vol. II. (Editados por M. KOURKOULOS et alii, Université de Crète, ISBN 960-88712-3-9.)

- BOCHENSKI, Ioseph M. [1951]. *Ancient formal logic*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

- BOCHENSKI, Ioseph M. [1962]. *A filosofia contemporânea ocidental*. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária.

- BOCHNER, Salomon [1974]. Mathematical reflections. *The American Mathematical Monthly*, vol. 81, n. 8 (Oct. 1974) 827-852.

- BOI, Luciano [1994]. Die Beziehungen zwischen Raum, Kontinuum und Materie im Denken Riemanns: die Äthervorstellung und die Einheit der Physik - Das Entstehen einer neuen Naturphilosophie. *Philosophia naturalis*, vol. 31 (n. 2 (1994) 171-216.

- BOLYAI, Johann [1896 (1832)]. *The science of absolute space*. In: BONOLA [1955:271]

- BONIFACE, Jacqueline; SCHAPPACHER, Norbert [2001]. 'Sur le concept de nombre en mathématique', cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891). *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 7 (2001) 207-275.

- BONOLA, Roberto [1955 (1906)]. *Non-Euclidean geometry*. New York, Dover Publications.

- BOREL, Armand [1994]. Some comments on the article by A. Jaffe and F. Quinn. In: ATIYAH et alii [1994:179-181].

- BOREL, Armand [1998]. Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 45, n. 3 (March 1998) 373-380.

- BOREL, Armand [2001A]. *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*. American Mathematical Society - London Mathematical Society.

- BOREL, Armand [2001B]. André Weil. *Proceedings of the American Philosophical Society*, vol. 145, n. 1 (March 2001) 107-114.

- BOREL, Émile [1962]. *La définition en mathématiques*. In: Le LIONNAIS [1962:24-34].

- BOS, Henk J. M. [1974]. Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14, n. 1 (1974) 1-90.

- BOS, Henk J. M. [1984]. Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the "construction of equations", 1637 - circa 1750. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 30, n. 3-4 (1984) 331-380.

- BOTTAZZINI, Umberto [2001]. I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899). La Matematica nella Società e nella Cultura. *Bolletino dell'Unione Matematica Italiana*. Serie VIII, vol. IV-A (agosto 2001) 281-329.

- BOTTAZZINI, Umberto [2002]. 'Algebraic truths' versus 'geometric phantasies': Weierstrass' response to Riemann. ICM 2002. arXiv:math.HO/0305022 v1 1 MAY 2003.

- BOTTAZZINI, Umberto; TAZZIOLI, Rossana [1995]. *Naturphilosophie* and its role in Riemann's mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, 1 (1995) 3-38. Société Mathématique de France.

- BOURBAKI, Nicolas [1949]. Foundations of mathematics for the working mathematician. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, n. 1 (March 1949) 1-8.

- BOURBAKI, Nicolas [1960]. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris, Hermann.

- BOURBAKI, Nicolas [1962]. *L'architecture des mathématiques*. In: Le LIONNAIS [1962:35-47].

- BOURBAKI, Nicolas [1964]. *Élements de mathématique, fascicule IV, livre II, algèbre, chapitre I, structures algébriques*. (Actualités scientifiques et industrielles, 1144.) Paris, Hermann.

- BOUTROUX, Pierre [1920]. *L'idéal scientifique des mathématiciens*. Paris, Librairie Félix Alcan.

- BOYCE, William E.; DiPRIMA, Richard C. [1969]. *Elementary differential equations and boundary value problems*. New York, John Wiley.

- BOYER, Carl B. [1943]. Zero: the symbol, the concept, the number. *National Mathematics Magazine*, vol. 17 (1942-1943) 323-330.

- BOYER, Carl B. [1948]. Clairaut and the origin of the distance formula. *The American Mathematical Monthly*, vol. 55, n. 9 (1948) 556-557.

- BRACHO, Javier [1989]. *En qué espacio vivimos?* México, Fondo de Cultura Económica.

- BRADLEY, Robert E. [2009]. Lacroix and the calculus, by João Caramalho Domingos. *Historia Mathematica*, vol. 36 (2009) 437-439.

- BRAGA, Ruben [1991]. *A apercepção originária de Kant na física do século XX*. Brasília, Editora da UNB.

- BRANDÃO, Junito de Souza [1993]. *Mitologia grega*, volume 1. Petrópolis, Editora Vozes.

- BRATING, Kajsa [2007]. A new look at E. G. Björling and the Cauchy theorem. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 61, n. 5 (2007) 519-535.

- BRATING, Kajsa; PEJLARE, Johanna [2008]. Visualizations in mathematics. *Erkenntnis*, vol. 68 (2008) 345-358.

- BREITENBERGER, Ernst [1984]. Gauss' geodesy and the axiom of parallels.

- BRIGAGLIA, Aldo; CILIBERTO, Ciro [2004]. Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the twentieth century. *Historia Mathematica* 31(2004) 310-319.

- BRILLHART, John; MORTON, Patrick [1996]. A case study in mathematical research: the Golay-Rudin-Shapiro sequence. *The American Mathematical Monthly*, vol. 103, n. 10 (December 1996) 854-869.

- BROCKHAUS, F. A. [1972]. Deutsches Bildwörterbuch. Wiesbaden, Brockhaus.

- BROWN, Kenneth S. [2002]. What is a buiding? *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 49, n. 10 (November 2002) 1244-1245.

- BRUNEAU, Olivier [2007]. *Review to* Newton et les origines de l'analyse: 1664-1666, by Marco Panza. *Historia Mathematica*, vol. 34 (2007) 225-240.

- BRUNSCHVICG, Léon [1972 (1912)]. *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris, Albert Blanchard.

- BRUSAMARELLO, Rosali; MONTE CARMELO, Emerson L. [2007]. Paul Erdös, o mago. *Matemática Universitária*, n. 43 (dezembro 2007) 74-81.

- BUENO, Hamilton Prado [2006]. *Álgebra linear, um segundo curso*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

- BULLYNCK, Maarten [2009]. Modular arithmetic before Gauss: systematizations and discussions on remainder problems in eighteenth-century Germany. *Historia Mathematica*, vol. 36 (2009) 48-72.

- BUNGE, Mario [1976 (1974)]. *Tratado de filosofia básica. Semântica*. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária.

- BURKE, Peter [1992 (1991)]. *A escrita da história: novas perspectivas*. São Paulo, Editora da UNESP.

- BURTT, Edwin A. [1991 (1984)]. As bases metafísicas da ciência moderna. Brasília, Editora da UNB.

- CAJORI, Florian [1917]. Discussion of fluxions: From Berkeley to Woodhouse. *The American Mathematical Monthly*, vol. 24, n. 4 (April 1917) 145-154.

- CARMO, Manfredo Perdigão DO [1976]. *Differential geometry of curves and surfaces*. New Jersey, Prentice-Hall.

- CARMO, Manfredo Perdigão DO [1987]. Geometrias não-euclidianas. *Matemática Universitária*, n. 6 (1987) 25-48.

- CARMO, Manfredo Perdigão DO [1988]. *Geometria riemanniana*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- CARSON, Emily [2006]. Kant et les mathématiques: La conception kantienne des mathématiques, Frank Pierobon (review). *Philosophia mathematica*, vol. 14, n. 3 (October 2006) 370-378.

- CARTAN, Henri [1943]. Sur le fondement logique des mathématiques. *Revue Scientifique*, vol. 122 (Janvier 1943) 3-11.

- CARTIER, Pierre [2000]. Mathemagics (a tribute to L. Euler and R. Feynman). *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* 44 (2000) 1-71 Article B44d.

- CASACUBIERTA, C.; CASTELLET, M. [1991] *Mathematics research today and tomorrow*. Berlin, Springer-Verlag.

- CASANOVA, Gaston [1976]. L'algèbre vectorielle. Pars, Presses Universitaires de France.

- CASINI, Paolo [1995]. *Newton e a consciência europeia*. São Paulo, Editora da UNESP.

- CASSIRER, Ernst [1997 (1932)]. *A filosofia do iluminismo*. Campinas, Editora da UNICAMP.

- CHALMERS, Alan F. [1997 (1982)]. *O que é a ciência, afinal?* São Paulo, Editora Brasiliense.

- CHANGEUX, Jean-Pierre; CONNES, Alain [1991 (1989)]. *Matéria pensante*. Lisboa, Gradiva.

- CHASLES, Michel [1837]. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se raportent à la géométrie moderne*. Bruxelles, M. Hayez (Imprimeur de l'Académie Royale).

- CHÂTELET, François [1994 (1992)]. *Uma história da razão*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- CHEN, Xiang [1997]. The debate on the 'polarity of light' during the optical revolution. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 50, n. 3-4 (1997) 359-393.

- CHERN, Shiing-Shen [1990]. What is geometry? *The American Mathematical Monthly*, vol. 97, n. 8 (October 1990) 679-686.

- CHEVALLEY, Claude [1956]. *Fundamental concepts of algebra*. New York, Academic Press.

- CHILOV, G. [1973A]. *Analyse mathématique - fonctions d'une variable*, première et deuxième parties. Moscovo, Éditions Mir.

- CHILOV, G. [1973B]. *Analyse mathématique - fonctions d'une variable*, troisième partie*: Chapitres choisie de l'analyse moderne*. Moscovo, Éditions Mir.

- CHILOV, G. [1975]. *Analyse mathématique — Fonctions de plusieurs variables réelles*, première et deuxième parties. Moscovo, Éditions Mir.

- CHIMISSO, Cristina [2001]. Hélène Metzger: The history of science between the study of mentalities and total history. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 32 n. 2 (2001) 203-241.

- CHIMISSO, Cristina [2003]. The tribunal of philosophy and its norms: history and philosophy in Georges Canguilhem's historical epistemology. *Studies in History and Philosophy of Biological and Biomedical Sciences*, vol. 34 (2003) 297-327.

- CHURCH, Alonzo [1952]. La objeción de Grandjot a la teoría de Peano del número natural, by Pedro Pi Calleja. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 17, n. 3 (September 1952) 199-200.

- CHURCH, Alonzo [1955]. Sulla critica di Grandjot all'aritmetica di Peano, by Ugo Cassina. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 20, n. 2 (June 1955) 175-176.

- CLEAVE, John P. [1971]. Cauchy, convergence and continuity. *The British Journal for the philosophy of Science* 22 (1971) 27-37.

- CLÉRO, Jean-Pierre [1998]. La réflexion benthamienne sur les mathématiques. *Revue de synthèse* n. 4 (octobre - décembre 1998) 447-484.

- COHEN, Morris R. [1911]. The present situation in the philosophy of mathematics. *The Journal of Philosophy, Psychology, and Scientific Methods*, vol. 8, n. 20 (September 1911) 533-546.

- COLEMAN, A. J. [1989]. The greatest mathematical paper of all time. *The Mathematical Intelligencer,* vol. 11, n. 3 (1989) 29-38.

- CONNES, Alain [2004]. A view of mathematics. <http://www.alainconnes.org/docs/maths.pdf>

- CONNOR, J. J. O'; ROBERTSON, E. F. *MacTutor History of Mathematics*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>.

- CONSTANTIN, Peter [2001]. An Eulerian-Lagrangian approach for incompressible fluids: local theory. *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 14, n. 2 (2001) 263-278.

- COOLIDGE, Julian Lowell [1940]. *A history of geometric methods*. Oxford, Clarendon Press.

- CORRY, Leo [1989]. Linearity and reflexivity in the growth of mathematical knowledge. *Science in Context* 3, n. 2 (1989) 409-440.

- CORRY, Leo [1992]. Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure. *Synthese* 92 (1992) 315-348.

- CORRY, Leo [1993]. Kuhnian issues, scientific revolutions and the history of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 24, n. 1 (1993) 95-117.

- CORRY, Leo [1996]. Corps et modèles — Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle, by Hourya Benis-Sinaceur (review). *Historia Mathematica*, vol. 23 (1996) 323-327.

- CORRY, Leo [1997A]. The origins of eternal truth in modern mathematics: Hilbert to Bourbaki and beyond. *Science in Context*, vol. 10, n. 2 (1997) 253-296.

- CORRY, Leo [1997B]. David Hilbert and the axiomatization of physics (1894-1905). *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 51, n. 2 (1997) 83-198.

- CORRY, Leo [1998]. Los veinte y tres problemas de Hilbert y su trasfondo histórico. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. V, n. 2 (1998) 119-125.

- CORRY, Leo [2000]. The origins of the definition of abstract rings. *Modern Logic*, vol. 8, n. 1-2 (January 1998-April 2000) 5-27.

- COSTA, Newton Carneiro Afonso DA [1992]. *O conceito de estrutura em ciência*. In: KATZ & DORIA [1992:189-201].

- COSTA, Newton Carneiro Afonso DA [1994]. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo, Editora HUCITEC.

- COSTA, Newton Carneiro Afonso DA [1999]. *O conhecimento científico*. São Paulo, Discurso Editorial.

- COSTA, Newton Carneiro Afonso DA; BUENO, Otávio; COELHO, Antônio M. N. [1995]. *Uma estrutura de Suppes para o tempo*. In: ÉVORA [1995:93-108]

- COTTERET, Marie-Ange [ ]. *Métrologie et enseignement* (thèse de doctorat]. http://mac.quartier-rural.org/these/ partie2_these_mac.pdf

- COXETER, H. S. M. [1949]. *The real projective plane*. New York, McGraw-Hill.

- COXETER, H. S. M. [1977]. The Erlangen program. *The Mathematical Intelligencer,* vol. 1, supplement 1 (1977) 22-30.

- COZZOLI, Daniele [2007]. Alessandro Piccolomini abd the certitude of mathematics. *History and philosophy of logic*, vol. 28 (May 2007) 151-171.

- CRAIK, Alex D. D. [1999]. Calculus and analysis in early nineteenth-century Britain: the work of William Wallace. *Historia Mathematica*, vol. 26 (1999) 239-267.

- CROWE, Michael J. [1975]. Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, vol. 2 (1975) 161-166.

- CUVILLIER, Armand [1961 (1956)]. *Pequeno vocabulário da língua filosófica*. São Paulo, Companhia Editora Nacional.

- DASTON, Lorraine J. [1986] The physicalist tradition en early nineteenth century French geometry. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 17, n. 3 (1986) 269-295.

- DASTON, Lorraine J. [1991]. Marvelous facts and miraculous evidence in early modern Europe. *Critical Inquiry*, vol. 18, n. 1 (Autumn 1991) 93-124.

- DAUBEN, Joseph W. [1977]. Georg Cantor and pope Leo XIII: mathematics, theology, and the infinite. *Journal of the history of ideas*, vol. 38, n. 1 (January-March 1977) 85-108.

- DAUBEN, Joseph W. [1988]. Abraham Robinson and nonstandard analysis: history, philosophy and foundations of mathematics. *History and philosophy of modern mathematics. Minnesota studies in the philosophy of science*, vol. XI, eds. W. Aspray and P. Kitcher, University of Minnesota Press, Minneapolis (1988) 177-200.

- DAVIS, Martin; PUTMAN, Hilary; ROBINSON, Julia [1961]. The decision problem for exponential diophantine equations. *The Annals of Mathematics*, second series, vol. 74, n. 3 (November 1961) 425-436.

- DAVIS, Philip J.; ANDERSON, James A. [1979]. Nonanalytic aspects of mathematics and their implication for research and education. *SIAM review* , vol. 21, n. 1 (January 1979) 112-127.

- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben [1985 (1982)]. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro, Francisco Alves.

- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben [1988 (1986)]. *O sonho de Descartes*. Rio de Janeiro, Francisco Alves.

- DEDEKIND, Richard [1963 (1872)]. *Continuity and irrational numbers* [*Stetigkeit und irrationale Zahlen*]. New York, Dover Publications.

- DEDEKIND, Richard [1963 (1893)]. *The nature and meaning of numbers* [*Was sind und was sollen die Zahlen?*]. New York, Dover Publications.

- DELACAMPAGNE, Christian [1997]. *História da filosofia no século XX*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- DELACHET, André [1973 (1950)]. *La géométrie contemporaine*. Paris, Presses Universitaires de France.

- DELONE, B. N. [1956]. *Geometría* analítica. In: ALEXANDROV et alii [1976:225-313].

- DEMIDOV, S. S. [1982]. The study of partial differential equations of the first order in the eighteenth and nineteenth centuries. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 26, n. 4 (1982) 325-350.

- DENJOY, Arnaud [1962 (1948)]. L'innéité du transfini. In: LE LIONNAIS [1962:188-195].

- DESANTI, Jean-Toussaint [1962]. *De Cauchy à Riemann, ou la naissance de la théorie des fonctions de variable réelles*. In: Le LIONNAIS [1962:179-187].

- DHOMBRES, J. [1986]. Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 36, n. 2 (1986) 91-181.

- DIDEROT, Denis [1754]. *Pensées sur l'interprétation de la nature*. Digitado pela Universidade de Toronto. <http://www.archive.org/details/pensesuelinte00dide>

- DIEUDONNÉ, Jean (ed.) [1986 (1978)]. *Abregé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. Paris, Hermann.

- DIEUDONNÉ, Jean [1970]. The work of Nicolas Bourbaki. *The American Mathematical Monthly*, vol. 77, n. 2 (February 1970) 134-145.

- DIEUDONNÉ, Jean [1972]. The historical development of algebraic geometry. *The American Mathematical Monthly*, vol. 79, n. 8 (October 1972) 827-866.

- DIEUDONNÉ, Jean [1989]. *A history of algebraic and differential topology*, 1900 - 1960. Boston, Birkhäuser.

- DIEUDONNÉ, Jean [1990 (1987)]. *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa, Publicações Dom Quixote.

- DOLBY, R. G. Alex [1987]. Three hundred years of Newton's *Principia*. *Physics Education* **22** (1987) 337-342.

- DONALDSON, Simon K. [1996]. The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, vol. 33, n. 1 (January 1996) 45-70.

- DORIER, Jean-Luc [1995]. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, vol. 22 (1995) 227-261.

- DORIER, Jean-Luc [1996]. Génèse des premier espaces vectoriels de fonctions. *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 2 (1996) 265-307.

- DOSSE, François [1993]. *História do estruturalismo*, vol. I - O campo do signo. São Paulo, Editora Ensaio.

- DUBOS, René [1961]. *The dreams of reason. Science and utopias*. New York and London, Columbia University Press.

- DUBREIL, Paul [1962]. *L'histoire des nombres mystérieux (π, e, i, C)*. In: Le LIONNAIS [1962:99-113].

- DUFOUR, Médéric [1910]. *Traité élémentaire des synonymes grecs.* Paris, Librairie Armand Colin.

- DUGAC, Pierre [1973]. Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 10, n. 1-2 (1973) 41-174.

- DUGAC, Pierre [1976]. Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 15, n. 4 (1976) 297-383.

- DUGAC, Pierre [1986]. *Fondements de l'analyse*. In: DIEUDONNÉ [1986:237-292].

- DUMONCEL, Jean Claude [2002]. *Philosophy of mathematics. An antology*, by D. Jacquette (ed.). *History and philosophy of logic* 23 (2002) 121-132.

- DUNLOP, Katherine [2009]. Why Euclid's geometry brooked no doubt: J. J. Lambert on certainty and the existence of models. *Synthese* 167 (2009) 33-65.

- EDWARDS, Harold M. [1975]. The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14, n. 3 (1975) 219-236.

- EDWARDS, Harold M. [1977]. *Fermat last theorem. A genetic introduction to algebraic number theory*. Berlin and New York, Springer Verlag.

- EDWARDS, Harold M. [1978]. On the Kronecker Nachlasz. *Historia Mathematica*, vol. 5 (1978) 419-426.

- EDWARDS, Harold M. [1980]. The genesis of ideal theory. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 23, n. 4 [1980], 321-378.

- EDWARDS, Harold M. [1983A]. Euler and quadratic reciprocity. *Mathematics magazine*, vol. 56, n. 5 (November 1983) 285-291.

- EDWARDS, Harold M. [1983B]. Dedekind's invention of ideals. *Bulletin of the London Mathematical Society* 15 (1983) 8-17.

- EDWARDS, Harold M. [1987]. An appreciation of Kronecker. *The Mathematical Intelligencer,* vol. 9 (1987) 28-35.

- EDWARDS, Harold M. [1990]. *Divisor theory*. Berlin, Birkhäuser.

- EDWARDS, Harold M. [1992A]. Mathematical ideas, ideals, and ideology. *The mathematical intelligencer*, vol. 14, n. 2 (1992) 6-19.

- EDWARDS, Harold M. [1992B]. Kronecker's arithmetical theory of algebraic quantities. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 94 (1992) 130-139.

- EDWARDS, Harold M.; NEUMANN, Olaf; PURKET, Walter [1982]. Dedekinds 'Bunte Bemerkungen' zu Kroneckers 'Grundzüge'. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 27, n. 1 (1982) 49-85.

- EILENBERG, Samuel; MAC LANE, Saunders [1945]. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 58, n. 2 (September 1945) 231-294.

- EINSTEIN Albert [1925]. A geometria não-euclidiana e a física. *La Prensa*, Buenos Aires, 24-3-1925. In: MOREIRA & VIDEIRA [1995:65-75].

- ELLISON, W.; ELLISON, F. [1986]. *Théorie des nombres*. In: DIEUDONNÉ [1986:151-236].

- ELSGOLTZ, Lev [1977]. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Moscovo, Editorial Mir.

- ELSTRODT, Jürgen; ULLRICH, Peter [1999]. A real sheet of complex Riemannian function theory: A recently discovered sketch in Riemann's own hand. *Historia Mathematica*, vol. 26 (1999) 268-288.

- ENDLER, Otto [1986]. *Teoria dos números algébricos*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- EPPLE, Moritz [1995]. Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory. *Historia Mathematica*, vol. 22 (1995) 371-401.

- EPPLE, Moritz [1998A]. Topology, matter, and space. (Part I: Topological notions in nineteenth-century natural philosophy.) *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 52, n. 4 (1998) 297-392.

- EPPLE, Moritz [1998B]. Orbits of asteroids, a braid, and the first link invariant. *Mathematical Intelligencer*, vol. 20, n. 1 (1998) 45-52.

- EPPLE, Moritz [2003]. From quaternions to cosmology: spaces of constant curvature, circa 1873-1925. ArXive:math.HO/0305023v1 (1 May 2003).

- EULER, Leonhard [1948]. *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek Digitalisierungszentrum, Goettingen.

- EVES, Howard [1997 (1990)]. *Introdução à história da matemática*. Campinas, Editora da UNICAMP.

- ÉVORA, Fátima R. R. (ed.) [1995]. *Espaço e tempo. Coleção CLE*, vol. 15. Campinas, Editora da UNICAMP.

- FARMER, William M. [2008]. The seven virtues of simple type theory. *Journal of applied logic* 6 (2008) 267-286.

- FARWELL, Ruth; KNEE, Christopher [1990]. Riemann's 'Commentatio', differential geometry and tensor analysis. *Historia Mathematica*, vol. 17, n. 3 (1990) 223-255.

- FERRARO, Giovanni [1999]. The first modern definition of the sum of a divergent series: An aspect of the rise of twentieth century mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 54, n. 2 (1999) 101-135.

- FERRARO, Giovanni [2001]. Analytical symbols and geometrical figures in eighteenth-century calculus. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 32, n. 3 (2001) 535-555.

- FERRARO, Giovanni [2007A]. Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815. *Historia Mathematica*, vol. 34 (2007) 62-88.

- FERRARO, Giovanni [2007B]. The foundational aspect of Gauss work on the hypergeometric , factorial, and digamma functions. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 61, n. 5 (2007) 457-518.

- FERRARO, Giovanni; PANZA, Marco [2003]. Developing into series and returning from series. *Historia Mathematica*, vol. 30 (2003) 17-46.

- FERREIRÓS, José [1996]. Traditional logic and the early theory of sets. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 50, n. 1 (1996) 5-71.

- FERREIRÓS, José [2000]. *La multi-dimensional obra de Riemann: estudio introductorio*. In: FERREIRÓS, José, ed. [2000]. *Riemanniana Selecta* IX-CLVII. Madrid, CSIC.

- FEYS, Robert [1993 (1963)]. *Lógica*. In: HEINEMANN [1993:301-319].

- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de [1985]. *O princípio de Dirichlet. Matemática Universitária*, n. 1 (1985) 63-84.

- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de [1997]. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- FILLOUX, Jean-Claude [1977 (1947)]. *L'inconscient*. Paris, Presses Universitaires de France.

- FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss [2006]. *Cálculo A* (sexta edição). São Paulo, Pearson Prentice Hall.

- FRAENKEL, Adolf Abraham [1993 (1963)]. *Filosofia da matemática*. In: HEINEMANN [1993:321-344].

- FRANCIS & MORIN [1979]. Arnold Shapiro's Eversion of the Sphere. *Mathematical Intelligencer*, vol. 2 (1979) 200-203.

- FRASER, Craig G. [1989]. The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the eighteenth century. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 39, n. 4 (1989) 317-335.

- FRÉCHET, Maurice [1962 [1948)]. *De l'espace à trois dimensions aux espaces abstraits*. In: LE LIONNAIS [1962:121-129].

- FRÉCHET, Maurice [1971]. *Análise funcional e análise geral*. In: TATON [1971:77-82]

- FREUD, Sigmund [1973 (1926)]. *Análisis profano*. Obras completas, tomo III, 2911-2959.

- FREUDENTHAL, H. [1971]. Did Cauchy plagiarize Bolzano? *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 7, n. 5 (November 1971) 375-392.

- FRIEBE, Cord [2008]. Kant und die spezielle Relativitätstheorie. *Kant-Studien*, 99. Jahrgang (2008) 30-45.

- FRIEDELL, Egon [1974]. *Kulturgeschichte der Neuzeit*. München, Verlag C. H. Beck.

- FRIEDMAN, Michael [1985]. Kant's theory of geometry. *The Philosophical Review*, v. 94, n. 4 (October 1985) 455-506.

- GANA, Francesco [1986]. Dio e l'uomo nella matematica di Kronecker. *Historia Mathematica*, vol. 13 (1986) 255-276.

- GANDON, Sébastien [2005]. Pasch entre Klein et Peano: empirisme et idéalité en géométrie. *Dialogue* XLIV (2005) 653-692.

- GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves [2002]. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- GARCIA, Elena Moraes [1987]. Teoria e experiência no *Diálogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo* de Galileu Galilei. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- GARDING, Lars [1979]. The Dirichlet problem. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 2 (1979) 43-53.

- GARDING, Lars [1997 (1977)]. *Encontro com a Matemática*. Brasília, Editora da UNB.

- GARDNER, Howard [1995 (1985)]. *A nova ciência da mente*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

- GAUSS, Karl Friedrich [1801]. *Disquisitiones arithmeticae*. Tradução ao castelhano por Angel Ruiz Zúñiga *et alii*. San José, Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia.

- GAUSS, Karl Friedrich [1825]. *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*. In: PESIC [2005:79-110].

- GAUSS, Karl Friedrich [1827]. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. In: PESIC [2005:3-44].

- GAUSS, Karl Friedrich [1827]. *Resumo das disquisições gerais*. In: PESIC [2005:45-49].

- GENTILE, Enzo R. [1977]. *Estructuras algebraicas*, tomo I. Washington, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

- GEORGE, Alexander [1985]. Skolem and the Löwenheim-Skolem theorem: A case study of the philosophical signicance of mathematical results. *History and philosophy of logic* 6 (1985) 75-89.

- GERICKE, Helmut [1982]. Zur Vorgeschichte und Entwicklung des Krümmungsbegriffs. *Archives for History of Exact Sciences,* vol. 27, n. 1 (1982) 1-21.

- GERMAIN, Paul [1962]. Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques. In: Le LIONNAIS [1962:226-241].

- GILMORE, Robert [2005 (1973)]. *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. New York, Dover Publications.

- GLAS, Eduard [1986]. On the dynamics of mathematical change in the case of Monge and the French Revolution. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 17, n. 3 (1986) 249-268.

- GLAS, Eduard [1989]. Testing the philosophy of mathematics in the history of mathematics. Part I: The sociocognitive process of conceptual change. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 20 (1989) 115-131.

- GLAS, Eduard [1993]. Mathematical progress: between reason and society. Part II: The interplay of cognitive and social factors. *Journal for general philosophy of science* 24 (1993) 235-256.

- GLAS, Eduard [2002]. Socially conditioned mathematical change: the case of the French Revolution. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 33 (2002) 709-728.

- GODEAUX, Lucien [1960 (1937)]. *Les géométries*. Paris, Librairie Armand Colin.

- GOLDFARB, Warren [1982]. Logicism and logical truth. *The Journal of Philosophy*, vol. 79, n. 11 (November 1982) 692-695.

- Goldfarb, Warren [1988]. Poincaré against the logicists. *History and philosophy of modern mathematics. Minnesota studies in the philosophy of science*, vol. XI, eds. W. Aspray and P. Kitcher, University of Minnesota Press, Minneapolis (1988) 61-81.

- GONÇALVES, Adilson [2001]. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- GOUVÊA, Fernando Quadros [1988]. Resenha ao livro *Teoria dos Números Algébricos*, por Otto Endler. *Matemática Universitária*, n. 7 (1988) 133-137.

- GRABINER, Judith V. [1974]. Is mathematical truth time-dependent? *The American Mathematical Monthly*, vol. 81, n. 4 (1974) 354-365.

- GRABINER, Judith V. [1983]. Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly*, vol. 90, n. 3 (March 1983) 185-194.

- GRABINER, Judith V. [1997]. Was Newton calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's *Treatise of Fluxions*.

- GRABINER, Judith V. [2004]. Newton, Maclaurin, and the authority of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, vol. 111 (December 2004) 841-852.

- GRABINER, Judith V. [2007]. Why should historical truth matter to mathematicians? Dispelling myths while promoting maths. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* 22 (2) (2007) 78-91.

- GRATTAN-GUINNESS, I. [1970]. Bolzano, Cauchy, and the 'new analysis' of the early nineteenth century. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 6, n. 5 (1970) 372-400.

- GRATTAN-GUINNESS, Ivor [1986]. The Cauchy-Seidel story on uniform convergence again: was there a fourth man? *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique* t. XXXVIII (1986) 225-235.

- GRATTAN-GUINNESS, Ivor [1996]. Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica*, vol. 23 (1996) 355-375.

- GRAY, Jeremy [1984]. The shaping of the Riesz representation theorem: a chapter in the history of analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 31, n. 2 (1984) 127-187.

- GRAY, Jeremy [1998]. The Riemann-Roch theorem and geometry, 1854-1914. *Documenta Mathematica* - extra volume (Deutsche Mathematiker Verein) ICM 1998 - 811-822.

- GRAY, Jeremy [1999]. La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère: Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881), reviewed by Jeremy Gray. *Historia Mathematica*, vol. 26 (1999) 164-166.

- GRAY, Jeremy [2004]. Anxiety and abstraction in nineteenth-century mathematics. *Science in Context*, vol. 17, n. 1-2 (2004) 23-47.

- GRAY, Jeremy [2006]. Overstating their case? Reflections on British mathematics in the nineteenth century. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* 22 (3) (2006) 178-185.

- GRAY, Jeremy [2008]. A short life of Euler. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* 23 (1) (2008) 1-12.

- GREVE, Aristide [1952]. *Les dix-septième et dix-huitième siècles de la littérature française*. São Paulo, Companhia Editora Nacional.

- GRIMAL, Pierre [1951]. *Dictionnaire de la mythologie grecque et romaine*. Paris, Presses Universitaires de France.

- GROTHENDIECK, Alexandre [sem data]. Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien. <http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/RetS.pdf>

- GUÉRINDON, Jean; DIEUDONNÉ, Jean [1978]. *L'algèbre et la géométrie jusqu'en 1840*. In: DIEUDONNÉ [1986:55-119].

- GUICCIARDINI, Nicolò [1996]. An episode in the history of dynamics: Jakob Hermann's proof of proposition 1, book 1, of Newton's *Principia*. *Historia Mathematica*, vol. 23 (1996) 167-181.

- GUICCIARDINI, Nicolò [1998]. Il dibattito sui metodi matematici per la filosofia naturale di Isaac Newton dal 1687 al 1736. <http://www.brera.unimi.it/sisfa/atti/1998/Guicciardini.pdf>

- GUICCIARDINI, Nicolò [1999]. Letter to the editor. *Historia Mathematica*, vol. 26 (1999) 292-294.

- GUICCIARDINI, Nicolò [2003]. Conceptualism and contextualism in the recent historiography of Newton's *Principia*. *Historia Mathematica*, vol. 30 (2003) 407-431.

- GUICCIARDINI, Nicolò [2004]. Dot-age: Newton's mathematical legacy in the eighteenth century. *Early Science and Medicine*, vol. 9, n. 3 (2004) 218-256.

- GUICCIARDINI, Nicolò [2005]. *Mathematics in the physical sciences, 1650-2000*. Report n. 56/2005. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

- HAACK, Susan [2002 (1978]). *Filosofia das lógicas*. São Paulo, Editora da UNESP.

- HADAMARD, Jacques [1954]. *The psychology of invention in the mathematical field*. New York, Dover Publications.

- HADAMARD, Jacques [1999 (1951)]. *Non-Euclidean geometry in the theory of automorphic functions*. American Mathematical Society - London Mathematical Society.

- HAGAR, Amit [2008]. Kant and non-Euclidean geometry. *Kant-Studien*, 99. Jahrgang (2008) 80-98.

- HALMOS, Paul R. [1974]. *Naive set theory*. Berlin, Springer-Verlag.

- HALMOS, Paul R. [1978 (1974)]. *Espaços vetoriais de dimensão finita*. Rio de Janeiro, Editora Campus.

- HALPERIN, Israel [1950]. Discontinuous functions with the Darboux property. *The American mathematical monthly*, vol. 57, n. 8 (October 1950) 539-540.

- HALSTED, George Bruce [1891]. *Translator's introduction*. In: BONOLA [1955:1-10]. (Prefação a *Geometrical researches on the theory of parallels*, LOBACHEVSKI.)

- HALSTED, George Bruce [1896]. Bolyai Farkas (Wolfgang Bolyai). *The American mathematical monthly*, vol. 3, n. 1 (1896) 1-5.

- HALSTED, George Bruce [1900]. Non-Euclidean geometry. *The American mathematical monthly*, vol. 7, n. 5 (May 1900) 123-133.

- HALSTED, George Bruce [1902]. Eugenio Beltrami. *The American mathematical monthly*, vol. 9, n. 3 (March 1902) 59-63.

- HAMMING, R. W. [1998]. Mathematics on a distant planet. *The American mathematical monthly*, vol. 105, n. 7 (August - September 1998) 640-650.

- HANKINS, Thomas L. [1967]. The influence of Malebranche on the science of mechanics during the eighteenth century. *Journal of the history of ideas*, vol. 28, n. 2 (April - June 1967) 193-210.

- HARARI, Orna [2003]. The concept of existence and the role of constructions in Euclid's *Elements*. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 57, n. 1 [2003], 1-23.

- HARDEGREE, Gary M. [1977]. Reichenbach and the logic of quantum mechanics. *Synthese*, vol. 35 (1977) 3-40.

- HARTIMO, Mirja [2007]. Towards completeness: Husserl on theories of manifolds (1890-1901). *Synthese*, vol. 156 (2007) 281-310.

- HASS, Joel; LAGARIAS, Jeffrey C. [2001]. The number of Reidemeister moves needed for unknotting. *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 14, n. 2 (2001) 399-428.

- HAWKINS, Thomas [1980]. Non-Euclidean geometry and Weierstrassian mathematics: the background to Killing's work on Lie algebras. *Historia Mathematica* 7 (1980) 289-342.

- HAWKINS, Thomas [1982]. Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras. *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 26, n. 2 (1982) 127-192.

- HEFEZ, Abramo [1986]. Uma introdução à história da geometria projetiva. *Matemática Universitária*, n. 3 (1986) 35-50.

- HEFEZ, Abramo [1993]. *Curso de álgebra*, vol. 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- HEFEZ, Abramo [2005]. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

- HEINEMANN, Fritz [1993 (1963)]. *A filosofia no século XX*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.

- HEIS, Jeremy [2007]. *The fact of modern mathematics: Geometry, logic, and concept formation in Kant and Cassirer*. University of Pittsburgh, Graduate Faculty of Arts and Sciences.

- HELLMAN, Geoffrey [2003]. Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? *Philosophia Mathematica*, vol. 11, n. 2 (June 2003) 129-157.

- HENDEN, Gisle [2004]. *Intuition and its role in strategic thinking*. A dissertation submitted to BI Norwegian School of Management for the Degree of Dr. Economics.

- HERSH, Reuben [1979]. Some proposals of reviving the philosophy of mathematics. *Advances in mathematics*, vol. 31 (1979) 31-50.

- HERSH, Reuben [1995]. Fresh breezes in the philosophy of mathematics. *The American mathematical monthly*, vol. 102, n. 7 (August - September 1995) 589-594.

- HERSTEIN, I. N. [1964]. *Topics in algebra*. Massachusetts, Blaisdell Publishing Company.

- HILBERT, David & COHN-VOSSEN, S. [1952 (1932)]. *Geometry and the imagination* [*Anschauliche Geometrie*]. New York, Chelsea Publishing Company.

- HILBERT, David [1900]. Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1900) 253-297.

- HILBERT, David [1926]. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* Band 95 (1926) 161-190.

- HILDEBRAND, Francis B. [1965]. *Methods of applied mathematics*. New Jersey, Prentice-Hall.

- HILL, Claire Ortiz [1977]. Did Georg Cantor influence Eduard Husserl? *Synthese*, vol. 113 (1997) 145-170.

- HIRSCH, Moris W. [1994]. Response to "*Theoretical mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics*", by A. Jaffe and F. Quinn. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, vol. 30, n. 2 (April 1994) 186-190.

- HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray [1967 (1961)]. New Delhi, Prentice-Hall.

- HOOF, Henri van [1962]. *Théorie et pratique de l'interpretation*. München, Max Hueber Verlag.

- HORVÁTH, Juan [1975]. *Introduccion a la topologia general*. Washington, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

- HOWE, Roger [1983]. Very basic Lie theory. *The American mathematical monthly*, vol. 90, n. 9 (November 1983) 600-623.

- ITARD, Jean [1973]. *Arithmétique et théorie des nombres*. Paris, Presses Universitaires de France.

- ITARD, Jean [1976]. *Les nombres premiers*. Paris, Presses Universitaires de France.

- JACKSON, Allyn [2002]. The world of blind mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 49, n. 10 (Nobember 2002) 1246-1251.

- JACKSON, Allyn [2004]. Comme *Appelé du Néant* — As if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 51, n. 4 (2004) 1038-1056.

- JAËCK, Frédéric [2010]. Éléments structurels en analyse fonctionnelle: trois notes de Fréchet sur les opérations linéaires.

- JAFFE, Arthur; QUINN, Frank [1993]. 'Theoretical mathematics': toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin (new series) of the* American Mathematical Society, vol. 29 n. 1 (July 1993) 1-13.

- JAGY, William C. [1995]. Squaring circles in the hyperbolic plane. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17 (2) (1995) 31-36.

- JAHNKE, Hans Niels [1987]. Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhundert. *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 37, n. 2 (1987) 101-182.

- JAHNKE, Hans Niels [1991]. Mathematics and culture: the case of Novalis. *Science in Context* 4, n. 2 (1991) 279-295.

- JAHNKE, Hans Niels [1993]. Algebraic analysis in Germany, 1780-1840: Some mathematical and philosophical issues. *Historia mathematica*, vol. 20 (1993) 265-284.

- JAMMER, Max [1970]. *Conceptos de espacio*. México, Editorial Grijalbo.

- JANIK, Allan; TOULMIN, Stephen [1991 (1973)]. *A Viena de Witgenstein*. Rio de Janeiro, Editora Campus.

- JARDINE, Nick [2000]. Uses and abuses of anachronism in the history of the sciences. *History of science* **38** (121) 251–270

- JEANS, James [1968 (1937)]. *Science and music*. New York, Dover Publications.

- JOLIVET, Régis [1941]. *Traité de Philosophie, tome I: Introduction générale, logique, cosmologie*. Lyon, Emmanuel Vitte.

- JOLIVET, Régis [1966]. *Vocabulaire de la philosophie*. Paris, Emmanuel Vitte.

- JONES, Matthew L. [2001]. Descartes' geometry as spiritual exercise. *Critical Inquiry*, vol. 28, n. 1, Things (Autumn 2001) 40-71.

- JONG, Willem R. DE; BETTI, Ariana [2010]. The classical of model of science: a millenia-old model of scientific rationality. *Synthese*, vol. 174 (2010) 185-203.

- KAGÁN, V. F. [1986]. *Lobachevski*. Moscovo, Editorial Mir.

- KATZ, Chaim Samuel; DORIA, Francisco Antonio [1992]. *Razão/ desrazão*. Petrópolis, Editora Vozes.

- KATZ, Victor J. [1997]. Algebra and its teaching: an historical survey. *Journal of mathematical behavior* 16 (1) 1997 25-38.

- KHOSROVSHAHI, G. B. [2005]. An interview with Alain Connes. [http://www.ipm.ac.ir/news/2005/**connes**/**connes**-interview.pdf]

- KIERNAN, B. Melvin [1971]. The development of Galois theory from Lagrange to Artin. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 8, n. 1-2 (1971/1972) 40-154.

- KINYON, Michael K.; UNGAR, Abraham A. [2000]. The gyro-structure of the complex unit disk. *Mathematics Magazine*, vol. 73, n. 4 (October 2000) 273-284.

- KIRILLOV, Alexander; GVICHIANI, Alexei [1982 (1979)]. *Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle*. Moscovo, Mir.

- KITCHER, Philip [1975]. Bolzano's ideal of algebraic analysis. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 6, n. 3 (1975) 229-269.

- KLEIN, Felix [1872]. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek Digitalisierungszentrum*, Goettingen.

- KLEIN, Felix [1890]. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. *Mathematische Annalen* Band 37 (1890) 544-572. Reproduzido nas *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band 1, 353-383.

- KLEIN, Felix [1895]. The arithmetizing of mathematics. *Bulletin of the New York Mathematical Society*, vol. 5 (1896) 241-249.

- KLEIN, Felix [2004 (1925)]. *Geometry — Elementary geometry from an advanced standpoint*. New York, Dover Publications.

- KLEINER, Israel [1986]. The evolution of group theory: a brief survey. *Mathematics Magazine*, vol. 59, n. 4 (October 1986) 195-215.

- KLEINER, Israel [1989]. Evolution of the function concept: a brief survey. *Coll. Math. J.* 20 (1989) 282-300.

- KLEINER, Israel [1994]. The role of paradoxes in the evolution of mathematics. *The American mathematical monthly*, vol. 101, n. 10 (December 1994) 963-974.

- KLEINER, Israel [1998]. From numbers to rings: the early history of ring theory. *Elemente der Mathematik* 53 (1998) 18-35.

- KLEINER, Israel [1999A]. Field theory: From equations to axiomatization (part I). *The American mathematical monthly*, vol. 106, n. 7 (Aug.-Sep. 1999) 677-684.

- KLEINER, Israel [1999B]. Field theory: From equations to axiomatization (part II). *The American mathematical monthly*, vol. 106, n. 9 (Nov. 1999) 859-863.

- KLINE, Morris [1976 (1973)]. *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo, Instituição Brasileira de Difusão Cultural.

- KNEALE, William [1948]. Boole and the revival of logic. *Mind*, new series, vol. 57, n. 226 (1948) 149-175.

- KNEALE, William; KNEALE, Martha [1972 (1962)]. *O desenvolvimento da lógica*. Fundação Calouste Gulbenkian.

- KNEEBONE, G. T. [2001 (1963)]. *Mathematical logic and the foundations of mathematics*. New York, Dover Publications.

- KOETSIER, Teun [1995]. Explanation in the historiography of mathematics: the case of Hamilton's quaternions. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 26, n. 4 (1995) 593-616.

- KOPPELMAN, Elaine [1971]. The calculus of operations and the rise of abstract algebra. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 8, n. 3 (1971) 155-242.

- KOSTRIKIN, Alexei Ivánovich [1978]. *Introducción al algebra*. Moscovo, Editorial Mir.

- KOYRÉ, Alexandre [1943]. Galileo and Plato. *Journal of the history of ideas*, vol. 4 (1943) 400-428.

- KOYRÉ, Alexandre [1985]. *Études d'histoire de la pensée scientifique*. Paris, Gallimard.

- KRAUSE, Décio [2002]. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. São Paulo, Editora Pedagógica e Universitária.

- KREISEL, Georg [1960]. La prédicativité. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 88 (1960) 371-391.

- KREISEL, Georg [1968]. A survey of proof theory. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 33, n. 3 (September 1968) 321-388.

- KRONECKER, Leopold [1891]. *Über den Begriff der Zahl in der Mathematik*. Palestra proferida, em Berlin, na Universidade Friedrich Wilhelms, e reproduzida em BONIFACE & SCHAPPACHER.

- KUGA, Michio [1993 (1968)]. *Galois' dream: Group theory and differential equations*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.

- KUHN, Thomas S. [1970 (1962)]. *The structure of scientific revolutions*. Chicago, The University of Chicago Press.

- KUHN, Thomas S. [1979]. *Reflexões sobre os meus críticos*. In: LAKATOS & MUSGRAVE [1979: 285-343].

- KUHN, Thomas S. [2003 (2000)]. *O caminho desde a estrutura*. São Paulo, Editora da UNESP.

- KUTATELADZE, S. S. [2005]. Saunders Mac Lane, the knight of mathematics. arXiv:math.HO/0507203 v1. (11 July 2005)

- KUTUZOV, B. V. [1960 (1954)]. *Geometry* — Studies in mathematics, volume IV. Chicago, University of Chicago.

- LAÉRCIO, Diógenes [1988]. *Vidas e doutrinas dos filósofos ilustres*. Brasília, Editora da UNB.

- LAKATOS, Imre [1966]. Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics. In: LAKATOS 1978:43-60.

- LAKATOS, Imre [1970]. History of science and its rational reconstructions. *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, vol. 1970. (1970) 91-136.

- LAKATOS, Imre [1972]. *Problems in the philosophy of mathematics*. Proceedings if the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965, volume 1. Amsterdam - London, North-Holland Publishing Company.

- LAKATOS, Imre [1976A]. A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. *The British Journal for the philosophy of Science* 27 (1976) 201-223.

- LAKATOS, Imre [1976B]. *Proofs and refutations*. Cambridge, Cambridge University Press

- LAKATOS, Imre [1978]. *Mathematics, science and epistemology*. Cambridge, Cambridge University Press.

- LAKATOS, Imre; MUSGRAVE, Alan [1979 (1970)]. *A crítica e o desenvolvimento do conhecimento*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

- LANCZOS, Cornelius [1961]. *Linear differential operators*. London, van Nostrand.

- LANCZOS, Cornelius [1970]. *Space through the ages*. London, Academic Press.

- LANDAU, Edmund [1960 (1830)]. *Foundations of analysis*. New York, Chelsea Publishing Company.

- LANDRY, Elaine; MARQUIS, Jean-Pierre [2005]. Categories in context: historical, foundational and philosophical. *Philosophia Mathematica*, vol. 13, n. 1 (February 2005) 1-43.

- LARGEAULT, [1992A]. *Intuitionisme et théorie de la démonstration*. Paris, Libraire Philosophique Vrin.

- LARGEAULT, [1992B]. *L'intuitionisme*. Paris, Presses Universitaires de France.

- LAROUSSE, Pierre [1968]. *Nouveau petit dictionnaire encyclopédique pour tous*. Paris, Librairie Larousse.

- LARVOR, Brendan [2001]. What is a dialectical philosophy of mathematics? *Philosophia Mathematica*, vol. 9, n. 2 (June 2001) 212–229.

- LARVOR, Brendan [2007]. La révolution symbolique, *by* Michel Serfati (*review*). *Philosophia Mathematica,* vol. 15, n. 1 (February 2007) 122-126.

- LATOUR, Bruno [2008]. The shaping of deduction in Greek mathematics — A study of cognitive history. *Social Studies of Science*, vol. 38/3 (June 2008) 441-459.

- LAUGWITZ, Detlef [2000A]. Two letter by Nikolai N. Luzin to M. Ya. Vygodskii. *The American mathematical monthly*, vol. 107, n. 1 (January 2000) 64-82.

- LAUGWITZ, Detlef [2000B]. Comments on the paper 'Two letter by Nikolai N. Luzin to M. Ya. Vygodskii'. *The American mathematical monthly*, vol. 107, n. 3 (March 2000) 267-276.

- LAURIENTIEV, M. A.; NIKOLSKI, S. M. [1973]. *Análisis*. In: ALEXANDROV et alii [1976a:91-224].

- Le LIONNAIS, F. [1948 (1962)]. *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris, Albert Blanchard.

- LEBESGUE, Henri [1975]. *La mesure des grandeurs*. Paris, Albert Blanchard.

- LEIBNIZ, Gottfried [1987 (1684, 1686)]. *Analisis infinitesimal*. Madrid, Editorial Tecnos.

- LERMA, Miguel J. Sevilla de [sem data]. Introducción histórica a la geodesia. <http://www.iag.csic.es/museo/docs/historia_geodesia.pdf>

- LIMA, Elon Lages [1976]. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora.

- LIMA, Elon Lages [1977]. Espaços métricos. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- LIMA, Elon Lages [1982]. *Curso de análise,* vol. 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- LIMA, Elon Lages [1986]. Classificação de variedades unidimensionais: Uma demonstração educada. *Matemática Universitária*, n. 3 (1986) 29-34.

- LIMA, Elon Lages [1987]. Curvas regulares no plano. *Matemática Universitária*, nº 6 (1987) 49-63.

- LIMA, Elon Lages [1987]. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

- LIMA, Elon Lages [1998]. Grupo fundamental e espaços de recobrimento. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- LIMA, Elon Lages [2004]. Análise no espaço $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- LIMA, Elon Lages [2009]. *Homologia básica*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- LISI, A. Garrett [2007]. An exceptionally simple theory of everything. arXiv:0711.0770v1 [hep-th] 6 NOV 2007 (Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION).

- LOBACHEVSKI, Nikolaj Ivanovich [1955 (1835-1838)]. *Nuovi princípi della geometria, con una teoria completa delle parallele*. Torino, Editore Paolo Boringhieri.

- LOBACHEVSKI, Nikolaj Ivanovich [1955 (1891, 1840)]. *Geometrical researches on the theory of parallels*. In: BONOLA [1955:11-48].

- LOCHAK, Georges [1994]. *La géométrisation de la physique*. Paris, Flammarion.

- LOEDEL, Enrique [1955]. *Física relativística*. Buenos Aires, Editorial Kapelusz.

- LOEWNER, Charles [2008 (1971)]. *Theory of continuous groups*. New York, Dover Publications.

- LOMBARDO-RADICE, Lucio [1955]. *Lobachevski, matematico-filosofo*. In: LOBACHEVSKI [1955:11-54].

- LORENZO, Javier de [1987]. *Estudio preliminar*. In: LEIBNIZ [1987:IX - LXXIX].

- LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. [2003]. *Matemática discreta*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

- LUZIN, Nikolai [1998A]. Function, part I. *The American mathematical monthly*, vol. 105, n. 1 (January 1998) 59-67.

- LUZIN, Nikolai [1998B]. Function, part II. *The American mathematical monthly*, vol. 105, n. 3 (March 1998) 263-270.

- MAC LANE, Saunders [1986]. *Mathematics: form and function*. Berlin, Springer-Verlag.

- MAC LANE, Saunders [1994]. Responses to "Theoretical mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", by A. Jaffe and F. Quinn. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 30, n. 2 (April 1994) 13-15.

- MAC LANE, Saunders [1996]. Structure in Mathematics. *Philosophia Mathematica*, vol. 4, n. 2 (May 1996) 174-183.

- MAC LANE, Saunders [1997]. Conceptual mathematics, a first introduction to categories, by F. W. Lawvere *et alii*. *The American mathematical monthly*, vol. 104, n. 10 (December 1997) 985-987.

- MacDUFFEE, C. C. [1938]. The *p*-adic numbers of Hensel. *The American Mathematical Monthly* v. 45, n. 8 (1938) 500-508.

- MacFARLANE, John [2002]. Frege, Kant, and the logic in logicism. *The Philosophical Review*, vol. 111, n. 1 (2002) 25-65.

- MADORE, David A. [2000]. A first introduction to *p*-adic numbers. <http://www.madore.org/~david/math/padics.pdf>

- MAGLO, Koffi [2003]. The reception of Newton's gravitational theory by Huygens, Varignon, and Maupertuis: how normal science may be revolutionary. *Perspectives on science*, vol. 11, n. 2 (2003) 135-169.

- MAIA, Luís Paulo Mesquita [1978]. *Introdução à mecânica analítica*. Rio de Janeiro, Departamento de Física Matemática da UFRJ.

- MAINARD, Robert [2001]. Le mouvement Bourbaki. < http://www.academie-stanislas.uhp-nancy.fr/TomeXVI/Mainard01.pdf>

- MALTSEV, Anatoli I. [1956]. *Grupos y otros sistemas algebraicos*. In: ALEXANDROV et alii [1976:309-408].

- MARTINS, Roberto de Andrade [2004]. *Ciência* versus *historiografia: os diferentes níveis discursivos nas obras sobre história da ciência*. In: ALFONSO-GOLDFARB & BELTRAN [2004:115-145].

- MATHEWS, Jerold [1978]. William Rowan Hamilton's paper of 1837 on the arithmetization of analysis. *Archive for History of Exact Sciences,* vol. 19, n. 2 (June 1978) 177-200.

- MAY, J. Peter [2003]. Munshi's proof of the *Nullstellensatz*. *The American mathematical monthly*, vol. 110, n. 2 (February 2003) 133-140.

- McLARTY, Colin [2007]. Saunders Mac Lane: A mathematical autobiography. *philosophia Mathematica*, vol. 15, n. 3 (October 2007) 400-404.

- MEHRTENS, Herbert [1976]. T. S. Kuhn's Theories and Mathematics: a discussion paper on the "new historiography" of mathematics. *Historia Mathematica*, vol. 3 (1976) 297-320.

- MERRILL, Daniel D. [2005]. Augustus De Morgan's boolean algebra. *History and philosophy of logic* 26 (May 2005) 75-91.

- MESSINGER, Heinz [1967]. *Handwörterbuch English*, zweiter Teil (Deutsch-English]. Berlin, Langenscheidt.

- MILIES, Cesar Polcino [1990]. *Breve introdução à história da teoria dos anéis*. São Paulo, Décima Primeira Escola de Álgebra.

- MILIES, Cesar Polcino [2004]. *Breve história da álgebra abstrata*. Segunda Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador, Universidade Federal da Bahia (Instituto de Matemática).

- MILIES, Cesar Polcino; COELHO, Sônia Pitta [2003]. *Números - Uma introdução à matemática*. Sâo Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

- MILNOR, John [1982]. Hyperbolic geometry: the first one hundred fifty years. *Bulletin of the American Mathematical Society*, new series, vol. 6, n. 1 (January 1982) 9-24.

- MINKOWSKI, Hermann [1905]. Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 14 (1905) 149-163.

- MOISE, Edwin [1963]. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading (Massachusetts), Addison-Wesley Publishing Company.

- MOLES, Abraham A. [1995 (1990)]. *As ciências do impreciso*. Rio de Janeiro, Civilização Brasileira.

- MOMIGLIANO, Arnaldo [1991]. *Os limites da helenização*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- MONNIN, Luc [2004]. Condillac: Le rêve réductionniste. *MLN* 119 (2004) 819:844.

- MOORE, John Douglas [2010 (1996)]. *Lecture notes on Seiberg-Witten invariants*. Berlin, Springer-Verlag.

- MOREIRA, Ildeu de Castro; VIDEIRA, Antonio Augusto Passos [1995]. *Einstein e o Brasil*. Rio de Janeiro, Editora da UFRJ.

- MOSTERÍN, Jesús [1984]. *Historia de la filosofía. 3 - La filosofia griega prearistotelica*. Madrid, Alianza Editorial.

- MOSTERÍN, Jesús [1984]. *La filosofía griega pré-aristotélica*. Madrid, Aliança Editorial.

- MOSTERÍN, Jesús [1987 (1984)]. *Conceptos y teorías en la ciencia*. Madrid, Alianza Editorial.

- MUELLER, Ian [1969]. Euclid's *Elements* and the axiomatic method. *The British Journal for the philosophy of Science* 20 (1969) 289-309.

- MUMFORD, David; SERIES, Caroline; WRIGHT, David [2002]. *Indra's pearls - The vision of Felix Klein*. Cambridge, Cambridge University Press.

- NABONNAND, Philippe [1995]. Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques aux dix-neuvième siècle. *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 1 (1995) 159-200.

- NACHBIN, Leopoldo [1950]. *Topologia e ordem*. Chicago, The University of Chicago Press.

- NAGEL, Ernest [1939]. The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris* 7 (1939) 142-224.

- NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. [1958]. *Gödel's proof*. New York, New York University Press.

- NAIMARK, Mark; STERN, Alexandre [1979]. *Théorie des représentations des groupes*. Moscovo, Éditions Mir.

- NEILL, John O' [1986]. Formalism, Hamilton and complex numbers. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 17, n. 3 (1986) 351-372.

- NEUENSCHWANDER, E. [1978]. Der Nachlasz von Casorati (1835-1890) in Pavia. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 19, n. 1 (1978) 1-89.

- NEUENSCHWANDER, E. [1981]. Über die Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierastrass. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 24, n. 3 (1981) 221-255.

- NEUGEBAUER, C. J. [1962]. Darboux functions of Baire class one and derivatives. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 13, n. 6 (December 1962) 838-843.

- NEUMANN, John von [1947]. *The mathematician. Works of the mind*. Chicago, university of Chicago Press.

- NIKOLSKY, S. M. [1977 (1975)]. *A course of mathematical analysis*. Moscovo, Mir Publishers.

- NORTHROP, F. S. C. [1946]. Leibniz' theory of space. *Journal of the history of ideas*, vol. 7, n. 4 (October 1946) 422-446.

- NOVIKOV, Serguei; DOUBROVINE, Boris; FOMENKO, Anatoli [1982 (1979)]. *Géométrie contemporaine: méthodes et applications*. Première partie: *Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs*. Moscovo, Éditions Mir.

- OEHRSTROEM, Peter [1985]. William R. Hamilton's view of algebra as the science of pure time and his revision of this view. *Historia Mathematica*, vol. 12 (1985) 45-55.

- OLIVEIRA, Augusto Franco de [1991]. *Lógica e aritmética*. Lisboa, Gradiva.

- OLSON, Richard [1971]. Scottish philosophy and mathematics 1750-1830. *Journal of the history of ideas*, vol. 32, n. 1 (Jan-Mar 1971) 29-44.

- ORTIZ, Eduardo L. [2007]. Los lenguajes, la teoría de signos y la "idéologie' francesa en la obra matemática de Charles Babbage. *Revista Brasileira de História da Matemática*, especial nº 1, Festschrift Ubiratan d'Ambrosio, (dez. 2007) 117-126.

- OSSERMAN, Robert [2005]. János Bolyai, non-euclidean geometry, and the nature of space, by Jeremy J. Gray. *Notices of the AMS*, vol. 52, n. 9 (October 2005) 1030-1034.

- OTTE, Michael [2003]. Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese* 134 (2003) 181-216.

- OTTE, Michael [2006]. Proof analysis and continuity. *Foundations of science* 11 (2006) 121-155.

- OTTE, Michael [2007]. Mathematical history, philosophy, and education. *Education Studies in Mathematics*, vol. 266 (2007) 243-255.

- PAIS, Abraham [1995 (1982)]. *Sutil é o Senhor ...: A ciência e a vida de Albert Einstein*. Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira.

- PALLADINO, Franco; TAZZIOLI, Rossana [1996]. Le lettere di Eugenio Beltrami nella corrispondenza di Ernesto Cesàro. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 49, n. 4 (1996) 321-353.

- PARSHALL, Karen Hunger [1985]. Joseph H. M. Wedderburn and the structure theory of algebras. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 32, n. 3-4 (September 1985) 223-349.

- PASTOR, Julio Rey; CALLEJA, Pedro Pi; TREJO, Cesar [1958]. *Análisis matemático*, tomo I. Buenos Aires, Editorial Kapelusz.

- PASTOR, Julio Rey; Santaló, Luis A.; Balanzat, Manuel [1955]. *Geometría analítica*. Buenos Aires, Editorial Kapelusz.

- PATY, Michel [1993]. *Einstein philosophique — La physique comme pratique philosophique*. Paris, Presses Universitaires de France.

- PATY, Michel [2005]. D'Alembert. Coleção Figuras do Saber. São Paulo, Editora Estação Liberdade.

- PEDROSO, Mackmiller [2009]. On three arguments against categorical structuralism. *Synthese,* vol. 170 (2009) 21-31.

- PEIRCE, Benjamin [1881]. Linear Associative Algebra. *American Journal of Mathematics*, vol. 4, n. 1 [1881] 97-229.

- PEIXOTO, Maurício [1988]. Discurso de recipiendário do prêmio de matemática concedido pela Academia de Ciências do Terceiro Mundo. *Matemática Universitária*, nº 8 (dezembro de 1988) 1-25.

- PELUSO, Luís Alberto [1995]. *A filosofia de Karl Popper*. Campinas, Papirus & Editora da PUC Campinas.

- PENROSE, Roger [1991]. *A mente nova do rei. Computadores, mentes e as leis da Física*. Rio de Janeiro, Editora Campus.

- PERMINOV, V. Ya. [1997]. The philosophical and methodological thought of N. I. Lobachevski. *Philosophia Mathematica*, vol. 5, n. 1 (February 1997) 3-20.

- PERTSCH, Erich [1983]. *Handwörterbuch Lateinisch-Deutsch*. Berlin, Langenscheidt.

- PESIC, Peter [2005]. *Gauss general investigations of curved surfaces*. New York, Dover Publications.

- PESIC, Peter [2007]. *Beyond geometry*. New York, Dover Publications.

- PIAGET, Jean; Beth, Evert W.; Mays, Wolfe [1974 (1957)]. *Epistemologia genética e pesquisa psicológica*. Rio de Janeiro, Livraria Freitas Bastos.

- PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando [1987 (1983)]. *Psicogênese e História das Ciências*. Lisboa, Publicações Dom Quixote.

- PIERPONT, James [1999 (1904)]. The history of mathematics in the nineteenth century. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, vol. 37, n. 1 (1999) 9-24. Reprinted from *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 11 (1904) 136-159.

- PISKUNOV, Nikolai [1974A]. *Differential and integral calculus*, vol. I. Moscovo, Editorial Mir.

- PISKUNOV, Nikolai [1974B]. *Differential and integral calculus*, vol. II. Moscovo, Editorial Mir.

- PLATÃO [1986]. *The dialogues of Plato* (with an introduction by Erich Segal). Bantam Books, Toronto - New York - London - Sydney - Auckland.

- PLATÃO [1997): *A república* (tradução de Enrico Corvisieri]. São Paulo, Editora Nova Cultural.

- POINCARÉ, Henri [1894]. *Sur la nature du raisonnement mathématique*. In: POINCARÉ [1968:31-45].

- POINCARÉ, Henri [1898]. L'oeuvre mathématique de Weierstrass. *Acta Mathematica* 22 (1898) 1-18.

- POINCARÉ, Henri [1908A]. L'avenir des mathématiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 26 (1908) 152-168.

- POINCARÉ, Henri [1908B]. L'invention mathématique. *L'année psychologique*, vol. 15, n. 1 (1908) 436-461.

- POINCARÉ, Henri [1913]. *Dernières pensées*. Paris, Flammarion.

- POINCARÉ, Henri [1948 (1913)]. Mathematical creation. *Scientific American*, n. 179 (1948) 54-57.

- POINCARÉ, Henri [1968 (1902)]. *La science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion.

- POINCARÉ, Henri [1999 (1903-1904)]. Fundations of geometry, by David Hilbert. *Bulletin of the American Mathematical Society*, new series, vol. 37, n. 1 (1999) 77-78. [Vol. 10 (1903-1904) 1-23.]

- PÓLYA, George [1948]. Generalization, specialization, and analogy. *The American mathematical monthly*, vol. 55, N. 4 (April 1948) 241-243.

- PÓLYA, George [1963]. On learning, teaching, and learning teaching. *The American mathematical monthly*, vol. 60, n. 6 (June - July 1963) 605-619.

- PONCZEK, Roberto Leon [2002]. *Da Bíblia a Newton: Uma visão humanística da mecânica*. In: ROCHA [2002:16-135].

- PONTRYAGHIN, Lev Semiónovich [1978]. *Grupos continuos*. Moscovo, Editorial Mir.

- POPPER, Karl [1993 [1972)]. *A lógica da pesquisa científica*. São Paulo, Editora Cultrix.

- POSTNIKOV, Mikhail [1985 (1982)]. *Leçons de géométrie - groupes et algèbres de Lie*. Moscovo, Éditions Mir.

- POURCIAU, Bruce [2001]. Newton and the notion of limit. *Historia Mathematica*, vol. 28 (2001) 18-30.

- PRENOWITZ, Walter; JORDAN, Meyer [1965]. *Basic Concepts of Geometry*. New York, Blaisdell.

- PULTE, Helmut [2005]. *Mathematics, meaning and methodology. On the structural development of mathematical philosophy of nature from Newton to Lagrange*. In: GUICCIARDINI [2005:3209-3212].

- QUEYSANNE, Michel [1964]. *Algèbre*. Paris, Librairie Armand Colin.

- QUEYSANNE, Michel; DELACHET, André [1955]. *L'algèbre moderne*. Paris, Presses Universitaires de France.

- RABINOWITSCH, J. L. [1930]. Zum Hilbertschen Nullstellensatz. *Mathematische Annalen* Band 102, n. 1 (Dez. 1930) 520.

- RADU, Mircea [2000]. Justus Grassmann's contributions to the foundations of mathematics: mathematical and philosophical aspects. *Historia Mathematica*, vol. 27 (2000) 4-35.

- RAGGIO, Andrés R. [2007]. La filosofía matemática de Kant. *Manuscrito - Revista Internacional de Filosofia*, vol. 30, n. 2 (jul-dez 2007) 229-243

- RAUSSEN, Martin; Skau, CHRISTIAN [2004]. Interview with Jean-Pierre Serre. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 51, n. 2 (2004) 210-214.

- RAV, Yehuda [1999]. Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, vol. 7, n. 1 (February 1999) 5-41.

- RAYNAUD, Michel [1999]. André Weil and the foundations of algebraic geometry. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, n. 8 (September 1999) 864-867.

- RECK, Erich H. [2009]. Dedekind, structural reasoning, and mathematical understanding. In: VAN KERKHOVE (ed.) *New perspectives in mathematical practices*, 150-173. Edit. WSPG.

- REICH, Karin [1973]. Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 11, n. 4 (1973) 273-376.

- REICH, Karin [1992]. Levi-Civitasche Parallelverschiebung, affiner Zusammenhang, Übertragungprinzip: 1916-1917 — 1922-1923. *Archives for History of Exact Sciences,* vol. 44, n. 1 (1992) 77-105.

- RIBEIRO FILHO, Aurino [2002]. Os quanta e a física moderna. In: ROCHA [2002:299-359]

- RICE, Adrian [2003]. 'Everybody makes error': The intersection of De Morgan's logic and probability, 1837-1847. *History and philosophy of logic* 24 (2003) 289-305.

- RICHARDS, Joan [1980]. The art and the science of British algebra: a study in the perception of mathematical truth. *Historia Matemathica*, vol. 7 (1980) 343-365.

- RICHARDS, Joan L. [1986]. Projective geometry and mathematical progress in mid-victorian Britain. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 17, n. 3 (1986) 297-325.

- RICHARDS, Joan L. [1991]. Rigor and clarity: Foundations of mathematics in France and England, 1800-1840. *Science in Context* 4, n. 2 (1991) 297-319.

- RIEMANN, Bernhard [1923 [1854]]. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Berlin, Verlag von Julius Springer.

- ROCHA, José Fernando [2002]. *Origens e evolução das ideias da física*. Salvador, EDUFBA.

- ROMERO, C.; DAHIA, F. [2005] A brief note on how Einstein's general theory of relativity has influenced the development of modern differential geometry. *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 5, n. 10 (outubro de 2005 - março de 2006) 19-26.

- ROQUETTE, Peter [2003]. History of valuation theory, part I. International Conference and Workshop on Valuation Theory (July 26, 1999 - August 11, 1999, University of Saskatchewan) Saskatoon Canada.

- ROTA, Gian-Carlo [1997A]. The phenomenology of mathematical beauty. *Synthese,* vol. 111 (1997) 171-182.

- ROTA, Gian-Carlo [1997B]. The phenomenology of mathematical proof. *Synthese,* vol. 111 (1997) 183-196.

- ROWE, David E. [1989]. Felix Klein, David Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition. *Osiris* **5** (2) (1989) 186-213.

- ROWE, David E. [1990]. Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century. Review from I. M. Yaglom. *Historia Mathematica* 17 (1990) 385-393.

- ROWE, David E. [2004]. Making mathematics in an oral culture: Göttingen in the era of Klein and Hilbert. *Science in Context*, vol. 17, n. 1-2 (2004) 85-129.

- RUDIN, Walter [1964]. *Principles of mathematical analysis*. New York, McGraw-Hill.

- RUDIN, Walter [1973]. *Functional analysis*. New Delhi, Tata McGraw-Hill.

- RUSNOCK, Paul; KERR-LAWSON, Angus [2005]. Bolzano and uniform continuity. *Historia mathematica*, vol. 32 (2005) 303-311.

- RUSSELL, Bertrand (1897]. *An essay on the foundations of geometry*. Cambridge, University Press. [University of Michigan, University Library.)

- RUSSELL, Bertrand [1972 [1945]]. *A history of western philosophy*. New York, Simon & Schuster.

- SACKS, Oliver [1995]. *Um antropólogo em Marte*. São Paulo, Companhia das Letras.

- SANT'ANNA, Adonai S. [2005]. *O que é uma definição*. Barueri, Editora Manole.

- SAPORITI, Elisabeth [1994]. *A cientificidade da psicanálise: Popper e Peirce*. São Paulo, Editora Escuta.

- SCANLAN, Michael J. [1988]. Beltrami's model and the independence of the parallel postulate. *History and philosophy of logic* 9 (1988) 13-14.

- SCHAU, Udo [1986]. *Dicionário de alemão e português*. Porto, Porto Editora.

- SCHENBERG, Mário [2001]. *Pensando a Física*. São Paulo, Landy Editora.

- SCHILLER, F. C. S. [1896]. Non-euclidean geometry and the Kantian *a priori*. *The philosophical review*, vol. 5, n. 2 (March 1896) 173-180.

- SCHLICK, Moritz [1934]. O fundamento do conhecimento [*Über das Fundament der Erkenntnis*]. In: SCHLICK & CARNAP [1980].

- SCHLICK, Moritz; CARNAP, Rudolf [1980]. *Coletânea de textos* (seleção e tradução de Pablo Rubén Mariconda e Luiz João Baraúna). São Paulo, Abril Cultural.

- SCHOLZ, Erhard [1982]. Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie. *Archive for the History of Exact Sciences* 27 (1982) 213–282.

- SCHOLZ, Erhard [2004]. *Carl Friedrich Gauss' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1829er Jahren.* arXiv:math/0409578v1 [math.HO] (29 September 2004)

- SCHUBRING, Gert [1993]. Bernard Bolzano — Not as unknown to his contemporaries as is commonly believed? *Historia Mathematica* 20 (1993) 45-53.

- SCHWARZ, Wolfgang [2001]. *Aus der Geschichte der Zahlentheorie* (ergänzte Ausarbeitung einer einstündigen Vorlesung im Winter-Semester 2000/2001). <http://www.math.uni-frankfurt.de/~schwarz/schwarz/g_ztws98.pdf>

- SCHWERMER, Joachim [2010]. Minkowski in Königsberg 1884: a talk in Lindemann's colloquium. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 47, n. 2 (April 2010) 355-362.

- SEEBACH, J. Arthur; SEEBACH, Linda A.; STEEN, Lynn A. [1970]. What is a sheaf? *The American mathematical monthly*, vol. 77, n. 7 (1970) 681-703.

- SEGRE, Michael [1994]. Peano's axioms in their historical context. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 48, n. 3-4 (1994) 201-342.

- SEIDENBERG, A. [1975]. Did Euclid's *Elements*, Book I, develop geometry axiomatically? *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 14, n. 4 (1975) 263-295.

- SERRES, Michel [1990]. *Hermes, uma filosofia das ciências*. Rio de Janeiro, Graal.

- SHABEL, Lisa [1998]. Kant on the 'symbolic construction' of mathematical concepts. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 29 n. 4 (1998) 589-621.

- SHAFAREVICH, Igor Rostislavovich [1974]. *Basic algebraic geometry*. Berlin, Springer-Verlag.

- SHAFAREVICH, Igor Rostislavovich [1983]. Zum einhunderfünfzigsten Geburtstag von Alfred Clebsch. *Mathematische Annalen* Band 266 (1983) 135-140.

- SHANK, J. B. [2004]. There was no such thing as the 'Newtonian revolution', and the French initiated it. Eighteenth-century mechanics in France before Maupertuis. *Early science and medicine*, vol. 9, n. 3 (2004) 257-292.

- SHAPIRO, Alan E. [2004]. Newton's "experimental philosophy". *Early science and medicine*, vol. 9, n. 3 (2004) 185-217.

- SHARPE, R. W. [2000 (1997)]. *Differential geometry*. Berlin, Springer-Verlag.

- SHEA, William R. [1979]. Why historians of science and philosophers of science should speak to one another. *Anais do Simpósio sobre História e Filosofia da Ciência*, 41-80. São Paulo, Academia de Ciências do Estado de São Paulo.

- SHENITZER, Abe [1994]. How hyperbolic geometry became respectable. *The American mathematical monthly*, vol. 101 (1994) 464-470.

- SHERRY, D. [1991]. The Logic of Impossible Quantities. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 22 (1991) 155-166

- SHOKRANIAN, Salahoddin [2010]. *Uma breve história da teoria dos números no século vinte*. Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna.

- SIEGBERG, Hans Willi [1981]. Some historical remarks concerning degree theory. *The American Mathematical Monthly*, vol. 88, n. 2 (1981) 125-139.

- SIERKSMA, Gerard; SIERKSMA, Wybe [1999]. The great leap to the infinitely small. Johann Bernoulli: mathematician and philosopher. *Annals of Science* 56 (1999) 433-449.

- SILLIMAN, Robert H. [1963]. William Thomson: Smoke rings and nineteenth-century atomism. Isis vol. 54, n. 178 (1963) 461-474.

- SILVA Filho, Waldomiro José [2002]. *Epistemologia e ensino de ciências*. Salvador, Arcadia.

- SILVA, Ana Paula Bispo da [2006]. *O desenvolvimento das mecânicas-não euclidianas durante o século XIX*. Campinas, UNICAMP.

- SILVA, Jairo José da [1989]. *Sobre o predicativismo em Hermann Weyl*. Campinas, UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História das Ciências.

- SMIT, Houston [2000]. Kant on marks and the immediacy of intuition. *The Philosophical Review*, vol. 109, n. 2 (April 2000) 235-266.

- SMOGORZHEVSKI, A. S. [1976]. *Lobachevskian geometry*. Moscovo, Mir.

- SOMMERVILLE, D. M. Y. [1958 [1914]]. *The elements of non-euclidean geometry*. New Yor, Dover Publications.

- SOTOMAYOR TELLO, Jorge [1993]. O elipsoide de Monge. *Matemática Universitária*, n. 15 (dez. 1993) 33-47.

- SOUZA, Robert Lima de [1990]. O método de análise da geometria grega: A questão do justificacionismo na interpretação dos historiadores da matemática. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* série 2, v. 2, n. 1, 67-83, jan-jun 1990.

- STEIGERWALD, Joan [2003]. The dynamics of reason and its elusive object in Kant, Fichte and Schelling. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 34 (2003) 111-134.

- STEIN, Howard. [1988]. *Logos*, logic, and *logistiké*. Some philosophical remarks on nineteenth-century transformations of mathematics. In: *History and philosophy of modern mathematics*. *Minnesota studies in the philosophy of science*, vol. XI, eds. W. Aspray and P. Kitcher, University of Minnesota Press, Minneapolis (1988) 238-259.

- STEINER, Mark [1978]. Mathematical explanation. *Philosophical studies*, vol. 34 (1978) 135-151.

- STEWART, Ian [1973]. *Galois theory*. London, Chapman and Hall.

- STEWART, Ian [1991 (1990)]. *Será que Deus joga dados*? Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- STEWART, James [2005 (2003)]. *Cálculo* (quinta edição). São Paulo, Pioneira Thomson Learning.

- STILLWELL, John [1982]. The word problem and the isomorphism problem for groups. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, vol. 6, n. 1 (January 1982) 33-56.

- STILLWELL, John [2008]. *Naive Lie theory*. Berlin, Springer-Verlag.

- STRUIK, Dirk J. [1933-1934]. Outline of a history of differential geometry. *Isis* (1933:92-120) *Isis* (1934:161-191].

- STRUIK, Dirk J. [1987]. *A concise history of mathematics*. New York, Dover Publications.

- STRUIK, Dirk J. [1988 [1961]]. *Lectures in classical differential geometry*. New York, Dover Publications.

- SUTHERLAND, Daniel [2004]. Kant's philosophy of mathematics and the Greek mathematical tradition. *The philosophical review*, vol. 113, n. 2 (April 2004) 157-201.

- TANAKA, Setsuko [1999]. Boltzmann on mathematics. *Synthese*, vol. 119, n. 1-2 (1999) 203-232.

- TATON, René [1954]. Une lettre inédite de Dirichlet. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tomo 7, n. 2 (1954) 172-175.

- TATON, René [1966]. *A ciência contemporânea*. Primeiro volume — *O século XIX*. São Paulo, Difusão Europeia do Livro.

- TATON, René [1971]. *A ciência no século XX*. Primeiro volume — *Início*. São Paulo, Difusão Europeia do Livro.

- TAZZIOLI, Rossana [2001]. Green's function in some contributions of 19th century mathematicians. *Historia Mathematica*, vol. 28 (2001) 232-252.

- TAZZIOLI, Rossana [2003]. Towards a history of the geometric foundations of mathematics. *Revue de Synthèse*, cinquième série (2003) 11-41.

- THAYER, Javier [1987]. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora.

- THIELE, Rüdger [2003]. Hilbert's twenty-fourth problem. *The American Mathematical Monthly*, vol. 110, n. 1 (January 2003) 1-24.

- THOM, René [1991]. *Leaving mathematics for philosophy. Round-table discussion*. In: CASACUBIERTA & CASTELLET [1991:1-12, 87-108].

- THOMAS, Downing [2003]. Condillac's other ambitions. Scholarship after the heyday of heydays. *Common knowledge*, vol. 9, n. 2 (2003) 286-310.

- THOMPSON, Paul [1988]. The nature and role of intuition in mathematical epistemology. *Philosophia* 26 (3-4) (March 1998) 279-319.

- THUILLIER, Pierre [1994 [1988]]. *De Arquimedes a Einstein (a face oculta da invenção científica)*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- THURSTON, William P. [1994]. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* (new series), vol. 30, n. 2 (April 1994) 161-177.

- TORRETTI, Roberto [1996]. *Relativity and geometry*. New York, Dover Publications.

- TRUESDELL, Clifford [1968]. *Essays in the history of Mechanics*. Berlin, Springer-Verlag.

- ULLMAN, Daniel H. [1999]. Proofs from THE BOOK. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, n. 7 (August 1999) 789-791.

- UNGAR, Abraham [1998]. From Pythagoras to Einstein: the hyperbolic Pythagorean theorem. *Foundations of physics*, vol. 28, n. 8 (1998) 1283-1321.

- UNGAR, Abraham [2000]. The bifurcation approach to hyperbolic geometry. *Foundations of physics*, vol. 30, n. 8 (2000) 1257-1282.

- UNGAR, Abraham [2002]. *Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas precession - The theory of gyrogroups and gyrovector spaces*. New York, Kluwer Academic Publishers.

- UNGAR, Abraham [2003]. On the appeal to a pre-established harmony between pure mathematics and relativity physics. *Foundation of Physics Letters*, vol. 16, n. 1 (February 2003) 1-23.

- USPENSKI, V. A. [1987 (1982)]. *Gödel's incompleteness theorem*. Moscovo, Mir Publishers.

- VALENCIA, V. Sánchez [2001]. An Athenaeum curiosity: De Morgan's reviews of Boole and Jevons. *History and Philosophy of Logic* 22 (2001) 75-79.

- VALIRON, Georges [1962]. *Formation et évolution de la notion de fonction analytique d'une variable*. In: Le LIONNAIS [1962:157-172].

- VERNANT, Jean-Pierre [1984]. *As origens do pensamento grego*. São Paulo, Difel.

- VEYNE, Paul [1992]. *Como se escreve a história*. Brasília, Editora da UNB.

- VLADIMIROV, Yu; MITSKIÉVICH, N.; HORSKÝ, J. [1987 [1984]]. *Space, time, gravitation*. Moscovo, Editorial Mir.

- VOLKERT, Klaus [1993]. On Helmholtz' paper "Über die tatsächlich Grundlagen der Geometrie". *Historia Mathematica*, vol. 20 (1993) 307-309.

- VOLOCH, Jose Felipe; MARTIGNON, Laura [1988]. Walter Feit comenta o Teorema da Ordem Ímpar e a classificação dos grupos simples. *Matemática Universitária*, n. 7 (junho 1988) 11-20.

- WAERDEN, Bartel van der [1965]. Wie der Beweis der Vermutung von Baudet gefunden wurde. *Abh. math. Semin. Univ. Hamburg 28* (1965) 6-15

- WAERDEN, Bartel van der [1968]. Eupalinos and his tunnel. *Isis*, v. 59 (1968) 82-83.

- WAERDEN, Bartel van der [1971]. The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 7, n. 3 (1971) 171-180.

- WAERDEN, Bartel van der [1975]. On the sources of my book *Moderne Algebra*. *Historia Mathematica*, vol. 2 (1975) 31-40.

- WAERDEN, Bartel van der [1976]. Hamilton's discovery of the quaternions. *Mathematics magazine*, vol. 49, n. 5 (1976) 227-234.

- WALTEN, Craig [1969]. Malebranche's ontology. *Journal of the history of philosophy*

- WALTER, Scott [1997]. La vérité en géométrie: sur le sujet de la doctrine conventionnaliste. *Philosophia Scientiae* 2 (1997) 103-135

- WALTER, Scott [1999]. The non-Euclidean style of Minkowski relativity. In: Jeremy J. Gray (ed.). *The Symbolic Universe: Geometry and Physics*, p. 91–127. Oxford, Oxford University Press.

- WEIL, André [1950]. Number theory and algebraic geometry. *Proceedings of the International Mathematical Congress*, vol. VI, n. II 90-100.

- WEIL, André [1951]. *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, by Claude Chevalley. *Bulletin of the American Mathematical Society* 57 (1951) 384-398.

- WEIL, André [1978]. Who betrayed Euclid? *Archives for History of Exact Sciences,* vol. 19 (2) 91-93.

- WEIL, André [1984]. Euler. *The American mathematical monthly*, vol. 91, n. 9 (November 1984) 537-542.

- WEIL, André [1991 (1978)]. História da matemática: porquê e como. *Matemática Universitária*, n. 13 (1991) 17-30.

- WEINSTOCK, Robert [1974]. *Calculus of variations (with applications to physics and engineering)*. New York, Dover Publications.

- WEYL, Hermann [1940]. The mathematical way of thinking. *Science*, vol. 92, n. 2394 (November 1940) 437-446.

- WEYL, Hermann [1944A]. David Hilbert and his mathematical work. *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, vol. 4, n. 13 (November 1944) 547-553.

- WEYL, Hermann [1944B]. David Hilbert and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society* 50 (1944) 612-654.

- WEYL, Hermann [1946]. Mathematics and logic. *The American mathematical monthly*, vol. 53, n. 1, 2-13.

- WEYL, Hermann [1985 (1953)]. Axiomatic versus constructive procedures in mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 7, n. 4 (1985) 12-17, 38.

- WEYL, Hermann [1995 (1932)]. Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension. (Tradução, por Abe Shenitzer, de *Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnis*, alocução proferida em 1931.) *The American mathematical monthly*, vol. 102, n. 5 (May 1995) 453-460.

- WEYL, Hermann [2000 (1949)]. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. München, Oldenbourg.

- WHITROW, G. J. [1993]. *O tempo na história*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

- WILHELM, Kurt [1963]. *Handwörterbuch Französich*, zweiter Teil (Deutsch-Französich]. Berlin, Langenscheidt.

- WILSON, Adrian; ASHPLANT, T. G. [1988]. Whig history and present-centered history. *The historical journal* **31** (1988) 1-16.

- WINTERBOURNE, A. T. [1981]. Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 12, n. 1 (1981) 33-46.

- WREN, F. L.; GARRETT, J. A. [1933]. The development of the fundamental concepts of infinitesimal analysis. *The American Mathematical Monthly*, vol. 40, n. 5 (1933) 269-281.

- YAGLOM, Isaak Moiseevich [1979 [1969]]. *A simple non-euclidean geometry and its physical basis*. Berlin, Springer-Verlag.

- YAGLOM, Isaak Moiseevich [1988]. *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century*. Boston, Birkäuser.

- YAVETZ, Ido [1998]. On the homocentric spheres of Eudoxus. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 52, n. 3 (1998) 221-278.

- YE, Feng [2010]. The applicability of mathematics as a scientific and a logical problem. *Philosophia Mathematica*, vol. 18, n. 2 (June 2010) 144-165.

- YOUSCHKEVITCH, A. P. [1976]. *The concept of function up to the middle of the nineteenth century. Archive for History of Exact Sciences*, vol. 16, n. 1 (1976) 37-85.

- ZAHAR, Elie [1983]. Logic of discovery or psychology of invention? *The British Journal for the philosophy of Science* 34 (1983) 243-261.

- ZARISKI, Oscar [1947]. A new proof of Hilbert's *Nullstellensatz. Bulletin of the American Mathematical Society* 53 (1947) 362-368.

- ZEEMAN, Erik Christopher [sem data]. *Uma introdução informal à topologia das superfícies*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, série Monografias de Matemática, n. 20.

- ZEEMAN, Erik Christopher [1964]. Causality implies the Lorentz group. *Journal of mathematical physics*, vol. 5, n. 4 (1964) 490-493.

- ZÚÑIGA, Angel Ruiz [1995]. Introdução à versão espanhola das *Disquisitiones arithmeticae*. In: GAUSS [1801:IX-XXX].

Nota: Os títulos constante dessa seção foram consignados em confirmadade com as normas prescritas pela ABNT, secundadas pela prática adotada por organismos internacionais, como o JSTOR, e por outras sociedades de reconhecida relevância, como a *American Mathematical Society* e a *Société Mathématique de France*.