Universidade Federal da Bahia

Universidade Estadual de Feira de Santana

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

JAMILLE VILAS BOAS DE SOUZA

OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS NA AULA DE MATEMÁTICA

SALVADOR - BA
2011

JAMILLE VILAS BOAS DE SOUZA

OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa

SALVADOR - BA
2011

JAMILLE VILAS BOAS DE SOUZA

OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito para obtenção do grau de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa (UFBA)
Orientador
Prof[a]. Dr[a]. Cristina de Castro Frade (UFMG)
Prof. Dr. José Luis de Paula Barros Silva (UFBA)
Prof[a]. Dr[a]. Andreia Maria Pereira de Oliveira (UEFS)

Universidade Federal da Bahia

Universidade Estadual de Feira de Santana

OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Resultado da Banca: ______________________

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa
Universidade Federal da Bahia – UFBA

____

Profª. Drª. Cristina de Castro Frade
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

____

Prof. Dr. José Luis de Paula Barros Silva
Universidade Federal da Bahia – UFBA

____

Profª. Drª. Andreia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Aos meus pais e meus irmãos, por todo amor e carinho e à todos aqueles que estavam ao meu lado nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Isaac Newton

À Deus, pelo dom da vida e por toda inspiração.

Aos meus pais e meus irmãos, pelo amor e apoio incondicional.

À Jonei, meu querido orientador, por ter acompanhado cada passo dessa jornada. Pela paciência, carinho, dedicação e incentivo. Minha profunda gratidão.

À Elizabeth, minha "co-orientatora", pelas conversas e conselhos. Muito obrigada pelo cuidado e preocupação constante.

Aos amigos do grupo de estudo: Rachel, Thaine, Vírginia, Jaíra, Maiana, Flávia, Elizabeth e Jonei, pelas contribuições, convívio e apoio.

Aos integrantes do Núcleo de Pesquisa em Modelagem Matemática (NUPEMM) pelo acolhimento e incentivo.

Ao grupo do Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA, pelos momentos de alegrias e troca.

Às professoras e aos alunos participantes da pesquisa, por terem cedido suas imagens e falas para análise.

À professora Dra. Cristina Frade, ao professor Dr. José Luis de Paula Barros Silva e à professora Dra. Andreia Maria Pereira de Oliveira, pelas contribuições dadas por ocasião do exame de qualificação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (UFBA/UEFS), por todas as contribuições.

À Antônio dos Santos Filho e à Elinalva Vasconcelos, meus professores na graduação, pelo grande incentivo e apoio.

Aos colegas do Programa, em especial, à Deivide, pelo incentivo, interlocução e momentos de descontração.

Aos amigos Jean, Thiago, Jane e Tomaz, pelos momentos de estudos na graduação, conversas e companheirismo.

À Eduardo, meu amor, pelo carinho e incentivo. Por entender todos os momentos dessa jornada.

À George e à Eduardo por me dizerem, quase todos os dias, desde o meu ingresso no mestrado: “Que vida boa, fica em casa o dia todo. Não faz nada.” e mesmo não sendo verdade, descontrair os meus momentos de tensão.

Aos amigos Nanda, Marla, Karine, Marquinhos, Dudu e Manu por estarem ao meu lado nesses dias, fazendo-os muito mais felizes.

À Capes, pelo grande apoio através da bolsa.

RESUMO

Esse trabalho teve como objetivo compreender a participação dos alunos na aula de matemática ao utilizar materiais manipuláveis. O referencial teórico que fundamenta o estudo encontra-se na perspectiva da aprendizagem situada, elaborada a partir de trabalhos de Jean Lave e Etienne Wenger. Para tal propósito, analisei como os alunos se envolvem nas atividades com materiais manipuláveis na aula de matemática, como eles interagem com o material, com os outros alunos e com o professor. Para isso, foi utilizada uma abordagem qualitativa. Os participantes dessa pesquisa foram alunos do nono ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de Salvador e alunos da disciplina de Geometria Analítica de uma universidade pública no estado da Bahia. Nestes dois contextos, as aulas de matemática foram observadas e gravadas em vídeos. Os resultados sugerem que a natureza da participação dos alunos, neste ambiente, varia em pelo menos quatro padrões: reconhecer objetos matemáticos no manipulável, definir objetos matemáticos com o auxílio do manipulável, usar o material para justificar suas conjecturas (o que inclui a dedução de algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis) e não usar o manipulável para argumentar na sala de aula.

Palavras-chave: Materiais Manipuláveis. Aprendizagem Situada. Participação. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This study aimed to understand the students' participation in math class to use manipulatives. The theoretical framework underpinning the study is the perspective of situated learning, drawn from Jean Lave and Etienne Wenger. For this purpose, analyzed how students engage in activities with manipulatives in math class, how they interact with the material with other students and the teacher. For this, used a qualitative approach. Participants in this study were ninth graders of elementary schools in a public school in Salvador and students of Analytical Geometry of a public university in the state of Bahia. In these two contexts, the mathematics lessons were observed and recorded on videotape. The results suggest that the nature of students' participation in this environment, changes in at least four standards: recognize the mathematical objects in manipulative, define mathematical objects with the aid of the manipulative, use of the material to justify your conjecture (including the deduction of algorithms math using manipulatives) and non-use of manipulative to argue in the classroom.

Key Words: Manipulative materials. Situated Leaning. Participation. Teaching Math.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentarei minha aproximação com o tema circunscrito pelo problema desta pesquisa, descrevendo a trajetória do início da graduação até o momento da escrita desta dissertação. Aqui, também explicito o objetivo da pesquisa, uma revisão de literatura e a fundamentação teórica relacionada ao tema proposto. Relatarei, ainda, o método utilizado e as especificidades com relação à escrita deste trabalho.

1.1 APROXIMAÇÃO COM O PROBLEMA DE PESQUISA

No primeiro dia do meu curso de graduação em Matemática, houve uma recepção aos calouros, realizada pelos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA). Entre as diversas apresentações, a professora Elinalva Vergasta Vasconcelos, responsável pelo Laboratório de Ensino de Matemática e Estatística da UFBA (LEMA-UFBA), falou sobre o LEMA-UFBA e expôs alguns materiais manipuláveis[1].

Meu contato com estes materiais[2], ainda no primeiro semestre de 2004, como monitora em duas exposições do LEMA-UFBA, potencializou o interesse em estudá-los, o que culminou no meu ingresso no projeto *Apoio às Atividades do Laboratório de Matemática e Estatística UFBA – 3ª etapa*, promovido pelo Colegiado de Matemática do Instituto de Matemática da UFBA. Neste projeto, tive como atividade, juntamente com outros monitores, assistir uma palestra quinzenalmente, relacionada a algum tópico da matemática, estudar sobre o tema exposto e propor um material manipulável, o qual seria confeccionado por nós e posteriormente, introduzido ao acervo do LEMA-UFBA.

Nos anos posteriores, além de ser monitora das exposições do LEMA-UFBA, participei de mais dois projetos relacionados a laboratórios de ensino. No projeto *Museu de Ciências em Matemática via LEMA-UFBA*, fiz estudos sobre tópicos de Matemática utilizando materiais manipuláveis, tais como os que representavam os cinco sólidos de Platão, construídos com massa acrílica, papel, cola e tinta e manipuláveis para o estudo de grafos, feitos com canudos, bolas de isopor, tinta e papel. Além disso, organizei exposições eventuais

---

[1] Assumo materiais manipuláveis tal qual definido por Reys (1971 apud MATOS; SERRAZINA, 1996, p.78). Para ele, materiais manipuláveis são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”. Nesta pesquisa, focarei àqueles que utilizados para fins didáticos.

[2] Para evitar repetições, serão utilizados como sinônimos os termos materiais, manipuláveis ou manipulativos referindo-se a materiais manipuláveis.

do LEMA-UFBA, ajudando, ainda, na catalogação, aperfeiçoamento e elaboração do cadastro de seu acervo.

Outro projeto que participei chamou-se *Educação em Ciência e Tecnologia para Escolas de Ensino Fundamental do Município de Candeias*, uma parceria entre a UFBA, a DOW Brasil[3] e a Prefeitura de Candeias (BA), voltado para as escolas do Ensino Fundamental da rede municipal de Candeias. Nesta ocasião, tive a oportunidade de implantar, juntamente com a equipe do projeto, um laboratório de Ensino de Ciências em uma escola no município de Candeias, prosseguindo, assim, meus trabalhos com manipuláveis, pois este laboratório também possuía materiais para o ensino da matemática.

Durante essas experiências, parecia-me claro que os manipuláveis tinham um papel na aprendizagem[4] dos alunos, pois nas exposições e oficinas que participava, a utilização desses materiais mostrava-se bastante motivadora. Nestas, os alunos de licenciaturas mostravam-se envolvidos, fazendo perguntas e até hipóteses de como seria usar esses materiais em suas salas de aulas.

Enquanto lecionava em uma escola da cidade de Salvador, porém, ocorreram-me diversos questionamentos que me fizeram repensar a utilização de manipuláveis na sala de aula. Percebi que a motivação dos alunos não era homogênea. Havia alunos que se mostravam mais interessados quando era realizada uma aula apenas expositiva e dialogada, na qual eram convidados a participar, comentando e exemplificando as colocações feitas por mim, do que em aulas em que se usavam manipuláveis.

A partir de então, questionei o potencial dos manipuláveis no âmbito da sala de aula e decidi estudá-los/conhecê-los de maneira mais sistemática. Neste período, solicitei ajuda a Antônio dos Santos Filho, professor de Metodologia e Prática do Ensino da Matemática da UFBA, que me indicou algumas leituras e incentivou-me a ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História da Ciência da UFBA e da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), o qual também abrange estudos relacionadas à Educação Matemática e convergia com meus interesses.

No segundo semestre de 2008, li livros e artigos relacionados à área de interesse, o que resultou no primeiro projeto. Este tinha como objetivo estudar como se processa a aquisição do conhecimento algébrico fazendo uso de materiais manipuláveis. A partir do meu ingresso no Programa de Pós-Graduação, integrei o Núcleo de Pesquisa em Modelagem Matemática

[3] A Dow Brasil é uma companhia de indústrias de produtos químicos, plásticos, automotivos e para a agricultura.

[4] Este termo será esclarecido nas próximas seções. Por enquanto, tomemos ele, aqui, como intuitivo.

(NUPEMM), cursei disciplinas relacionadas ao ensino, história e filosofia das ciências, além de participar do Grupo de Estudos em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA), que me oportunizaram rever conceitualmente as idéias apresentadas no primeiro projeto.

Percebi que o interesse de pesquisa então esboçado não estava mais correspondendo ao modo como passei a conceituar a aprendizagem humana. Para mim, a aprendizagem não era mais concebida em termos de aquisição de conhecimento e sim, em termos de participação em determinada prática social. Desse modo, decidi estudar qual a participação[5] dos alunos na aula de matemática em tarefas com materiais manipuláveis.

Nas seções que seguem, discutirei pesquisas que abordam materiais manipuláveis no ensino e na aprendizagem da matemática, com fim de refinar o objetivo do presente estudo.

1.2 UMA REVISÃO DE LITERATURA

Na literatura, materiais manipuláveis são definidos de algumas maneiras (CLEMENTS, 1999; MOYER, 2001; REYS, 1971 apud MATOS; SERRAZINA, 1996). Para Moyer (2001), materiais manipuláveis são objetos projetados para representar explicitamente e fisicamente ideias matemáticas. Contudo, entendo que uma tesoura, por exemplo, é um manipulativo e esta não foi projetada para representar idéias matemáticas. Além disso, “materiais manipuláveis” não se referem apenas a materiais utilizados no ensino de matemática, de modo que se pode falar em materiais manipuláveis referindo-se ao ensino de química, por exemplo.

Clements (1999), por sua vez, assume que os materiais manipuláveis vão além de manipulativos físicos e, assim, programas de computador, como *softwares*[6], podem ser considerados manipulativos, porém assumo que manipulativos devem ter o caráter físico. Desse modo, assumo que materiais manipuláveis são objetos que podem ser tocados, sentidos e movimentados pelas pessoas (REYS, 1971, apud MATOS; SERRAZINA, 1996). Neste caso, estou focando nos materiais utilizados no ensino e aprendizagem de matemática, como uma moeda e cédulas de dinheiro utilizadas para discutir algo relativo à matemática do cotidiano, uma balança utilizada no ensino de equações algébricas, além de objetos usados para representar uma ideia, como uma folha de papel A4 representando um retângulo.

---

[5] Este termo será esclarecido na seção 1.3.
[6] Materiais didáticos, como *softwares*, podem ser definidos como materiais didáticos virtuais que não são palpáveis.

Apesar dos diferentes entendimentos conceituais sobre estes materiais, algumas pesquisas apontam os manipuláveis como facilitadores da aprendizagem matemática (KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001; LORENZATO, 2006; PASSOS, 2006). Para Lorenzato (2006), os materiais manipuláveis podem ser catalisadores para o aluno construir o que ele chama de saber matemático. Passos (2006), por sua vez, relata que estes materiais servem como mediadores na relação professor/aluno/conhecimento e destaca a necessidade de discussões de caráter epistemológico sobre estes materiais na formação dos professores.

Existem outros trabalhos, no entanto, que mostram a utilização dos manipuláveis apenas como modo de entreter os alunos. Moyer (2001), por exemplo, fez um estudo em que foram observados dez professores que receberam manipuláveis para utilizar nas suas salas de aula. A autora aponta que os professores usavam pouco estes materiais e quando fizeram uso, foi apenas para tornar a aula mais divertida, não relacionando os manipuláveis à matemática. Entretanto, a autora não especifica se os professores foram socializados com estes materiais antes de levá-los para a sala de aula.

Turrioni e Perez (2006) chamam a atenção para a necessidade dessa socialização, argumentam que a opção pelo uso de cada manipulável deve ocorrer somente após a reflexão do professor sobre as possibilidades e limitações do manipulável. Além disso, eles afirmam que o uso do material depende do profissional que o emprega, do conteúdo a ser estudado, dos objetivos a serem atingidos e do tipo de aprendizagem que se espera alcançar.

Outro aspecto também abordado na literatura consultada é a possibilidade de restringir o ensino ao nível sensitivo (PAIS, 2001, 2006), em que os alunos interagem com estes objetos sem relacioná-los aos conceitos matemáticos. Segundo Pais (2006), isso ocorre quando o manipulável passa a ser utilizado como finalidade em si mesmo. Superar isto passa pelo trabalho de uma interpretação dialética, envolvendo o manipulável e uma reflexão sobre esse mundo.

Pais (2001, p.2) delineia, ainda, um problema que ele denomina "empirismo desprovido de significado" em relação a estes materiais. Nesse caso, professores assumem que os alunos aprendem conceitos matemáticos por tocar e mover objetos. Fiorentini e Miorim (1990, p.3), em convergência com esta idéia, afirmam que:

> o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente e lúdico. Nenhum material é válido por si só. [...] A simples introdução de jogos ou atividades no ensino de matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina.

As pesquisas citadas, em geral, apóiam o uso de manipuláveis na sala de aula, indicando esses materiais como importantes componentes na prática pedagógica, embora não sejam essenciais para tal. No entanto, por vezes, é apontado que o conhecimento matemático não se deriva do uso do material, porém, pode ser construído a partir dos significados atribuídos a esta ação.

Apesar da contribuição dos estudos apresentados para a educação matemática, estas pesquisas parecem não explorar as ações dos alunos com os manipuláveis em termos da participação no discurso da matemática escolar. A noção de participação focaliza o modo que os alunos engajam-se na prática da sala de aula. É com o intuito de compreender esta participação, que esta pesquisa inspira-se em alguns conceitos da perspectiva de Aprendizagem Situada, elaborados a partir de Lave e Wenger (1991), na qual aprendizagem significa mudança de participação em práticas, conforme a citação a seguir:

> Qualquer que seja o lugar no qual as pessoas se envolvem por períodos substanciais de tempo, dia-a-dia, em fazer coisas nas quais suas atividades correntes são interdependentes, aprendizagem é parte da mudança de suas participações em práticas dinâmicas[7] (LAVE, 1996, p.150).

Na seção que segue, alguns desses conceitos serão explicitados, além de aspectos gerais dessa perspectiva, com o intuito de situar o leitor sobre o lugar teórico de onde falo.

1.3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Existem, por vezes, dúvidas sobre o significado da aprendizagem situada resultante de diferentes interpretações desta teoria (LAVE, WENGER, 1991). Em alguns casos “situado” parece significar meramente que as ações das pessoas são localizadas no espaço e no tempo. Em outras ocasiões, isto parece significar que as ações são sociais apenas no sentido estrito, ou seja, que envolvem outras pessoas ou que as ações imediatamente dependem, para ter significado, do conjunto social que as ocasionou. Estes tipos de interpretações são semelhantemente ingênuos (LAVE, WENGER, 1991).

---

[7] Tradução minha. Texto original em inglês.

O primeiro ponto a considerar é que mesmo o conhecimento mais geral somente tem poder em circunstâncias especificas (LAVE, WENGER, 1991). Nesse sentido, a aprendizagem é entendida como um aspecto inseparável da prática social, ela é uma constituinte da prática e vinculada à participação. O conceito de prática é atribuído, nessa perspectiva, a um fazer, mas um fazer num contexto histórico e social que dá estrutura e significado ao que se faz (WENGER,1998). Desse modo, ao falar de prática estou referindo-me a formas de ações que tem o significado compartilhado por um grupo social. Já o conceito de participação refere-se não apenas a eventos locais de engajamento em certas atividades, mas a um processo de ser um envolvido ativamente nas práticas sociais, em que haja a possibilidade de reconhecimento mútuo (WENGER, 1998). O autor utiliza o termo participação para descrever a experiência social das pessoas em termos de serem membros de comunidades.

Disso resulta que nem todo envolvimento é participação, para ser participação deve ocorrer um reconhecimento entre os sujeitos (FRADE, 2003). Um aluno, por exemplo, pode estar envolvido em conversas com outro aluno, conversando sobre o jogo de futebol do dia anterior e não ser reconhecido como participante da prática de estudo de funções conduzido pelo professor. O conceito de participação, assim, é indispensável para entender o de aprendizagem. Este último é caracterizado pela mudança na participação do indivíduo, mais especificamente, na mudança na participação do indivíduo em uma comunidade de prática (LAVE; WENGER, 1991). Ou seja, a participação parcial das pessoas, não desconectada da prática de interesse segue gradualmente em direção a uma participação em que o sujeito compartilha do conhecimento e/ou da prática coletiva.

Comunidade de prática, termo socializado por Etienne Wenger e Jean Lave (1991), é definida como agrupamento de pessoas que compartilham linguagens e aprendem uns com os outros, por contato presencial ou virtual, com um objetivo ou necessidade de resolver problemas, trocar experiências e técnicas. Os membros de uma comunidade de prática trabalham juntos para achar meios de melhorar o que fazem, na resolução de um problema na comunidade ou no aprendizado diário, através da interação regular.

Wenger (1998) salienta o que classifica como as três dimensões de comunidades de prática – um interesse mútuo, um empreendimento conjunto, um repertório partilhado. Ou seja, os membros de uma comunidade de prática desenvolvem não somente um repertório de experiências, histórias e artefatos, que os qualificam para enfrentar certas situações que se tornam recorrentes, mas também apresentam um compromisso com o grupo e competências que diferem seus membros de outras pessoas. De maneira geral, um grupo formado apenas por alunos, ou por alunos e professores de uma determinada turma, ou apenas por professores de matemática, pode caracterizar-se como comunidade de prática. Para tanto, é necessário que estes apresentem as três dimensões como indicado por Wenger (1998), em maior ou menor grau.

Uma aula de matemática em que se utilizam manipuláveis, por exemplo, pode configurar uma comunidade de prática. O professor e os alunos presentes nesta aula compartilham um modo especial de comunicação, quando denominam, por exemplo, um recorte de papel como triângulo, ou quando identificam uma superfície de revolução em um objeto de massa acrílica, o que pode não ocorrer em outro ambiente, mas é ali aceito e utilizado. Podem possuir também um objetivo comum, seja ele o de aprender matemática ou mesmo o de ser aprovado na disciplina, além de terem um compromisso mútuo, podendo ser apenas o de frequentar as aulas, ou empenhar-se nas realizações das tarefas. Neste caso, tornar-se um participante, certamente, inclui engajar-se no uso dos manipuláveis inseridos na aula, inclui atribuir o mesmo significado que o professor atribuiu àquele material na aula de matemática.

Significado, neste caso, é entendido como o sentido de algo. Segundo Wenger (1998), este é sempre o produto de uma negociação. A negociação de significados como definido por ele, inclui nossas relações sociais, nosso envolvimento no mundo e com o mundo, mas não necessariamente envolve conversação ou interação direta entre seres humanos, pode ser entre uma pessoa e um livro, por exemplo. Estas dinâmicas relações permitem-nos atribuir significado seja a um objeto na aula de matemática, seja no dia-a-dia, o que é denominado por ele de negociação de significado. Quando uma professora, na sala de aula, refere-se a um recorte de uma folha de papel e dirige-se aos alunos, indicando que este recorte é um triângulo, ela está atribuindo um significado relacionado àquele recorte naquela determinada prática. É interessante observar, porém, que o significado não existe nem no papel, nem na professora, nem nos alunos, mas nas dinâmicas relações que existem naquela sala de aula de matemática.

Assim, palavras, manipuláveis, gestos e rotinas são usados não somente porque eles são reconhecíveis nas suas relações de engajamento na história, mas também porque eles podem ser reengajados em novas situações. Ou seja, ao utilizar palavras, manipuláveis, gestos, etc., existem significados historicamente atribuídos a eles, porém podemos também atribuir-lhes novos significados. Contudo, não negociamos significados de forma independente como pode parecer. Nós nascemos e o mundo já está constituído socialmente (LERMAM, 2001), existindo, assim, regras com as quais convivemos desde os nossos primeiros momentos de vida. Na maioria das vezes, os significados negociados não são aceitos se destoam amplamente dos significados já estabelecidos histórico e socialmente (WENGER, 1998).

Diante das ideias de prática, de aprendizagem e significado acima apresentadas, podemos ainda nos perguntar: por que indivíduos podem aprender matemática de diferentes modos na “mesma” situação? Tal questionamento nos conduz à noção de identidade situada. Identidade situada é o resultado de transações entre as pessoas e o contexto sociocultural em que se fazem presentes. Tais relações não são fixas (ASKEW, 2008). A identidade situada ou identidade social é o que somos no ambiente social. Por exemplo, um professor provavelmente escreve no quadro branco diferente do modo como ele se expressa no dia a dia. Estas diferentes identidades revelam-se, pois o ambiente social as condiciona, mas não as determina.

Desse modo, a inserção de materiais manipuláveis nas práticas da sala de aula provoca diferentes configurações nas identidades dos alunos e nas suas participações já que, o ambiente social em que eles estão envolvidos se modifica com esta inserção. E assim, para fornecer uma compreensão teórica a respeito da participação dos alunos com os materiais manipuláveis, observei as ações e discursos[8] dos alunos quando realizam as práticas com estes materiais na sala de aula de matemática.

1.4 OBJETIVO

A pergunta que norteia esta pesquisa é a seguinte:

Como os alunos participam da aula de Matemática ao utilizar os materiais manipuláveis?

Assim, **objetiva-se compreender a participação dos alunos na aula de Matemática ao utilizar materiais manipuláveis**.

---

[8] Discurso, neste caso, abrange todas as formas de linguagem, incluindo falas, gestos e signos (LERMAN, 2001).

1.5 JUSTIFICATIVA

Como foi apresentado na revisão da literatura, pode-se perceber que estudos sobre materiais manipuláveis não são recentes. A utilização desses materiais na aprendizagem matemática já foi por diversas vezes analisada (KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001; LORENZATO, 2006; PASSOS, 2006; MOYER, 2001; PAIS, 2001). Porém, as pesquisas realizadas nessa área, em sua maioria, não têm utilizado a Perspectiva Situada para a questão. Esta lente teórica pode revelar novos *insights* sobre o tema, possibilitando uma análise das interações na sala de aula que evidenciam como os materiais manipuláveis constituem a participação do aluno.

Neste contexto, estudar as participações dos alunos quando utilizam os materiais manipuláveis na sala de aula de matemática utilizando a Perspectiva Situada pode preencher uma lacuna na compreensão do ensino de matemática. Desse modo, no âmbito da prática pedagógica, a presente pesquisa pode oferecer resultados teóricos para professores e pesquisadores da educação matemática a respeito da compreensão e da utilização de materiais manipuláveis em sala de aula.

Além disso, minha trajetória acadêmica está bastante ligada ao uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem matemática e, por conseqüência, à interação dos alunos com estes materiais. Desse modo, esta pesquisa contribuiu/contribui para o meu próprio desenvolvimento como pesquisadora e educadora matemática.

1.6 DESCRIÇÃO PRELIMINAR DO MÉTODO DA PESQUISA

Neste estudo, observei o modo como os alunos falam, o que falam, o que focam, seus gestos, ações e como eles se expressam, buscando compreender as participações dos alunos nas aulas de matemática em que são utilizados materiais manipuláveis. Desse modo, a compreensão das participações é possível em função da compreensão das inter-relações no contexto da sala de aula, estudadas e analisadas em uma abordagem qualitativa (DENZIN; LINCOLN, 2005). Na pesquisa qualitativa, o investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretendem estudar elaborando registros sistemáticos de tudo aquilo que ouve e observa (BOGDAN; BIKLEN, 1999).

Neste caso, a coleta de dados foi realizada em salas de aula, em dois cenários distintos, uma no ensino fundamental e outra em nível de ensino superior, com intuito de variar o contexto de obtenção de dados e assim, ampliar subsídios para a análise. A primeira coleta de dados foi realizada em uma sala de aula do nono ano do ensino fundamental, em uma escola municipal da cidade de Salvador. Já o segundo contexto de coleta de dados foi na Universidade Federal da Bahia, na cidade de Salvador, na disciplina de Geometria Analítica. A disciplina observada foi oferecida a alunos da graduação em Engenharia Civil no segundo semestre de sua graduação.

Estes dois cenários foram observados durante as aulas de matemática correspondentes a uma unidade. De acordo com Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999), a observação permite identificar e registrar o comportamento dos pesquisados em seu contexto temporal-espacial. Nas aulas em que os alunos utilizaram os materiais manipuláveis as observações foram documentadas através da gravação em vídeo e de notas de campo, o que possibilitou registrar e analisar o comportamento – manipulação, gestos, falas – dos alunos.

Concomitante com o período da observação, os vídeos foram assistidos, com o intuito de selecionar trechos em que os alunos interagiam com os manipuláveis, o que já fazia parte dos procedimentos de análise de dados. Estes trechos, então, foram transcritos e codificados, ou seja, cada fala dos alunos foi reduzida a um código como uma pequena frase (CHARMAZ, 2006). Nas etapas seguintes, os códigos foram comparados e agrupados em categorias mais abrangentes. Por fim, confrontaram-se os resultados obtidos com a literatura a fim de gerar constructos teóricos ou refinar os já postos na literatura. Nos capítulos que seguem, apresentarei com detalhes estes contextos, a metodologia utilizada nesta pesquisa, além de apresentar e discutir as técnicas de coleta e análise de dados empregadas.

1.7 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é estruturada na forma de capítulos/artigos. Este formato, também conhecido como *multipaper*, permite que artigos sejam gerados e incorporados à dissertação durante o processo de elaboração da mesma (DUKE; BECK, 1999). Tais artigos são geralmente publicados em periódicos nacionais e/ou internacionais, tornando-se acessíveis ao público. Assim, promover-se-á a disseminação de novos resultados entre os próprios pesquisadores ou ainda, entre o pesquisador e a comunidade em geral (DUKE; BECK, 1999).

Neste caso, este primeiro capítulo corresponde a uma introdução, que compreende aspectos da minha aproximação com o problema de pesquisa, apresentando o objetivo da dissertação e sua justificativa. Além disso, compôs este primeiro capítulo uma revisão de literatura relacionada aos materiais manipuláveis e à fundamentação teórica sendo também apresentada uma introdução à metodologia desta pesquisa. Os capítulos 2 e 3, correspondem a artigos independentes, com contextos distintos, embora abordando a mesma área do conhecimento apresentada nesta introdução.

Diferente do primeiro capítulo, os capítulos centrais apresentam a estrutura de artigos submetidos para publicação em revistas científicas. O primeiro artigo, apresentado no segundo capítulo, tem como objetivo compreender a participação dos alunos na aula de Matemática ao utilizar os materiais manipuláveis e, para isso, teve como contexto uma turma do nono ano do Ensino Fundamental II, em uma escola da rede pública da cidade de Salvador, no estado da Bahia. Já o segundo artigo, que corresponde ao terceiro capítulo dessa dissertação, e tem o mesmo objetivo que o capítulo anterior, tem como contexto dos dados uma turma de Geometria Analítica do Ensino Superior. Estes serão submetidos aos periódicos *Relime* e Zetetiké, respectivamente.

O capítulo 4, por sua vez, não será exposto na forma de artigo. Este tem o papel de "entrelaçar" os capítulos 2 e 3, fazendo uma articulação do que neles foi apresentado. A conclusão sintetiza os resultados alcançados, produtos da pesquisa, além de indicar implicações para pesquisas futuras. Acredito que esse formato de trabalho pode atingir um público maior de pesquisadores, já que os artigos podem ser publicados em periódicos, o que facilita o acesso aos pesquisadores da área. Como aponta Duke e Beck (1999), tal modelo aumentaria o potencial da dissertação de ter um impacto na comunidade acadêmica e profissional.

1.8 REFERÊNCIAS

ALVEZ-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

ASKEW. M. Social Identities As Learners And Teachers Of Mathematics. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (ED) **New Direction for Situated Cognition in Mathematics Education**. Melbourne: Mathematics Education Library, p. 59-78, 2008.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Td. ALVAREZ, M. J; SANTOS, S. B.; BAPTISTA, T. M. Portugal: Porto Editora, 1999.

CHARMAZ, K. **Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis**. London: Sage, 2006.

CLEMENTS, D. H. ‘Concrete’ manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, n. 1, p 1-16, 1999.

DENZIN, N.K; LINCOLN. Introduction. In: DENZIN, N.K; LINCOLN. Y.S. (ED) **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage; p. 1-29, 2005.

DUKE, N.K.; BECK, S.W. Education should consider alternative formats for the Dissertation. **Educational Researcher**, v. 28, p. 31-36, 1999.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim SBEM**, v. 7, n.4, 1990.

FRADE, C. **Componentes Tácitos e Explícitos do Conhecimento Matemático de Áreas e Medidas**. 2003. 251 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

KAMII, C.; LEWIS, B.A.; KIRKLAND, L. Manipulatives: When are they useful? **Journal of Mathematics Behavior**, v. 20, p. 21-31, 2001.

LAVE, J. Teaching, as learning, in Practice. **Mind, Culture, and Activity**, v. 3, n. 3, p. 149-161, 1996.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

LERMAN, S. Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying thee Theaching and Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 46, p. 87-113, 2001.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 3- 38, 2006.

MATOS, J.M.; SERRAZINA, M,L. **Didáctica da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

PAIS, L.C. **Ensinar e aprender matemática**. São Paulo: Autêntica, 2006.

PAIS, L.C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria, 2001. Disponível em < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em 23 de setembro de 2009.

PASSOS, C.L.B. Materiais manipuláveis como recurso didático na formação de professores. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 77-92, 2006.

TURRONI, A.M.S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, P. 57 - 76, 2006.

WENGER, E. **Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

2- ARTIGO I

O USO DE MANIPULÁVEIS E A PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS NA AULA DE MATEMÁTICA

Jamille Vilas Boas de Souza[9]
Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa[10]

RESUMO: Neste artigo, analisamos a participação dos alunos no desenvolvimento de uma aula de matemática com materiais manipuláveis, utilizando para isso, uma abordagem qualitativa. Uma aula de matemática do nono ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de Salvador, na qual alunos utilizaram materiais manipuláveis foi observada e analisada. Buscamos algumas noções teóricas sobre a aprendizagem situada, tal como formulada por Jean Lave e Etienne Wenger para analisar trechos dessa aula. Concluímos que os alunos podem participar deste tipo de tarefa na sala de aula reconhecendo e definindo objetos matemáticos no manipulável, além de deduzir algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis.
Palavras-chave: Participação. Materiais manipuláveis. Ensino de matemática.

ABSTRACT: This paper analyzes the participation of students in developing a mathematics lesson with manipulatives, using for this, a qualitative approach. A mathematics lesson of the ninth year of elementary education at a public school in Salvador, in which students used manipulatives was observed and analyzed. We seek some theoretical notions about situated learning, as formulated by Jean Lave and Etienne Wenger to analyze episodes of this lesson. We conclude that students can engage in this task in the classroom by recognizing and defining the mathematical objects in manipulative, and deduce mathematical algorithms using manipulatives.
Key words: Participation. Manipulative materials. Teaching Math.

---

[9]Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).
[10] Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA e UEFS e do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFBA.

2.1 INTRODUÇÃO

O uso de materiais didáticos, isto é, artefatos especialmente concebidos para fins educativos, como livros e apostilas, tem sido foco de algumas investigações sob a perspectiva da Educação Matemática (GELLERT, 2004; HERBEL-EISENMANN; WAGNER, 2005; LORENZATO, 2006). Gellert (2004), por exemplo, apresenta um breve caso, mostrando a divergência de interesses que pode ocorrer ao usar materiais didáticos em uma aula de matemática. Neste estudo, uma professora de matemática de escola primária lê um texto para seus alunos. Este texto é uma história que envolve cinco pássaros e um gato e suscita nos alunos questionamentos em relação à cor e ao gênero dos pássaros, questões que não se referem às atividades matemáticas.

Segundo o autor, os alunos ainda não sabiam que, na aula de matemática, as histórias, perguntas, desenhos e problemas são utilizados para desenvolver as atividades matemáticas. Em contrapartida, quando um professor de matemática do ensino médio encontra-se em sala de aula com qualquer material, os alunos possuem a certeza de que eles são esperados para agir matematicamente (GELLERT, 2004). Ou seja, as ações dos alunos em relação aos materiais didáticos dependem não apenas dos conhecimentos prévios em matemática dos alunos e da experiência matemática deles, mas também das normas sociais que regulam as salas de aula.

Convergindo com Gellert (2004), Lorenzato (2006) argumenta que o uso do material didático é estreitamente ligado ao contexto escolar, de modo que estes são uma alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno e, como tal, não é garantia de um bom ensino, tampouco de aprendizagem. O autor foca também no que ele chama de material didático manipulável concreto, afirmando que estes podem auxiliar na aprendizagem matemática do aluno.

Na maioria das vezes, Lorenzato (2006) refere-se aos materiais didáticos manipuláveis concretos apenas como materiais manipuláveis. Da mesma forma, utilizaremos a expressão “materiais manipuláveis” e assumimos que estes são objetos que podem ser tocados, sentidos e movimentados pelas pessoas (REYS, 1971 apud MATOS; SERRAZINA, 1996). Palitos de picolé, folhas de papel, bolas de isopor são exemplos destes materiais[11].

---

[11] Para evitar repetições utilizaremos, por vezes, o termo materiais, manipuláveis ou manipulativos referindo-se aos materiais manipuláveis.

2.2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Referindo-se à utilização de materiais manipuláveis no ensino da matemática, estudos desafiam a ideia de que esses materiais possuem uma potencialidade em si (KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001; PAIS, 2001; LORENZATO, 2006). Para os autores citados, a potencialidade dos manipuláveis depende do ambiente social em que o material é inserido.

Pais (2001, p.2) chama atenção para o “empirismo desprovido de significado” que pode ocorrer em relação a estes materiais: professores podem assumir que os alunos aprendem conceitos matemáticos por, simplesmente, tocar e mover objetos. O autor relembra o movimento da Escola Nova que defendia os chamados métodos ativos, os quais envolviam, quase sempre, o uso de manipulativos. Para ele, o princípio do aprender fazendo, implícito nessa tendência, por vezes, foi interpretado equivocadamente como uma exclusiva manipulação de objetos, sendo menosprezada a estreita relação que deve haver entre a atividade empírica e o aprendizado.

Clements (1999) também apresenta críticas em relação à afirmação da “eficácia” dos manipuláveis pelo motivo de serem objetos que os alunos podem tocar, pegar. O autor acredita que embora os manipulativos tenham um lugar importante na aprendizagem matemática, seu caráter físico não a garante.

Geralmente, a expectativa dos professores quanto ao uso de manipuláveis é de reduzir as dificuldades do ensino da matemática (SANTANA, 2008). Assim, eles utilizam estes materiais acreditando poder auxiliá-los no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Entretanto, no estudo realizado por Moyer (2001), professores utilizaram manipuláveis para entreter os alunos nas suas aulas e não para ensinar conceitos matemáticos. Neste estudo, dez professores receberam um kit contendo dez manipuláveis para serem aplicados em suas aulas durante um ano. Foi observado que os professores usavam pouco estes materiais, e quando fizeram uso destes, foi apenas para tornar a aula mais divertida, uma vez que durante o ensino de habilidades específicas ou de conteúdos matemáticos foram utilizados outros métodos.

Este estudo corrobora o reconhecimento de que o modo como os professores utilizam os materiais na aula de matemática não é determinado pelo manipulável em si, mas pelo contexto em que este é inserido, pelo modo que se deu a opção pelo seu uso e ainda, pelo modo como se realizou a socialização do material com profissional.

Mas o que podemos relatar sobre o envolvimento dos alunos? Como pode variar este envolvimento quando o professor utiliza manipuláveis no ensino de matemática? Para responder estas questões propomos, neste estudo, **compreender a participação**[12] **dos alunos na aula de Matemática ao utilizar os materiais manipuláveis**. Como suporte para esta discussão foram analisadas as participações discentes em uma aula em que estes materiais estavam presentes. Nas seções que seguem, apresentamos os conceitos teóricos que embasaram esta pesquisa, seu contexto e a metodologia utilizada, assim como, alguns trechos dessa aula.

2.3 PARTICIPAÇÃO E PRÁTICA SOCIAL

O termo participação descreve a experiência social de viver no mundo em termos de um grupo de pessoas que compartilham uma mesma prática (WENGER, 1998). É um complexo processo que combina fazer, falar, pensar, sentir e pertencer, que nos envolve enquanto pessoas, incluindo nossos corpos, mentes e relações sociais (WENGER, 1998). Desta perspectiva, os alunos podem deixar de ser vistos como alunos singulares e podem passar a ser entendidos como participantes na prática que desenvolve na sala de aula, de modo que se encontram envolvidos em uma tarefa, com menor ou maior grau de engajamento (FERNANDES, 2008).

É preciso destacar, neste sentido, que a participação é mais ampla que mero engajamento em uma atividade, já que esta caracteriza-se quando há um reconhecimento mútuo, ou a possibilidade de que o reconhecimento ocorra (WENGER, 1998). Ou seja, "podemos estar engajados na leitura de um livro, ou num trabalho no computador, sem que sejamos um participante porque essas situações não envolvem reconhecimento humano mútuo" (FRADE, p. 74, 2003). Em uma sala de aula, por exemplo, um aluno que está fazendo um exercício referente à outra matéria ou lendo uma revistinha, enquanto o professor e os outros alunos realizam uma tarefa de matemática, possivelmente, não será reconhecido como participante da tarefa ou prática que o professor está demandando.

Participação refere-se assim, não apenas a eventos locais de engajamento em certas atividades, mas a um processo mais abrangente de ser um participante ativo nas práticas sociais (WENGER, 1998). Isto não implica que esta relação seja sempre harmoniosa, a

[12] Este termo será esclarecido na seção que segue.

participação pode envolver todos os tipos de relações, harmoniosas ou conflituosas, competitiva ou cooperativa (WENGER, 1998).

Focar na participação, então, sugere um explícito foco nas pessoas, mas nas pessoas-no-mundo, como participantes de práticas sociais (LAVE; WENGER, 1991). Prática social, neste sentido, é um fazer inserido num contexto histórico e social (WENGER,1998). O uso de Wenger (1998) do conceito de prática não traz consigo a tradicional dicotomia que divide ação e conhecimento, manual e mental, esta envolve sempre a pessoa por completo, mas não necessariamente um grupo de pessoas:

> Ler um livro é uma prática social mesmo que feito a sós, no sentido de que estamos a interagir com ideias de outros, codificadas (socialmente) através da escrita nesse meio de comunicação, mediador numa relação entre o autor e o leitor. (...) mas há a questão central dos significados, do dar sentido àquilo que se lê. É principalmente aqui que parece reconhecer-se a prática social dado que os significados são partilhados (construídos, legitimados) por um dado grupo social (MATOS, p. 5, 1999).

Nesta perspectiva, utilizar materiais manipuláveis na sala de aula é também uma prática social, em que os sujeitos, professores e alunos, interagem uns com os outros, engajados em atividades em que os significados podem ser compartilhados. Na aula apresentada a seguir, por exemplo, a professora aponta para uma folha de papel e refere-se a ela como uma “figura geométrica”. Os alunos compartilharam desse significado, legitimando a indicação feita pela professora de que àquela folha de papel era uma “figura geométrica”. A professora então, conduz a tarefa e encaminha os alunos ao reconhecimento de um quadrilátero na folha de papel, eles percebem que este é o engajamento esperado pela professora naquela prática.

Os artefatos, como manipuláveis, são usados não somente porque eles são reconhecíveis nas suas relações de engajamento na história, no contexto em que foram construídos, mas também porque eles podem ser reengajados em novas situações (WENGER, 1998). No caso da sala de aula de matemática, folhas de papel, palitos de picolé, tabelas de números e formas podem ser reapropriados e modificados, podendo representar objetos matemáticos para servir aos propósitos de ensinar e aprender matemática, como veremos nos dados a seguir.

Os objetos matemáticos são de natureza abstrata, no sentido de não existirem fisicamente no mundo. Eles podem ser considerados como símbolos culturais que emergem de um conjunto de aplicações relacionadas a atividades de resolução de problemas (GODINO; BATANERO, 1994). O número e=2,718..., o conjunto dos primos, o triângulo, a matriz (0 1) são exemplos desses objetos. Porém, estes também estão intuitivamente presentes nas imaginações visuais e cinestésicas dos seres humanos. Como relata Davis e Hersh (1995), podemos sentir que estamos caminhando em linha reta ou ver algo se comportando dessa maneira, da mesma forma, os alunos citados, identificam a figura geométrica no manipulável apresentado pela professora.

2.4 O CONTEXTO DA PESQUISA

Esta pesquisa teve como contexto de coleta de dados uma sala de aula do 9º (nono) ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública da cidade de Salvador, na Bahia. Nesta, estavam matriculados trinta e cinco alunos, os quais frequentavam com regularidade as aulas.

Nilda[13], a professora desta turma, foi convidada a participar da pesquisa durante um curso de formação continuada para professores, ministrado pela primeira autora deste artigo durante o período pré-determinado para iniciar as ações relativas à coleta de dados desta pesquisa. Neste curso, a autora informou aos professores sobre a pesquisa e solicitou a colaboração deles referente à coleta dos dados nas salas em que eles lecionavam. A professora Nilda, então, mostrou-se bastante disposta a colaborar e passou seus contatos imediatamente para a pesquisadora. Além disso, ela ensinava no Ensino Fundamental II, na rede pública da cidade de Salvador, requisitos estabelecidos previamente pelos autores desta pesquisa para a escolha do educador ou educadora participante.

A escolha da turma foi indicação da professora pautada na disponibilidade e desejo de cooperar dos alunos envolvidos. Esta foi observada durante as aulas de matemática em um período de quarenta e um dias, que abrangeu dezoito aulas. Durante toda a coleta, os alunos apresentavam questões frequentemente e sempre respondiam às indagações da professora, que também se mostrava bastante interessada em discutir os questionamentos deles e estimular os alunos nas atividades.

A tarefa, apresentada a seguir, durou aproximadamente cem minutos, sendo observado um grupo de seis alunos escolhido no momento da coleta, por indicação da professora.

[13] O nome da professora e os nomes citados nas transcrições das falas são pseudônimos.

Adotamos como critério de escolha do grupo a indicação da professora, por perceber que qualquer um dos grupos na sala poderia ser o grupo observado. A professora justificou a escolha dos alunos por apresentarem diferentes desempenhos escolares no que se refere à matemática, além de serem bastante falantes, o que ela julgava apropriado para uma pesquisa, o que foi considerado coerente pelos autores.

Os alunos que participaram do grupo observado foram Lucas, Leo, Paulo, Carla, João e Fernando. Lucas e Leo apresentavam bom desempenho escolar em matemática, enquanto Paulo e Carla apresentavam desempenho escolar regular. Já João e Fernando apresentavam um baixo desempenho escolar em matemática. Eles mostraram-se atentos à atividades e descontraídos no momento da coleta de dados.

A seguir, apresentamos a metodologia de coleta e análise de dados adotada nesta pesquisa.

2.5 O MÉTODO DA PESQUISA

Os dados desse estudo foram coletados no cenário da sala de aula, na tentativa de dar sentido e/ou interpretar os fenômenos focalizados nesta pesquisa em termos dos significados que as pessoas trazem para eles. Desse modo, o estudo classifica-se como sendo de natureza qualitativa (DENZIN; LINCOLN, 2005). Segundo Denzin e Licoln (2005), a pesquisa qualitativa é uma atividade situada que localiza o observador no mundo. Para isso, o pesquisador utiliza-se de técnicas de coleta e de análise de dados. Por sua vez, a escolha de cada procedimento de coleta de dados depende da questão a ser respondida e do contexto a ser estudado.

Referente à coleta de dados, o procedimento utilizado foi a observação, que, segundo Adler e Adler (1994), consiste em coletar impressões do mundo por meio de todas as faculdades humanas importantes. Este procedimento possibilitou identificar e registrar o comportamento dos participantes, investigando de que maneira os alunos participam das aulas em que são utilizados manipuláveis.

Para registrar estas observações, a gravação somente em áudio não se mostrou suficiente, pois registraria as formas de participações dos alunos de forma limitada. As ações também precisavam ser documentadas. Desse modo, a gravação em vídeo foi a mais indicada, já que permite o registro das ações de modo mais amplo (como gestos, por exemplo). Durante as gravações, buscou-se intervir o mínimo possível, não dialogando com os alunos e mantendo uma distância que permitisse filmar o grupo, mas que não incomodasse os mesmos.

As notas de campo também foram utilizadas, servindo para descrever os participantes da pesquisa e o ambiente em geral. Segundo Bogdan e Biklen (1999), as notas de campo são relatos do que o investigador vê e experimenta na coleta de dados. Desse modo, as notas de campo originaram um diário, que foi utilizado pelos autores para situarem-se no que se refere à sequência de aula, observações sobre as atividades, participação dos estudantes na aula, etc.

A análise de dados foi inspirada nos *guias analíticos* da *Grounded Theory*, que consiste em sistemáticas, ainda que flexíveis, orientações para análise de dados qualitativos e para a construção de construtos teóricos fundamentados nos dados (CHARMAZ, 2006). Dessa forma, a análise foi realizada em etapas ou níveis de análise.

O primeiro nível de análise consistiu em selecionar partes importantes nas gravações. Os vídeos foram assistidos diversas vezes e foram transcritos trechos das aulas em que os alunos interagiam com os manipuláveis. O segundo nível correspondeu à codificação dos dados, em que as transcrições foram lidas e cada fala ou ação dos alunos, quando relacionados ao manipulável, ainda que indiretamente, foram reduzidas a códigos através de uma pequena frase (CHARMAZ, 2006). Por exemplo, na fala dos alunos "Um quadrilátero" que se refere a uma folha de papel A4, o código gerado foi "Reconhece um elemento matemático no manipulável".

Para cada código, então, foram feitas algumas considerações. No caso do código acima, a consideração foi "Os alunos, com o apoio da professora, reconheceram um elemento matemático no material utilizado". No terceiro nível de análise, com o auxílio das considerações, os códigos foram comparados e agrupados em categorias mais abrangentes, cada uma possuindo uma propriedade, que articula os códigos entre si e é transversal aos trechos dos dados. Por fim, confrontaram-se os resultados obtidos com a literatura, a fim de gerar compreensões teóricas e/ou confirmar/revisar aquelas já existentes.

2.6 OS ALUNOS E OS MATERIAS MANIPULÁVEIS

A atividade apresentada nesse artigo foi planejada pela professora Nilda, que pesquisou na Internet atividades que utilizavam manipulativos na sala de aula e que introduziam o tópico "Áreas e Superfícies", adaptando-as de acordo com seus interesses e necessidades. Seu objetivo, com esta atividade, foi que os alunos deduzissem as fórmulas utilizadas para o cálculo das áreas do triângulo e do trapézio.

Através dos dados coletados, é possível perceber que os alunos já conheciam as fórmulas para o cálculo das áreas desses polígonos, o que pôde ser confirmado pela professora, que informou que as fórmulas já tinham sido estudadas no oitavo ano do ensino fundamental. Os alunos, entretanto, desconheciam alguma justificativa destas fórmulas.

No início da aula em que foi realizada essa atividade, a professora retomou o conceito de área, deduzindo a fórmula para cálculo da área do retângulo, e entregou aos alunos uma régua, uma tesoura e uma folha de papel A4 amarela.

A seguir, são apresentados, em ordem cronológica, trechos dessa aula. A cada trecho, faremos uma análise inicial, para então fazer uma discussão mais abrangente sobre a maneira como os alunos participam das aulas de matemática em que utilizam os materiais manipuláveis.

Trecho 1: Reconhecendo objetos matemáticos no manipulável

A professora Nilda apresentou, inicialmente, o material entregue aos alunos, como é indicado nas transcrições abaixo:

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
1.1 Nilda	Gente, olha: nós vamos começar inicialmente... Que figura vocês têm na mão aí? Que figura geométrica é essa aí? Em amarelo é o quê?	Indica a folha de papel utilizada.
1.2 Alunos	Um quadrilátero.	
1.3 Nilda	Um quadrilátero! Bia disse que é um quadrilátero... Oh... O papel que tá na mão é um quadrilátero. É parecido com esse que eu fiz? (referindo-se ao "retângulo" que havia desenhado na lousa)	Aponta para a lousa.
1.4 Alunos	É!	

1.5 Nilda	Vocês vão medir aí e vão me dizer qual é a área desse quadrilátero. Vocês estão com a régua na mão, vão medir e dizer qual é a área do quadrilátero.	
1.6 Lucas	Não é exata a folha de papel (referindo-se ao valor da medição)	Mede uma dimensão da folha.

Pelo exposto acima, verifica-se que, na fala 1.1, a professora, após apresentar o material, indicando ser este, uma “figura geométrica”, os alunos indicam-o como um “quadrilátero”, na fala 1.2. Na fala 1.3, a professora legitima o significado atribuído pelos alunos àquela “figura geométrica”.

A atividade segue, referindo-se àquela folha de papel como um “quadrilátero” e, em algumas vezes, como um “retângulo”. O quadrilátero e o retângulo são objetos matemáticos já conhecidos pelos alunos, eles já estudaram estes objetos matemáticos em anos escolares anteriores. Nesta atividade, no entanto, *os alunos reconhecem estes objetos matemáticos no manipulável*.

No decorrer da atividade, Nilda solicitou aos alunos que medissem as dimensões da folha de papel A4, referindo-se a esta como um quadrilátero. Porém, em alguns momentos, como na fala 1.6, os alunos ainda se referem à folha de papel A4, como um papel e não como um quadrilátero, porém com o desenvolvimento da atividade, todos os alunos passam a tratar o papel ou algum recorte do papel como uma forma geométrica.

Trecho 2: Definindo um objeto matemático no manipulável

No trecho 2, os alunos calcularam a área da folha do papel. Eles indicam para a professora o valor calculado e ela quer saber como eles calcularam-no.

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
2.1 Nilda	Vocês calcularam como isso (referindo-se ao cálculo da área do retângulo) aí?	
2.2 Paulo	Pegou e multiplicou.	

2.3 Nilda	Pegou o quê? O que é isso e isso?	Aponta para dois lados da folha com dimensões diferentes .
2.4 Alunos	A área!	
2.5 Nilda	Não! Isso aqui... oh... Que é que vocês acham que mede 21? É esse aqui ou esse aqui?	Aponta para dois lados da folha com dimensões diferentes .
2.6 Paulo	A altura (referindo-se ao menor lado do papel)	Aponta para o papel que estava na posição horizontal.
2.7 Nilda	Esse! Mas se eu colocar assim?	Aponta para um lado de menor medida do papel e vira o papel, colocando-o na vertical.
2.8 Alunos	Ah!	Riem.
2.9 Nilda	Quem é a altura agora?	
2.10 Alunos	O maior!	
2.11 Nilda	Como é que a altura é essa e não é essa?	Aponta para dois lados com dimensões diferentes da folha.
2.12 Lucas	Porque é a parte do horizonte!	Balança a mão no sentido horizontal.
2.13 Nilda	Gente, presta atenção. A gente faz o que? A gente nomeia a altura... a gente viu altura ano passado... E a gente viu que altura é sempre um segmento perpendicular a uma base, não foi isso? Se o papel tá assim, a altura é essa... Se ele tá assim, a altura passa a ser essa...	Aponta para o lado de menor medida do papel e vira o papel, colocando-o na vertical.

Nas falas 2.4 e 2.6, os alunos relacionam novamente o material manipulável a objetos matemáticos. Já nas falas 2.10 e 2.12, os alunos, além de reconhecerem a altura do quadrilátero no manipulável, indicando ser "a altura do retângulo" uma lateral do papel, *definem a altura de uma figura geométrica utilizando o material*. Eles enunciam características especificas desse objeto, como na fala 2.10 e 2.12. Os alunos indicam que a altura do retângulo é “o maior”, o maior lado do papel e, na fala 2.12, um aluno indica ainda, que a altura do retângulo não é um dos lados “porque [o lado] é a parte do horizonte”, ou seja, define a altura do quadrilátero como o lado não horizontal. Dessa forma, o material ilustra esse objeto matemático, além de permitir que, os alunos definam-no utilizando o manipulável.

Trecho 3: Deduzindo a fórmula para o calculo da área do triângulo utilizando manipuláveis

Após finalizar as questões relativas à área do retângulo, a professora inicia a parte da atividade correspondente à dedução da fórmula para o cálculo da área do triângulo.

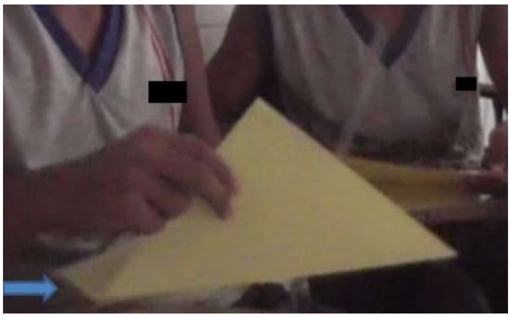
Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
3.1 Nilda	Quantos triângulos eu posso fazer com esse papel?	
3.2 Paulo	Um milhão, professora!	
3.3 Nilda	Um milhão!? Ahh... gostei da resposta de Paulo. Olhem a pergunta que eu fiz: quantos triângulos eu posso fazer com esse papel? Ele disse um milhão. Vai depender do tamanho do triângulo. Agora eu quero que vocês me dêem a menor quantidade de triângulo que caiba nesse papel.	
3.4 Lucas	Dois, se for o papel todo.	

Na fala 3.2, um aluno assume que o papel pode formar um milhão de triângulos. Logo em seguida, após a professora indicar que ela queria a menor quantidade de triângulos formados com aquele papel, outro aluno indica, na fala 3.4: “dois”. Ele reconhece e indica que o “triângulo” pode ser formado com aquele papel.

Após todos os alunos entenderem que a professora queria que eles recortassem o papel para formar dois “triângulos” sem sobrar nenhuma área do papel, a atividade seguiu:

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
3.21 Lucas	Tô cortando a diagonal	Ele dobra a folha, como indicado na foto

	para formar dois triângulos. Não é base vezes altura, dividido por dois?	abaixo, e aponta para a “diagonal”: 
3.22 Nilda	Porque você tá dizendo isso?	
3.23 Lucas	Por causa que você pega o retângulo e divide em dois triângulos. A do retângulo é base vezes altura (se referindo a fórmula para o cálculo da área do retângulo)... e divide por dois.	Ele aponta para a folha de papel dobrada.
3.24 Nilda	Eu pedi para vocês a menor quantidade de triângulo que cabe no papel sem sobrar papel, foi isso que eu pedi... Olhe para o papel Fernando, e veja o que você pode fazer. Que forma eu posso dobrar esse papel ai?... Paulo fez assim. Alguém fez diferente?	
3.25 Fernando		Dobra o papel como indicado na foto

		
3.26 Lucas	Dessa ponta para cá.	Fala com Fernando sobre como ele deve dobrar.

Na fala 3.21, o aluno indica a “diagonal” no manipulável e acredita poder cortá-la. Foi estabelecido naquela prática que a folha de papel representa um retângulo. Dessa forma, o aluno indicou um corte de uma extremidade à outra não consecutiva como uma diagonal. Podemos perceber, desse modo, que o aluno, a partir do significado dado ao manipulável, reconhece no contexto da atividade, outro objeto matemático no manipulativo: a diagonal.

Ainda nesta fala, o aluno apresenta a fórmula para o cálculo da área do triângulo. A professora, na fala 3.22, questiona o aluno o porquê daquela afirmação. Ela sabia que o aluno já conhecia esta fórmula e queria ter certeza de que ele, nesta prática, deduziu-a a partir da atividade. O aluno explica, na fala 3.23, como *deduziu a fórmula, indicando que foi realizado a partir das observações feitas com o manipulável.* Ou seja, o material ofereceu subsídios para que o aluno justificasse a fórmula.

Mesmo depois de Lucas ter deduzido a fórmula da área, a professora continua a atividade para que os outros alunos também chegassem a essa conclusão e, percebendo que Fernando ainda não havia recortado o papel, ela tenta ajudá-lo. Fernando dobra o papel, mas não como indicado pela professora, pois, em sua ação, obtém dois triângulos com sobra de papel, como indicado na foto da ação 3.25.

Lucas, na fala 3.26, também tenta ajudar Fernando, indicando o ponto de dobradura, mas não se refere ao componente do papel, como diagonal, como já havia feito, mas apenas falando “dessa ponta para cá”, o que pode se justificar no fato de Lucas ter percebido que Fernando ainda não tinha reconhecido o conceito de diagonal no manipulável.

No decorrer da atividade, outros alunos também apresentaram suas conclusões em relação à dedução da fórmula para o cálculo da área do triângulo, deixando claro em diversas de suas falas que os manipuláveis os ajudaram a ilustrá-la, como no exemplo abaixo:

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
3.64 Paulo	Se o total deu aquele valor (referindo-se ao valor calculado da área do retângulo) e eu dividi por dois, a metade... Então é só dividir por dois.	Mostra os dois recortes que representavam os triângulos para a turma.
3.65 Nilda	Dividiu por dois por quê?	
3.66 Paulo	Porque são dois triângulos e os dois triângulos formam um retângulo.	
3.67 Nilda	Ah, entenderam? Ele dividiu aquela área por dois, por que ele percebeu que os dois triângulos formam o retângulo.	

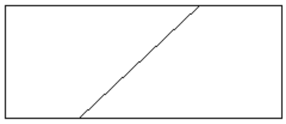
Após a maioria dos alunos chegarem à conclusão referente a esta fórmula e a professora finalizar esta parte da atividade, o mesmo aluno da fala 3.66 apresenta uma dúvida em relação à conclusão:

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
3.133 Paulo	Mas eu posso dividir em quatro triângulos também!	

O aluno, nesta fala, aponta uma limitação em relação à dedução realizada, percebendo que existem algumas informações incompletas ou incoerentes. A professora, porém, naquele momento, estava reclamando com duas alunas que conversavam de outros assuntos, não referentes à matemática, e não ouviu a dúvida do aluno, não a esclarecendo.

Mesmo após o seu questionamento da fala 3.133, o aluno finaliza essa parte da atividade, assim como os outros, reconhecendo que a fórmula para o calculo da área de um triângulo é a medida da base vezes a medida da altura divido por dois. A professora então finaliza esta etapa e inicia a parte da atividade voltada para a dedução da fórmula para o cálculo da área do trapézio. Ela pede para que os alunos construam um trapézio a partir das outras duas figuras conhecidas (o triângulo e o retângulo).

Trecho 4: Deduzindo a fórmula para o calculo da área do trapézio utilizando manipuláveis

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
4.28 Leo	Ah rapaz! Aqui oh... Esse vai dar esse (junta dois trapézios congruentes para formar um retângulo), porque esse é igual a esse (aponta para a base maior dos dois trapézios). Aí soma esse (aponta para a base do retângulo).	Recorta duas representações de trapézios retângulos congruentes e coloca-os um recorte ao lado do outro formando a representação de um retângulo, como na figura abaixo:  Indica os elementos no papel, como na foto abaixo, e depois sobrepõe os dois recortes: 
4.29 Lucas	E esse é igual a esse... *Agora faz sentido!* Porque como multiplica pela altura vai dar esse todo (se referindo à área do retângulo) e aí divide por dois... Professora (Gritando)!	Aponta para os dois recortes que representam os trapézios.
4.30 Nilda	Eu quero que vocês façam um desse.	Mostra o recorte que representa um trapézio.
4.31 Lucas	Aqui ó.	
4.32 Nilda	Mas vocês não usaram o triângulo!	Olha o recorte que representa o retângulo formado pelos dois o recorte que representa o trapézios e sai para

		ver outro grupo.
4.33 Lucas	Volta professora!	
4.34 Leo	Aqui ó (Fala para a professora). Você juntando essa base com essa base, vai dar isso, essa linha (aponta para a base do retângulo)... Multiplica pela altura vai dar esse retângulo (referindo-se à área do retângulo), aí dividindo por dois dá o trapézio (referindo-se à área do trapézio).	O aluno coloca os dois recortes que representam os dois trapézios retângulos um ao lado do outro formando um retângulo. Indica os elementos: base, altura, retângulo, e sobrepõe os dois recortes que representam os trapézios para mostrar que são congruentes.
4.35 Nilda	Ah, agora entendi!	

Os alunos deduzem a fórmula para o cálculo da área do trapézio, observando o que foi realizado com o manipulável, conforme as falas 4.28, 4.29, 4.34. Eles mostravam-se satisfeitos em saber ilustrar a fórmula. Na fala 4.29, o aluno ainda exclama “agora faz sentido!”, possibilitando-nos inferir que, mesmo sabendo a fórmula, a manipulação dos recortes e, neste caso, a ilustração da fórmula, permitiram ao aluno alguns esclarecimentos referentes àquela.

Em diversos momentos, os alunos recortaram o manipulável, sobrepondo os recortes, e arrumando-os lado a lado com outros, a fim de visualizar e deduzir algoritmos matemáticos.

2.6 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Através da análise de uma aula de matemática, este artigo buscou gerar um entendimento sobre as formas de participação dos alunos na aula ao utilizar materiais manipuláveis. Como em Matos (1999), nesta aula, os alunos são encorajados a avançar nas atividades matemáticas por meio de tentativas e erros, o que pode fornecer elementos de engajamento nas práticas desta sala de aula. Dentro desse contexto, ao utilizar os materiais manipuláveis, seja reconhecendo objetos matemáticos nestes ou deduzindo as fórmulas de cálculo de área utilizando os manipuláveis, os alunos estão participando desta prática, como definido por Wenger (1998). Eles estão envolvidos na tarefa, com menor ou maior grau de engajamento e isto é reconhecido pelos alunos e pela professora, como pode ser percebido em qualquer um dos trechos apresentados anteriormente.

Além disso, notamos que a natureza da participação dos alunos, quanto à utilização dos materiais manipuláveis, pode variar, pelo menos, em três casos: a) os alunos reconhecem objetos matemáticos no manipulável; b) os alunos definem objetos matemáticos utilizando o material e c) os alunos deduzem algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis.

Nos trechos apresentados, os alunos indicam reconhecer objetos matemáticos no manipulável utilizado, como nas falas 1.2, 1.4, 2.4, 2.6, 2.10, 3.21, 3.66, 4.29, 4.34, eles identificam a folha como um quadrilátero, assim como, um retângulo e uma parte dessa como um triângulo, ou a altura e a diagonal como elementos do manipulável. É importante destacar, no entanto, que esta forma de participar com o material, ou seja, este significado atribuído pelos alunos ao material não é intrínseco a ele, já que os padrões de interação social estabelecidos em cada situação são apresentados de forma singular (WATSON, WINBOURNE, 2008). Em outras salas de aulas ou em outras aulas desta mesma sala, uma folha de papel pode não ser reconhecida como um quadrilátero ou quaisquer outros objetos matemáticos.

Por vezes, o artefato pode aparecer como um objeto que “contem ele mesmo”, ou seja, que por si só, ele significa algo. Dessa forma, facilmente é omitido que é na prática que os significados são atribuídos aos artefatos (WENGER, 1998). Nesta aula, por exemplo, o que permite aos alunos atribuir estes significados à folha de papel é a relação que esta tem com alguns objetos matemáticos: quando se sabe que um quadrilátero é um “polígono de quatro lados” e tem-se contato com uma folha de papel, pode-se reconhecer essa folha de papel como um quadrilátero. Além disso, o contexto desta sala de aula possibilita este reconhecimento, já que a professora e os alunos legitimam essa participação, existe um reconhecimento mútuo em relação a este tipo de engajamento.

Assim, os manipuláveis podem ter um papel importante na aprendizagem matemática já que oferecem uma representação física que pode ser usada para ajudar os alunos a visualizar objetos matemáticos. (LAMBERTY; KOLODNER, 2002). Ainda mais que, a partir desta identificação, os alunos, podem definir objetos matemáticos com o auxílio do manipulável, como nas falas 2.10 e 2.12 e deduzir algoritmos matemáticos com o apoio da utilização/manuseio dos manipuláveis, como demonstra as falas 3.66, 4.28 e 4.34. Eles dobram o manipulável, o recortam, sobrepõem os recortes, arrumam estes uns ao lado do outro, de forma que visualizam elementos matemáticos, o que permite comparar e ilustrar esses elementos, sustentando e legitimando suas deduções.

Concluímos, portanto, que os alunos podem participar da sala de aula de matemática reconhecendo, definindo e deduzindo objetos matemáticos nos manipuláveis ou com o auxilio destes. Para isso, entretanto, o contexto em que os alunos estão inseridos deve ser favorável a estes padrões de participação, permitindo e incentivando os alunos este tipo engajamento na aula de matemática. O engajamento com o manipulável pode ser extremamente variado, dependendo do uso realizado pelo participante, seja na sala de aula ou não.

Agradecimentos

Agradecemos à professora e aos alunos participantes da pesquisa, por terem cedido suas imagens e falas para análise. Além disso, agradecemos à professora Dra. Cristina Frade, ao professor Dr. José Luis de Paula Barros Silva e à professora Dra. Andreia Maria Pereira de Oliveira, pelos comentários a versões prévias deste artigo. Por fim, agradecemos a Capes, pelo incentivo financeiro.

2.6 REFERÊNCIAS

ADLER, P. A.; ADLER, P. Observational techniques. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y.S. (ED) **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, p. 377-392, 1994.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Td. ALVAREZ, M. J; SANTOS, S. B.; BAPTISTA, T. M. Portugal, Porto Codex: Porto Editora, 1999.

CHARMAZ, K. **Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis**. London: Sage, 2006.

CLEMENTS, D. H. 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, n. 1, p 1-16, 1999.

DAVIS, P.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995

DENZIN, N.K; LINCOLN. Introduction. In: DENZIN, N.K; LINCOLN. Y.S. (ED) **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage; p. 1-29, 2005.

FERNANDES, E. Rethinking Success and Failure in Mathematics Learning: The Role of Participation. In: Matos, J.F; Veloso, P.; Yasukawa, K. (Eds) **Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2008.

FRADE, C. **Componentes Tácitos e Explícitos do Conhecimento Matemático de Áreas e Medidas**. 2003. 251 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

GELLERT, U. Didatic material confronted with the concept of mathematical literacy. **Educational Studies in Mathematics**, v.55, p. 163-179, 2004.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

HERBEL-EISENMANN, B.; WAGNER, D. In the middle of nowhere: how a textbook can position the mathematics learner. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 29. 2005. Disponível em <http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3HerbelEisenmannEtAl.pdf>. Acesso em 12 de julho de 2009.

KAMII, C.; LEWIS, B.A.; KIRKLAND, L. Manipulatives: When are they useful? **Journal of Mathematics Behavior**, v. 20, p. 21-31, 2001.

LAMBERTY, K.K.; KOLODNER, J. L. Exploring Digital Quilt Design Using Manipulatives as a Math Learning Tool. In: P. Bell, R.; Stevens, T.; Satwicz (Ed), **Keeping Learning Complex: The proceedings of the Fifth International Conference of the Learning Sciences (ICLS)**. Mahwah: Erlbaum, p. 552-553, 2002.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 3- 38, 2006.

MATOS, J. F. Aprendizagem e Prática Social: Contributos para a Construção de Ferramentas de Análise da Aprendizagem Matemática Escolar. Actas da II Escola de Verão. **Sessão de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação**. Santarém, 1999.

MATOS, J.M.; SERRAZINA, M,L. **Didáctica da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

PAIS, L.C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria, 2001. Disponível em < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em 23 de setembro de 2009.

SANTANA, E. Manipulative material and representational material. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 32. 2005, México, **Anais…** v. 4, p. 225-232, 2008. 1 CD-ROM.

WATSON, A.; WINBOURNE, P. Introduction. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (ORG) **New directions for situated cognition in mathematics education**. Melbourne: Mathematics Education Library, p. 1-12. 2008.

WENGER, E. **Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

ARTIGO II

O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NA AULA DE MATEMÁTICA E A ARGUMENTAÇÃO DOS ALUNOS

Jamille Vilas Boas de Souza
millevilasboas@gmail.com
Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).
Jonei Cerqueira Barbosa (Orientador)
joneicerqueira@gmail.com.br
Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA e UEFS.

RESUMO: Neste artigo, buscamos compreender o uso de materiais manipuláveis e a participação dos alunos em uma aula de matemática no contexto do ensino superior. Trechos de uma aula da disciplina Geometria Analítica, em que alunos da graduação de Engenharia Civil usam materiais manipuláveis, são expostos e analisados através de uma abordagem qualitativa. A análise sugere que os alunos, além de utilizar expressões e equações algébricas para subsidiar suas afirmações, podem justificar suas deduções a partir das manipulações realizadas com estes materiais.
Palavras-chave: Materiais manipuláveis. Participação. Argumentação Algébrica. Argumentação Empírica Matemática. Ensino superior.

ABSTRACT: This article tries to understand the use of manipulative materials and student`s participation in a math class in the context of higher education. Episodes from a class of the course of Analytical Geometry in which undergraduate students of Civil Engineering using manipulative materials are presented and analyzed through a qualitative approach. The analysis suggests that students, besides using algebraic expressions and equations to support their claims, can justify its deductions from the manipulations of these materials.

Keywords: Manipulative materials. Participation. Algebraic Arguments. Mathematical Empirical Arguments. Higher education.

3.1 INTRODUÇÃO

Estudar o uso de materiais manipuláveis[14] no ensino e aprendizagem da matemática não é uma ideia recente. A utilização desses materiais na sala de aula de matemática já foi por diversas vezes analisada (KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001; LORENZATO, 2006; MOYER, 2001, SANTANA, 2008). Ainda assim, não têm sido aparentes na literatura investigações sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino de disciplinas de matemática em cursos de graduação que não são de matemática, isto é, a matemática como curso de serviço. A expressão "matemática como curso de serviço" tem sido utilizada na área da Educação Matemática para referir-se ao ensino de matemática em cursos de graduação para não-matemáticos (HOWSON ET AL., Apud CATAPANI, 2001). Nesse sentido, esta pesquisa traz considerações acerca deste tema, procurando analisar os padrões de participação dos alunos com os manipuláveis em uma aula do ensino superior.

Na seção que segue, serão apresentadas e discutidas algumas pesquisas que focam nos manipuláveis[15] e também no ensino superior. Em seguida, apresentamos alguns aspectos teóricos pertinentes à pesquisa, o contexto e o método utilizados, além de fazer a apresentação e análise dos dados. Assim, pretendemos elaborar teoricamente sobre o uso de materiais manipuláveis e a participação dos alunos na sala de aula de matemática.

3.2 MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO SUPERIOR

Materiais manipuláveis são conceituados de algumas maneiras na literatura (CLEMENTS, 1999; LORENZATO, 2006; MOYER 2001). Clements (1999), por exemplo, considera que materiais manipuláveis não precisam ser palpáveis, indicando

[14] Este termo será esclarecido na seção que segue.
[15] Para evitar repetições, será utilizado, por vezes, o termo materiais, manipulativos ou, ainda, manipuláveis referindo-se a materiais manipuláveis.

softwares como um tipo de manipulável. Definiremos, porém, que manipuláveis devem ter o caráter físico, usando aqui um entendimento diferente de Clements (1999). Nesse caso, conceituamos materiais manipuláveis tal qual definido por Reys (1971, apud MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 75): “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”.

São diversas as pesquisas que abordam o uso desses materiais no ensino de matemática, indicando os manipuláveis como um importante componente na prática pedagógica (CLEMENTS, 1999; FIORENTINI; MIORIM, 1990; KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001; PAIS, 2001; LORENZATO, 2006; MATOS; SERRAZINA, 1996; SANTANA, 2008). No âmbito do ensino superior, encontramos pesquisas que analisam os laboratórios de ensino de matemática (LEM)[16] e como os materiais manipuláveis são e/ou podem ser utilizados no curso de Licenciatura em Matemática (BERTONI; GASPAR, 2006; KALEFF, 2006; TURRIONI; PEREZ, 2006; PASSOS, 2006; REGO; REGO, 2006).

Bertoni e Gaspar (2006) discutem, especificamente, a utilização do LEM na Universidade de Brasília (UnB) desde a década de 1980. Neste período, os alunos da Licenciatura em Matemática da UnB utilizavam-no como apoio para leituras e preparo de materiais relacionados às disciplinas conectadas as práticas docentes. As autoras relatam que o principal objetivo do LEM, neste caso, é obter uma visão crítica das potencialidades e limitações do manipulável. As manipulações guiaram também, as percepções e inferências dos graduandos em matemática no estudo, por exemplo, de grupos de simetria, sendo utilizadas algumas vezes, em disciplinas que focalizam conteúdos específicos.

No que se refere ao Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense, de acordo com Kaleff (2006), o uso dos manipuláveis e atividades didáticas desenvolvidas nesse ambiente tem como objetivo levar o aluno a visualizar as formas geométricas e analisar suas características. Assim, busca-se “incentivar o desenvolvimento de habilidades introdutórias à aprendizagem de conceitos geométricos, tanto euclidianos, como não-euclidianos” (KALEFF, 2006, p. 117), complementando a formação inicial dos licenciandos em matemática.

Em ambos os trabalhos (KALEFF, 2006; BERTONI; GASPAR, 2006), há

[16] Segundo Lorenzato (2006), o LEM é um local na instituição de ensino reservado não somente para aulas regulares, mas também para atividades de planejamento e local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais.

convergência quanto à necessidade de LEM na formação inicial e continuada dos professores de matemática. Argumenta-se que a vivência com os materiais manipuláveis ainda na graduação possibilita a experimentação de desafios relacionados ao ensino de matemática com esses materiais, os quais podem ser superados ainda nesta fase, além da socialização dos alunos com os materiais.

Passos (2006) e Turrioni e Perez (2006), além disso, sustentam que o LEM deve constituir um ambiente para discussão e reflexão sobre materiais didáticos ali presentes. Estes, por sua vez, podem contribuir tanto para o desenvolvimento profissional do futuro professor como para sua iniciação em atividades de pesquisa em Educação Matemática.

Porém, como se pode observar, esses trabalhos focam os LEM e a licenciatura em matemática, não sendo aparentes na literatura investigações que se debrucem sobre o uso de materiais manipuláveis e a matemática como curso de serviço. Não foram encontrados trabalhos que envolvam manipuláveis e possuam como contexto salas de aula de disciplinas de matemática em cursos para não-matemáticos. Assim, esta pesquisa chama a atenção para esse tema, buscando analisar as ações dos alunos na aula de matemática em que são usados materiais manipuláveis. Para isso, foi escolhida como contexto uma sala de aula da disciplina Geometria Analítica, ministrada a alunos da graduação de Engenharia Civil.

Na seção que segue, esclareceremos os aspectos teóricos que permeiam esta pesquisa.

3.3 REFERENCIAL TEÓRICO

Quando uma pessoa lê um documento ou refere-se a um manipulável como um parabolóide hiperbólico, o que ocorre envolve não meramente a relação entre a pessoa e o artefato, mas também a relação entre as práticas nas quais o artefato foi escrito ou projetado e onde está sendo utilizado (WENGER, 1998). Tomemos aqui o termo “prática” referindo-o a um fazer em um contexto histórico e social, que dá estrutura e significado ao que se faz, o qual denota as formas de ação que sustentam o mútuo engajamento das pessoas (WENGER,1998).

Em Santos e Matos (2008), a relação entre artefatos e a prática em que ele está sendo utilizado é colocada em relevo. Nesse trabalho são analisadas as práticas de vendedores de jornais nas ruas ao utilizar dois manipulativos: a calculadora e um quadro de registros. Para os autores, os vendedores que usavam os manipuláveis exerciam um certo poder, denominado de poder social, isto é, uma habilidade de transformar a prática. Eles concluíram que o poder social atribuído às pessoas que utilizavam esses manipuláveis nas práticas matemáticas revela-se somente em associação com os significados sociais, podendo, em outras práticas, uma calculadora ou um quadro de registro não constituírem este meio.

Como delineiam esses autores e Wenger (1998), acreditamos que as interações no ambiente escolar também não provêm de nenhum material em si, mas da maneira como as pessoas os utilizam. Uma régua ou uma superfície modelada para representar algo, em um contexto, pode facilitar a aprendizagem matemática de alunos, o que pode não ocorrer em outro contexto. Em grande medida, depende dos padrões de participação entre alunos e alunos, entre estes e o professor e entre alunos, professor e o material.

Ao referir-se a participações, no entanto, não referimo-nos, apenas, a engajar-se em uma tarefa, mas a um processo de tornar-se parte de uma determinada comunidade. Participações referem-se não apenas a eventos locais de engajamento em certas atividades com certas pessoas, mas a processos de ser ativo nas práticas sociais (WENGER, 1998). Em uma tarefa de matemática, em que os alunos estejam organizados em grupos, se um dos alunos está lendo uma revistinha, ou fazendo algo completamente diferente do que foi pedido pelo professor, podemos afirmar que este aluno não é um participante daquela prática, ele não será reconhecido como parte daquela prática.

Em seu livro, Wenger (1998, p.55) utiliza o termo participação para descrever "a experiência social de viver no mundo em termos de adesão em comunidades sociais e envolvimento em atividades de empreendimento social[17]". Participação envolve, então, fazer, falar, pensar, sentir e pertencer, envolve todos os tipos de relações conflituosas ou harmoniosas, competitivas ou cooperativas dentro de uma comunidade.

Deste ponto de vista, a unidade de análise fundamental desta pesquisa remete-se às participações dos indivíduos nas práticas sociais (WENGER, 1998), as quais, neste caso, envolvem uso de manipulativos, buscando **compreender a participação dos alunos na aula de matemática no contexto do Ensino Superior**. Para tal, foram coletados, registrados e analisados dados empíricos, os quais serão detalhados nas seções que seguem.

---

[17] Tradução nossa.

3.4 CONTEXTO DA PESQUISA

A coleta de dados deste estudo foi realizada em uma universidade pública no estado da Bahia, na disciplina de Geometria Analítica (GA), ministrada pela professora Flávia[18].

A professora foi escolhida como participante da pesquisa, pois lecionava em uma universidade com *campus* em Salvador, na qual os professores utilizam com frequência manipuláveis nas aulas da disciplina de GA, além de ser a primeira professora que, solicitada a colaborar, mostrou-se disposta. Ela também já possuía prática na utilização de materiais manipuláveis como recursos para o ensino de superfícies de revolução e superfícies quádricas, conteúdos presentes na ementa da disciplina.

Após aceitar o convite para participar da pesquisa, a professora, então, informou os horários de suas turmas de GA e uma destas foi escolhida considerando-se a compatibilidade de horário da turma e da primeira autora deste artigo, que realizou a coleta de dados. A disciplina, observada durante dez aulas, estava sendo oferecida a alunos do curso de Engenharia Civil, no segundo semestre da graduação. A turma era composta por cinquenta alunos, os quais frequentavam regularmente as aulas. Durante o período de coleta, os alunos mostraram-se atenciosos nas aulas, expondo muitas dúvidas e tecendo comentários.

Durante a aula em que os alunos, em grupos, utilizaram manipuláveis, foram observados cinco alunos, escolhidos por indicação da professora no momento em que se iniciou a atividade. A primeira autora optou, como critério de escolha do grupo, pela indicação da professora, por perceber que qualquer um dos grupos formados naquela sala poderia ser o grupo observado. Segundo a docente, ela indicou o grupo de Alex, Jorge, Leo, Lia e Miguel por estar mais próximo da pesquisadora no momento de formação dos grupos.

Jorge, Leo e Lia eram alunos que sentavam sempre nas primeiras filas de carteira, próximos da professora e mostravam-se bastante engajados na aula. Já Alex e Miguel empenhavam-se com menos frequência e dificilmente sentavam próximos da

---

[18] O nome da professora e os nomes dos estudantes citados nas transcrições das falas são pseudônimos.

professora. Jorge, Leo, Lia e Alex se engajaram na tarefa proposta pela professora, já Miguel não cooperou muito com os colegas para resolvê-la, como veremos a seguir, logo após a exposição da metodologia utilizada.

3.5 O MÉTODO

Nesta pesquisa, investigamos como ocorre a participação dos alunos na aula de Matemática ao utilizar os materiais manipuláveis, de modo que, o estudo é de natureza qualitativa (DENZIN; LINCOLN, 2005). O método qualitativo caracteriza-se pelas palavras como dados (MILES; HUBERMAN, 1994) que não são experimentalmente examinados ou mensurados em termos de quantidade, valor, intensidade ou frequência. O pesquisador preocupa-se com a natureza da construção social da realidade, buscando dar sentido ou interpretando os significados que as pessoas dão as coisas (DENZIN; LINCOLN, 2005). Para tanto, nesta pesquisa, a sala de aula onde tarefas com manipuláveis foram desenvolvidas foi fonte dos dados na tentativa de interpretar este fenômeno.

Para isso, foi utilizada, como procedimento de coleta de dados, a observação. De acordo com Adler e Adler (1994), a observação é uma técnica integrada e independente, que consiste em coletar impressões do mundo ao redor, neste caso, a sala de aula em que foram utilizados materiais manipuláveis. Como tal, apresenta uma vantagem para o observador: permite fazer conexões, correlações e causas na forma em que se mostram. Durante as observações, a primeira autora deste artigo registrou em vídeo as participações dos alunos quando estes utilizavam os manipuláveis. A necessidade deste tipo de gravação foi evidenciada devido ao objetivo deste trabalho, ou seja, somente a gravação em vídeo permitiria a gravação das ações dos indivíduos, as quais são elementos indispensáveis na análise de suas participações. Assim, os alunos foram filmados manuseando estes materiais e, nesse momento, buscou-se compreender suas participações e interferir o mínimo possível nas suas práticas.

As notas de campo foram também utilizadas, as quais serviram para registrar observações e fazer descrições acerca dos ambientes físicos em que foram coletados os dados bem como da participação dos alunos nas atividades com os manipuláveis e comentários gerais sobre a aula. Segundo Bogdan e Biklen (1999), as notas de campos são relatos escritos do que o investigador ouve, vê e experiencia no momento da coleta de dados, podendo originar em um diário pessoal que ajuda o investigador acompanhar o desenvolvimento do projeto, visualizar como o plano de investigação foi afetado pelos dados recolhidos, e a tornar-se consciente de como foram influenciados pelos dados.

Mas, como podemos produzir sentido a partir desses dados? Segundo Milles e Huberman (1994), a análise dos dados coletados tem como objetivo atribuir-lhes sentido, apresentando resultados e levando conclusões para o estudo. Porém, a análise qualitativa não possui procedimentos fixos, podendo se tornar um empecilho nesta produção. Para superar este obstáculo, o pesquisador pode produzir sua análise de forma fundamentada, com bastante atenção e criatividade. Assim, com o objetivo de superá-lo, a análise de dados desta pesquisa é inspirada em procedimentos analíticos da *Grounded Theory*.

Essencialmente, o método da *Grounded Theory* é um conjunto flexível de orientações analíticas que permite aos pesquisadores focalizar sua coleção de dados através de sucessivos níveis de análise e desenvolvimento conceitual (CHARMAZ, 2006).

A primeira etapa da análise desta pesquisa, desse modo, consistiu em selecionar partes que foram consideradas importantes de acordo com o problema de pesquisa, ou seja, partes em que os alunos interagiam com os manipuláveis. Os vídeos foram assistidos e foram transcritos estes trechos. A segunda etapa correspondeu à codificação dos dados. Nesta, as transcrições são reduzidas a códigos como uma pequena frase (CHARMAZ, 2006).

Nas etapas seguintes, os códigos foram comparados e agrupados, o que permitiu o recorte de trechos de dados, isto é, sequências de falas e ações correlatas. Por fim, confrontaram-se os resultados obtidos com a literatura a fim de gerar compreensões teóricas e/ou confirmar/revisar aquelas já existentes.

3.6 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

A seção que se inicia descreve os dados obtidos nas aulas observadas e apresenta o desenvolvimento das atividades realizadas pela professora Flávia no período da coleta de dados, assim como por alguns de seus alunos.

Durante as oito aulas iniciais da terceira unidade da disciplina de GA, cujo tópico de estudo foi “Superfícies de Revolução”, a professora levou para sala de aula alguns materiais manipuláveis, mostrando-os para os alunos. Nessas primeiras aulas, os alunos foram socializados com estes manipuláveis. Eles foram convidados pela professora a participar de aulas de matemática nas quais objetos matemáticos, como cones, elipsóides, hiperbolóides e eixos cartesianos, seriam visualizados por meio dos, e nos manipuláveis.

Durante essas aulas, a professora apresentou à turma superfícies de revolução. A cada superfície apresentada, era escolhida uma posição relativa desta superfície nos eixos coordenados e fazia-se um estudo das intercessões da superfície com o plano cartesiano XoZ, com o plano cartesiano YoZ e com o plano cartesiano XoY, além das simetrias em relação aos eixos e planos coordenados e a origem. Ela apresentava também o manipulável e conceituava-o como uma superfície de revolução gerada por uma determinada curva. Realizava-se essa discussão com a superfície sendo desenhada no quadro e apresentando a equação da mesma.

Na 9ª e 10ª aula, porém, a pedido da primeira autora deste artigo, a professora Flávia formulou uma atividade na qual os alunos participaram não somente observando os manipuláveis, mas também tocando-os. Dessa forma, seguindo as orientações da professora, os alunos foram organizados em grupos e lhes foi solicitado que escolhessem um manipulável que representava uma superfície quádrica. A professora, então, escreveu na lousa a equação geral das quádricas e entregou os manipuláveis aos alunos.

O grupo observado escolheu o manipulável que representa o parabolóide hiperbólico ou sela do cavalo.

Figura 1: Aluno analisando o material que representa o parabolóide hiperbólico.

A atividade tinha o objetivo de analisar a superfície escolhida em relação às interseções com os planos XoZ, YoZ, XoY e as simetrias em relação aos eixos, aos planos coordenados e à origem.

Inicialmente, os alunos mostraram-se confusos em relação ao que deveria ser feito com o manipulável. Eles questionaram sobre a atividade e a professora apresentou quais as quádricas (o elipsóide, o hiperbolóide de uma folha, o hiperbolóide de duas folhas, o parabolóide hiperbólico e o parabolóide elíptico) seriam analisadas pelos grupos; ela mostrou, ainda, as equações específicas de cada uma. Falou também para os alunos escolherem como estas superfícies estariam posicionadas nos eixos coordenados e, assim, analisá-las em relação às interseções com os planos XoZ, YoZ, XoY e as simetrias em relação aos eixos, e à origem.

A seguir, apresentamos os trechos dessa aula.

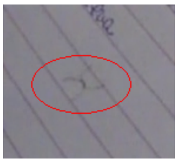
Trecho 1: Determinando interseções

No início da atividade, os alunos buscaram identificar a interseção da superfície com o plano XoY:

Sujeito:	O que foi dito:	O que foi feito:
1.1 Lia	O traço[19] aqui dá duas parábolas.	
1.2 Jorge	Tem que botar y igual a k, x igual a k.	
1.3 Lia	Vão ser duas parábolas, por que, tipo, tem que passar por aqui!	Indica onde seria a interseção: 
1.4 Leo	É assim oh!	Desenha na carteira uma figura, como representada a seguir: 
1.5 Lia	Vai ser assim: X e y assim.	Desenha no papel a figura que representaria a intersecção [identificada por Lia como duas

[19] Chama-se traço a intersecção de uma superfície com um plano.

parábolas]:

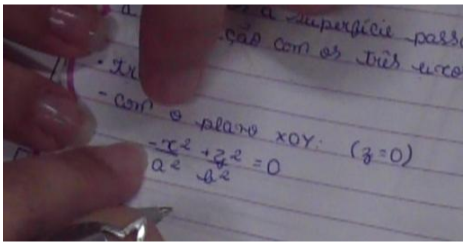


1.6 Leo	Sim.	
1.7 Lia	Flávia, a gente tem que escolher valores para A e para B é?	
1.8 Flávia	Não precisa escolher, é para usar os termos genérico: A, B, C.	
1.9 Lia	E os traços, a gente vai dizer qual é a figura ou como a equação fica?	
1.10 Flávia	No traço você vai mostrar a equação.	
1.11 Lia	Aí, a partir da equação a gente vê.	

Nas falas 1.1 e 1.3, a aluna tenta *indicar a interseção da superfície com o plano XoY por meio da manipulação.* Ela mostra aos colegas – ação 1.3 – como seria essa interseção e finaliza desenhando no papel a curva que ela identificou como a interseção. Na fala 1.2, podemos observar que Jorge indica como a aluna deveria agir, referindo-se à equação da superfície, como deveria ser determinada a solução da problemática de indicar essa interseção *através da equação do parabolóide hiperbólico*. Porém, Lia ignora a indicação de Jorge e continua sua argumentação por meio do que está sendo visualizado e manipulado no material.

A professora Flávia na fala 1.10, então, explica à aluna que é necessário “mostrar a equação” da curva resultante, ou seja, a equação da curva que é a interseção, e, assim, Lia percebe que utilizar a equação do parabolóide hiperbólico pode ser uma possibilidade de encontrar a solução: “Aí, a partir da equação a gente vê”. Os alunos, então, buscam nos seus cadernos a equação da superfície e iniciam alguns procedimentos algébricos nesta, como se pode observar nos trechos a seguir:

1.28 Lia	Agora tem que colocar se A é igual a B.	
1.29 Alex	Se A for diferente de B é uma hipérbole, e se A for igual a B?	Pega o manipulável e deixa no colo.

1.30 Leo	É sempre hipérbole por causa do sinal negativo. Hipérbole equilátera, né isso?	
1.31 Lia	Ah é!	Escreve as informações.

Após alguns procedimentos algébricos para determinar o traço da superfície com o plano XoY, os alunos chegam à equação $-\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=0$. Leo, na fala 1.30, indica ser sempre uma hipérbole “por causa do sinal negativo”, ele justifica sua afirmação referindo-se à equação algébrica encontrada. Dessa forma, os alunos indicam ser uma hipérbole a curva de interseção do parabolóide hiperbólico com o plano XoY, solucionando o problema.

Para determinar a curva de interseção da superfície com o plano XoZ, eles também *utilizam, além de procedimentos algébricos, a manipulação com o material*, como pode-se observar a seguir:

1.101 Leo	Quer saber o quê? Você chamou y de zero?	
1.102 Lia	Essa equação é de quê? X ao quadrado.	
1.103 Leo	X ao quadrado é igual à cz é parábola!	
1.104 Jorge	Deixa eu ver aqui rapidinho.	Pega o papel para olhar.
1.105 Lia		Olha para o manipulável e faz como se o cortasse em várias direções.
1.106 Jorge	É, é parábola! Velho (fala olhando para Leo), não precisa nem fazer assim (referindo-se à manipulação algébrica), é só olhar aqui e a gente vai ter certeza (referindo-se ao manipulável).	Pega o manipulável e faz como se cortasse ele.
1.107 Lia	Eu sei.	
1.108 Jorge	É parábola, olha aqui! Acabou.	Mostra o manipulável.

Nas falas 1.101, 1.102, 1.102 e 1.104, os alunos discutem qual é a curva determinada pela interseção observando a equação gerada a partir da equação do parabolóide hiperbólico quando se iguala a variável y a zero. Eles têm dúvidas de qual curva seria aquela. Nesse caso, ao observar a equação $x^2 = cz$, Leo identifica a curva: "é parábola". Porém, Lia parece não estar convencida e recorre ao manipulável – ação 1.105 – e o manuseia.

Jorge, como se pode perceber na fala e ação 1.106, também recorre ao manipulável e explica "não precisa fazer assim", referindo-se ao procedimento matemático que Leo estava utilizando. Em seguida, deduz "é só olhar aqui e a gente vai ter certeza", indicando que se olhassem o manipulável, eles teriam certeza de qual curva seria. E finaliza esta parte da atividade argumentando ser uma parábola, pois os alunos poderiam vê-la: "É parábola, *olha aqui*! Acabou."

Para resolver o problema de indicar a interseção da superfície com estes planos, os alunos, por vezes, utilizaram os materiais manipuláveis, baseando-se na manipulação realizada e no que é observado para fazer suas afirmações; outras vezes, recorreram às manipulações algébricas para se justificarem. Estes modos de participar da aula mostraram-se legítimos entre os próprios alunos e entre eles e a professora, conforme podemos observar também no momento em que os alunos determinam as simetrias da superfície.

Trecho 2: Determinando simetrias

No problema de identificação das simetrias da superfície em relação aos eixos coordenados e à origem, os alunos agiram de forma semelhante ao momento de determinar os traços da superfície. Observemos:

2.1 Leo	É simétrico ao eixo Oz, não é velho? Eu testei aqui, não sabia se estava certo, mas ela (a professora) até falou.	
2.2 Alex	Simetria é que troca x por menos x, z por menos z e y por menos y. Não sei se é simétrico não.	Escreve no seu caderno.

2.3 Leo	Claro que sim velho, quem é o eixo z?	Pega o manipulável e indica o que seria o eixo desenhado no quadro.
2.4 Alex	Aqui.	Indica no manipulável.
2.5 Leo	Pois é! Qual o único ponto que você corta aqui que vai ficar simétrico de um lado e de outro?	Mostra o manipulável.
2.6 Alex		Indica o "ponto de sela".
2.7 Leo	Não (rir). Qual o sentido que você corta aqui e fica simétrico?	
2.8 Alex	Assim.	Indica o corte no manipulável.
2.9 Leo	Então!	
2.10 Jorge	Você quer dizer que não é simétrico em relação ao eixo z?	
2.11 Leo	Aos outros eixos?	
2.12 Jorge	Em relação a z: esse é igual a esse, esse é igual a esse! Aqui é o eixo z, velho e esse é igual a esse, esse é igual a esse!	Pega o manipulável, coloca a caneta tocando no manipulável e aponta para dois pontos e repete a ação várias vezes. 

Para determinar as simetrias da superfície, os alunos também já conheciam os procedimentos algébricos, como podemos ver na fala 2.2, uma vez que eles possuíam no caderno exercícios similares, feitos pela professora nas aulas anteriores na determinação de simetrias de superfícies de revolução. Porém, ao surgir uma dúvida sobre a possível simetria do parabolóide hiperbólico em relação ao eixo Oz, Jorge pergunta: "Você quer dizer que não é simétrico em relação ao eixo z?" Mostrava, ainda, pelo tom da voz, saber que aquela superfície é simétrica em relação a esse eixo. Para argumentar, ele não segue as orientações dadas por Alex na fala 2.2, *ele recorre ao manipulável*.

De posse do manipulável, ele coloca-o sobre a perna, indica ser o eixo z uma caneta, que é posta "no ponto de sela" do manipulável, e com o dedo indicador e o dedo médio ele aponta para pontos próximos a caneta, como se os pontos fossem equidistantes da caneta e diz: "Esse é igual a esse". Nesse momento vai distanciando os dedos da caneta de forma que os dedos pareçam estar sempre à mesma distância da caneta, apontando para outros dois pontos do manipulável e dizendo: "esse é igual a esse”. Desse modo, ele consegue mostrar aos colegas que a superfície é simétrica em relação ao eixo coordenado Oz e eles mudam a problemática. Depois dessa fala, eles mudam de assunto e discutem outras questões.

Porém, no momento de escrita do relatório da atividade, os alunos não fazem referência ao que foi visualizado e analisado, mas apenas aos procedimentos algébricos que eles já conheciam.

2.77 Lia	Escreve no relatório de pesquisa: “Simetria em relação aos eixos: É simétrico em relação ao eixo Oz já que, se trocarmos os sinais de x por –x e y por –y, a equação fica a mesma”.

E assim, como nesta parte do relatório, as demais também não faziam referência alguma às manipulações realizadas, como se estas não fossem as referências corretas para constar no documento. Neste momento, os alunos escreveram suas justificativas em função das manipulações algébricas feitas. Mesmo usando o manipulável na aula de matemática, o que possibilitou aos alunos justificar suas afirmações por meio de observações empíricas, existiu um momento, a da escrita do relatório, em que este modo de participar não se mostrou adequado para eles.

3.7 DISCUSSÃO

As falas e ações dos alunos analisados e apresentados nos trechos acima permitem compreender como pode ocorrer a participação discente na aula de Matemática ao utilizar os materiais manipuláveis.

É possível perceber que, mesmo de posse dos manipuláveis, por vezes, os alunos justificam suas práticas por meio de uma **argumentação algébrica** (ALOCK; SIMPSON, 2005). Ou seja, o aluno convence a “si mesmo” e aos outros de que os resultados são verdadeiros referindo-se apenas a expressões e equações algébricas, como ocorre nas falas 1.2, 1.28, 1.30 e 2.2. Na fala 1.30, por exemplo, o aluno diz: “É sempre hipérbole por causa do sinal negativo...” Leo justifica o fato de ser hipérbole, pois na equação $-\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=0$ há um sinal negativo. Ele utiliza apenas a equação para subsidiar sua afirmação, o que caracteriza uma argumentação algébrica, como definida por Alock e Simpson (2005).

Por sua vez, em alguns momentos, como nas falas 1.1, 1.3 e 1.106, os alunos utilizam apenas as manipulações realizadas com o material para convencer a “si mesmo” e aos outros que suas afirmações são verdadeiras fazendo alusão direta à manipulação realizada, o que não corresponde à argumentação algébrica. Esse modo de argumentar utilizando as observações empíricas para subsidiar suas afirmações sobre objetos matemáticos denominamos de **argumentação empírica matemática**. Como ilustração, referimo-nos ao trecho de falas 2.3 – 2.12, citado anteriormente. Neste, Leo, Alex e Jorge discutem sobre a simetria da superfície em relação ao eixo cartesiano Oz. Eles concluem que a superfície é simétrica em relação a este eixo cartesiano baseados nas manipulações e observações realizadas com o material. É possível afirmar, desse modo, que a ocorrência da argumentação empírica matemática é estritamente ligada à inserção de manipulativos na aula de matemática.

Como relata Weber (2004), no que se refere ao ensino superior de matemática, a argumentação que utiliza expressões e equações algébricas é muito frequente, o que é reconhecido como legítimo seja por professores ou alunos nesse ambiente. Ao inserir o manipulável neste contexto, a argumentação empírica matemática também se mostrou corriqueira. Os alunos utilizaram-na para justificar suas ações e deduções.

Nota-se, também, que em uma interação, como em 1.2 e 1.3; 1.103, 1.104 e 1.05; 2.2, 2.3 e 2.4, podem-se perceber os dois tipos de argumentação caracterizando uma argumentação mista, ou seja, que possui características da argumentação algébrica e da argumentação empírica matemática. Nesses casos, os dois tipos de argumentação se mostram complementares para o êxito dos alunos na tarefa, o que não acontece, por exemplo, na escrita do relatório da tarefa.

Ao escrever o relatório, mesmo quando utilizaram apenas argumentos empíricos para se convencerem de algo, os alunos fizeram uso exclusivamente da argumentação algébrica. Ficou claro que eles não acharam pertinente fazer alusão à manipulação realizada neste documento. Mesmo porque, a professora, no inicio da atividade, havia falado “No traço você vai mostrar a equação”, quando fora questionada por Lia sobre como mostrar as conclusões feitas pelos alunos referentes às intersecções. Ou seja, a professora queria que os alunos utilizassem da argumentação algébrica na escrita do relatório.

Em um grupo engajado numa determinada prática, como se observou nesta sala de aula, os seus membros negociam um com o outro o que eles devem fazer, como devem se comportar, suas relações com a tarefa e o significado dos artefatos que eles usam (WENGER, 1998). No caso dessa tarefa, mesmo a argumentação empírica matemática tendo sido reconhecida como legítima e estimulada pelo uso dos manipuláveis, fazer referência a esta no documento que seria entregue à professora não se mostrou pertinente e assim foi feito. Ou seja, mesmo que na aula, o uso da argumentação empírica matemática mostrou-se necessário, no momento da escrita do relatório, a argumentação algébrica prevaleceu.

3.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso propósito neste estudo foi analisar como ocorre a participação dos alunos na aula de matemática ao utilizar os materiais manipuláveis, compreendendo a participação como o engajamento em uma atividade em que haja o reconhecimento de outras pessoas neste envolvimento (WENGER, 1998). Assim, ao analisar a participação dos alunos em uma atividade com materiais manipuláveis, observamos o modo como eles agem durante a atividade e como esse fato é reconhecido pelos outros alunos e pela professora.

Nesse sentido, foi possível observar dois modos de participar nesta aula: a argumentação algébrica e a argumentação física-matemática. A argumentação algébrica mostra-se bastante frequente nas aulas de matemática (ALOCK, SIMPSON, 2005**)**, enquanto a física-matemática só é possível quando se utilizam materiais manipuláveis nesta, havendo, ainda, a possibilidade de complementaridade desses dois tipos de argumentação. Um mesmo aluno pode variar o tipo de argumentação na aula, considerando um ou outro mais adequado, a depender da necessidade e das possibilidades.

Porém, como é possível observar no trabalho de Moyer (2001), em que os alunos utilizam o material inserido na aula apenas para se divertir, não os relacionando à Matemática, a presença do manipulável na aula de Matemática não é determinante para que a argumentação física-matemática ocorra. Para isso, o educador tem um papel crucial. Este precisa propiciar aos alunos um ambiente investigativo, em que a manipulação dos materiais seja conectada à resolução de problemas matemáticos.

Agradecimentos

Agradecemos à professora e aos alunos participantes da pesquisa, por terem cedido suas imagens e falas para análise. Além disso, agradecemos à professora Dra. Cristina Frade, ao professor Dr. José Luis de Paula Barros Silva e à professora Dra. Andreia Maria Pereira de Oliveira, pelos comentários a versões prévias deste artigo. Por fim, agradecemos a Capes, pelo incentivo financeiro.

3.9 REFERÊNCIAS

ADLER, P. A.; ADLER, P. Observational techniques. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y.S. (ED) **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, p. 377-392, 1994.

ALOCK, L.; SIMPSON, A.P. Convergence of sequences and series 2: interactions between monvisual reasoning and learner's belief about their own role. **Education Studies in Mathematics**, v. 58, n. 1, p. 157-175, 2005.

BERTONI, N.E.; GASPAR, M.T.J. Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de Brasília – uma trajetória de pesquisa em educação matemática, apoio à formação do professor e interação com a comunidade. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 135-152, 2006.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Td. ALVAREZ, M. J; SANTOS, S. B.; BAPTISTA, T. M. Portugal, Porto Codex: Porto Editora, 1999.

CATAPANI, E. C. **Alunos e professores em um curso de cálculo em serviço: o que querem?** 2001. 146 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

CHARMAZ, K. **Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis**. London: Sage, 2006.

CLEMENTS, D. H. 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, n. 1, p 1-16, 1999.

DENZIN, N.K; LINCOLN. Introduction. In: DENZIN, N.K; LINCOLN. Y.S. (ED) **Handbook of qualitative research**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage; p. 1-29, 2005.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim SBEM**, v. 7, n.4, 1990.

KALEFF, A.M.M.R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 113-134, 2006.

KAMII, C.; LEWIS, B.A.; KIRKLAND, L. Manipulatives: When are they useful? **Journal of Mathematics Behavior**, v. 20, p. 21-31, 2001.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 3- 38, 2006.

MATOS, J.M.; SERRAZINA, M,L. **Didáctica da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. **Qualitative Data Analysis**. 2. ed. London: Sage, 1994.

MOYER, P.S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. **Journal Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175-197, 2001.

PAIS, L.C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria, 2001. Disponível em < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em 23 de setembro de 2009.

PASSOS, C.L.B. Materiais manipuláveis como recurso didático na formação de professores. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 77-92, 2006.

RÊGO, R.M.; RÊGO, R.G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 39-56, 2006.

SANTANA, E. Manipulative material and representational material. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 32. 2005, México, **Anais…** v. 4, p. 225-232, 2008. 1 CD-ROM.

SANTOS, M. P.; MATOS, J. F. The role of artefacts in mathematical thinking: a situated learning perspectives. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (ORG) **New directions for situated cognition in mathematics education**. Melbourne: Mathematics Education Library, p. 179-204, 2008.

TURRONI, A.M.S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, P. 57-76, 2006.

WEBER, K. Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of on theather's leactures and proofs in an introductory real analysis course. **The Journal of Mathematics Behavior**, v. 23, n. 2, p. 115-133, 2004.

WENGER, E. **Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

4- CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1- RETOMANDO A PESQUISA

O objetivo dessa pesquisa era compreender como os alunos participam das aulas de matemática quando utilizam materiais manipuláveis. Para isso, inspirei-me em alguns conceitos da Perspectiva Situada, baseada em Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998). Um dos conceitos utilizados desta perspectiva foi o conceito de participação. Nesses trabalhos, a noção de participação é definida como um tipo de envolvimento em determinada prática, um envolvimento que é reconhecido pelos outros sujeitos daquela comunidade (WENGER, 1998).

Desse modo, foi necessário analisar como os alunos se envolvem nas tarefas com materiais manipuláveis, como eles interagem com o material, com os outros alunos e com o professor na aula. Analisar, também, se o envolvimento dos alunos era reconhecido pelos outros alunos e pelo professor, se eles estavam compartilhando algumas características desta prática. Além disso, buscou-se entender se/como os alunos desenvolviam um repertório partilhado de recursos e linguagem para a resolução da tarefa. E, assim, compreender como eles participam e quais os padrões de participação em uma sala de aula de matemática em que se utilizam manipuláveis.

Para esta finalidade, busquei variar o contexto de coleta de dados, no intuito de obter mais elementos para a análise. Um dos cenários escolhidos foi uma sala de aula do nono ano do ensino fundamental de uma escola estadual da rede pública, localizada na cidade de Salvador e o outro foi uma sala de aula de ensino superior da uma universidade pública no estado da Bahia, na disciplina de Geometria Analítica. Nesses dois contextos, as aulas de matemática foram observadas e gravadas em vídeo.

Em uma das aulas, tanto no ensino fundamental quanto no contexto do ensino superior, foram propostas aos alunos tarefas que envolviam materiais manipuláveis. Essas aulas foram observadas e analisadas com o intuito de compreender como os alunos participam deste ambiente, cujas considerações foram apresentadas nos capítulos anteriores. Neste capitulo, então, retomarei as discussões, apresentando algumas conclusões sobre a análise dos dados desta pesquisa bem como delinearei relações existentes entre as formas de participação apresentadas e algumas considerações para pesquisas futuras.

4.2- TECENDO COMPREENSÕES

Ao analisar os dados desta pesquisa, foi possível perceber algumas formas de participação dos alunos em aulas de matemática em que se utilizavam manipuláveis. Essas formas foram: (1) a visualização de objetos matemáticos nos manipuláveis, (2) a definição de objetos matemáticos por meio dos manipuláveis, (3) a dedução de algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis, (4) o uso do material para argumentar na sala de aula de matemática e (5) não usar o manipulável para argumentar na sala de aula.

A visualização de objetos matemáticos refere-se aos momentos em que os alunos reconhecem objetos matemáticos nos manipuláveis. Nos dados apresentados nesta dissertação, foi possível observar os alunos identificando retângulos, triângulos, a diagonal do retângulo, trapézios na folha de papel ou em recortes desta, além de indicar superfícies quádricas e superfícies de revolução em objetos modelados para representá-las. Conforme foi discutido no capitulo 2, parti da compreensão de que os objetos matemáticos não existem fisicamente no mundo (GODINO; BATANERO, 1994). Neste sentido, os materiais manipuláveis configuram-se como mediadores visuais (SFARD, 2008), já que funcionaram como uma representação física que pôde ser usada para ajudar os alunos a falar de objetos matemáticos.

Foi possível perceber, também, que após a visualização de objetos matemáticos no manipulável os alunos fizeram deduções com o auxílio do material e definições de objetos matemáticos por meio dos manipuláveis. A expressão “definir objetos matemáticos por meio do manipulável” refere-se a enunciar características específicas desse objeto matemático utilizando o manipulável. Ao falar de dedução de algoritmos utilizando o material, no entanto, refiro-me aos momentos em que os alunos justificaram as conclusões sobre fórmulas e procedimentos matemáticos a partir das observações feitas com o manipulável.

Observou-se, também, o uso do material para argumentar na aula de Matemática. Os alunos utilizaram as manipulações realizadas com o material para justificar os resultados apresentados por eles. Nestes momentos, eles fizeram alusão direta à manipulação realizada para argumentar, o que denomino de argumentação empírica matemática. Porém, houve momentos em que os alunos não usaram o manipulável para justificar suas deduções. Nesses casos, os alunos subsidiaram suas afirmações por meio de expressões e equações algébricas, ou seja, fizeram uso de argumentação algébrica (ALOCK; SIMPSON, 2005). Mesmo com a presença dos materiais manipuláveis na sala de aula, por vezes, os alunos recorriam às equações algébricas para argumentar. Além disso, no momento da escrita do relatório da tarefa, de acordo ao exposto no capítulo 3, os alunos pareceram resistir ao uso da argumentação empírica matemática. Na sala de aula de matemática, a argumentação algébrica mostra-se bastante frequente. Professores e alunos, muitas vezes, justificam suas afirmações utilizando apenas este tipo de argumentação (ALOCK, SIMPSON, 2005; WEBER, 2004).

Na ordem aqui apresentada, as três categorias citadas inicialmente foram apresentadas nos dados referentes ao capítulo 2, enquanto as duas últimas formas de participar emergiram dos dados referentes ao capítulo 3. Porém, mesmo sendo apresentadas e discutidas de maneira separada, essas formas de participar estão interconectadas. Nas subseções que seguem, apresentarei, então, as relações entre estas.

4.2.1- A visualização de objetos matemáticos no manipulável

Como foi discutido no artigo “O uso de manipuláveis e a participação dos alunos na aula de matemática”, os alunos visualizam objetos matemáticos no manipulável. Esse modo de participar também pode ser percebido no artigo “O uso de materiais manipuláveis na aula de matemática e a argumentação dos alunos”. Nos dados referentes a este artigo, durante toda a aula, é possível observar que os alunos referem-se ao manipulável como se estivessem observando o parabolóide hiperbólico. Como na fala de Jorge: “É, é parábola! ... é só olhar aqui e a gente vai ter certeza (referindo-se ao manipulável).” No trecho 1 dos dados, ele indica ser um parábola a curva de interseção do parabolóide hiperbólico com o plano XoZ. A visualização de objetos matemáticos no manipulável mostrou-se presente nos dois contextos de coleta de dados, o que permitiu aos alunos definir objetos matemáticos com o auxílio do manipulável, deduzir os algoritmos, assim como utilizar a argumentação física-matemática.

É a partir desta visualização que os alunos fazem as deduções com base no manipulável, argumentam de forma física-matemática e definem conceitos matemáticos no manipulável. Porém, como indicado por Clements (1999), Pais (2001) e Fiorentini e Miorim (1990), a presença do manipulável na aula de matemática não é determinante para que esta visualização possa ocorrer. Nos dados apresentados nos capítulos 2 e 3, foi possível observar que as professoras orientaram os alunos a relacionar o manipulável à matemática durante toda a aula. Nesse sentido, o educador, ao inserir o material na sala de aula de matemática, deve propiciar oportunidades para que a relação matemática-material possa existir e, assim, possam-se definir objetos matemáticos com base no manipulável e fazer uso de argumentações empíricas matemática.

4.2.2- Deduzir algoritmos matemáticos com o apoio de materiais manipuláveis e a argumentação empírica matemática

Como discutido no capítulo 2, os alunos deduzem a fórmula para o cálculo da área do triângulo e do trapézio, indicando o que foi realizado com o manipulável. A fala "Ah rapaz! Aqui oh... Esse vai dar esse (junta dois trapézios congruentes para formar um retângulo), porque esse é igual a esse (aponta para a base maior dos dois trapézios). Aí soma esse (aponta para a base do retângulo)", no trecho 4 dos dados, ilustra bem este momento. Podemos observar que os alunos argumentam a respeito dessa dedução utilizando as observações empíricas, ou seja, a forma de participar que chamei de "os alunos deduzem algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis" é um tipo de argumentação empírica matemática.

Ao observar os alunos promovendo argumentação empírica matemática, em ambos os capítulos, fica clara a importância do manipulável na resolução das tarefas. Os alunos recortam o papel, sobrepõem os recortes, comparam-nos como vimos no capítulo 2. No capítulo 3, eles representam eixos cartesianos com canetas, representam sessões em uma curva no manipulável, o que permite que eles justifiquem muitas de suas respostas. Essa forma de participar só é possível se os alunos utilizam materiais manipuláveis. Porém, o mesmo não posso afirmar em relação à argumentação algébrica.

4.2.3- A complementaridade

Ao utilizar materiais manipuláveis na sala de aula há a possibilidade de fazer uso da argumentação física-matemática. Mas, também, como foi apresentado no capítulo 3, o aluno pode não fazer uso do material para justificar suas deduções em torno dos objetos matemáticos; eles podem utilizar, para isso, a argumentação algébrica. Nos dados apresentados no capítulo 3, há uma alternância entre a argumentação algébrica e a argumentação empírica matemática por parte dos alunos. Ou seja, mesmo havendo a visualização de objetos matemáticos no manipulável e o uso de argumentação empírica matemática, pode haver também a argumentação algébrica nesta prática.

No capítulo 2, a argumentação algébrica não foi legitimada pela professora durante a atividade. Ela queria que os alunos justificassem suas afirmações sempre utilizando os materiais. Dessa forma, a argumentação empírica matemática foi a mais adequada e mostrou-se suficiente para a resolução da atividade. Entretanto, algo a se considerar é a complementaridade que existiu entre esses dois modos de argumentação.

Como foi possível observar, na fala e ação 1.3 do capítulo 3, Lia, baseando-se na manipulação realizada, acredita ser duas parábolas a intersecção do parabolóide hiperbólico com o plano XoY. Porém, após observar a equação e ouvir as argumentações algébricas dos colegas, na fala 1.31, ela percebe que esta intersecção é na verdade uma hipérbole. Já nas falas 2.1 à 2.12, foi possível constatar que mesmo sabendo como manipular a equação para saber se o parabolóide hiperbólico é simétrico em relação ao eixo z, foi necessário recorrer ao material para que os alunos tivessem certeza desta simetria. Ou seja, esses dois modos de argumentação podem ser complementares e utilizadas na resolução de problemas nas aulas de matemática. Uma argumentação não deve ser considerada melhor ou pior que a outra, mas, a partir do contexto e da situação, pode-se mostrar mais ou menos adequada.

4.3- CONCLUSÕES

Por meio da análise dos dados coletados durante aulas de matemática, esta pesquisa buscou gerar um entendimento sobre a participação do aluno em tarefas em que se utilizam materiais manipuláveis. Foi possível perceber, então, que a natureza da participação, neste ambiente, varia em pelo menos quatro padrões: reconhecer objetos matemáticos no manipulável, definir objetos matemáticos com o auxílio do manipulável, o uso do material para argumentar sobre deduções (o que inclui a dedução de algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis) e o não uso do manipulável para argumentar na sala de aula.

A inserção do material manipulável em uma prática social não determina as formas de participação nesta prática (SANTOS; MATOS, 2008). Porém, a presença dele na sala de aula estabelece diferenças qualitativas nas participações dos alunos. O modo como as pessoas agem e os meios que medeiam esta ação são indissociáveis (WERTSCH, 1991) e indicam possibilidades e limites na participação dos sujeitos. Desse modo, podemos afirmar que a presença do manipulável na sala de aula é imprescindível para que os alunos reconheçam objetos matemáticos em objetos físicos, definam objetos matemáticos com o auxílio do manipulável, além de usarem observações empíricas para justificar suas deduções. Porém, as relações entre materiais manipuláveis e objetos matemáticos não são tão estreitas. As características do objeto matemático não correspondem na sua totalidade às características do manipulável que o representa, existindo, assim, limites no seu uso na aula de matemática. A argumentação algébrica, neste sentido, pode ser uma alternativa na resolução da tarefa, mostrando-se complementar à argumentação empírica matemática.

4.4 IMPLICAÇÕES PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA

A literatura tem documentado que, ao utilizar o manipulável na sala de aula, os alunos podem não estabelecer relações entre este uso e algum conteúdo da matemática escolar (FIORENTINI; MIORIM, 1990; PAIS, 2001, 2006). Como foi observado no trabalho de Moyer (2001), isto pode ocorrer devido aos objetivos do profissional referentes ao uso do material; neste caso, os professores observados optaram por fazer uso do manipulável na aula de matemática somente para divertir os alunos. Segundo Turrioni e Perez (2006), dificuldades no uso do manipulável no ensino de matemática podem ser minimizadas após uma maior reflexão sobre os usos do manipulável na prática pedagógica.

Neste sentido, os resultados obtidos nessa pesquisa trazem uma oportunidade para esta reflexão, especificamente ao tratar da participação dos alunos na sala de aula de matemática em que se utilizam materiais manipuláveis. Os resultados apontam que inserir o material na sala de aula mostra-se interessante no que tange às possibilidades de aproximação dos alunos aos objetos matemáticos. Essa aproximação possibilita a argumentação empírica matemática e a socialização das práticas historicamente estabelecidas na matemática escolar. Para tal próposito, ao inserir esses materiais na sala de aula, o educador pode promover um ambiente de discussão e reflexão. Os alunos devem ser estimulados a analisar o material, manipulá-lo, relacioná-lo a objetos matemáticos e, assim, fazer inferências sobre ideias matemáticas.

Entretanto, muito ainda precisa ser compreendido neste contexto. Isto foi percebido durante todo o desenvolvimento do trabalho, em que algumas inquietações, ligadas aos resultados apresentados e a outros sujeitos da pesquisa, surgiram. Desse modo, decidi reservar uma seção neste estudo para apresentar algumas perguntas, as quais podem originar novas pesquisas na educação matemática, como veremos a seguir.

4.4- IMPLICAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Como o professor participa de uma atividade de matemática em que se utilizam materiais manipuláveis? Esse é um dos questionamentos que emergiram desta pesquisa. O professor tem um papel importante na sala de aula e o modo como ele participa de quaisquer atividades neste ambiente interfere na participação e aprendizagem dos alunos. Assim, esclarecer alguns momentos da relação professor/manipulável/aluno, colocando o foco no professor, mostra-se bastante relevante. O que já foi timidamente analisado no artigo "A Participação do Professor em Atividades com Materiais Manipuláveis", submetido por mim e pela pesquisadora Maria Rachel P. P. P. de Queiroz a XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM), precisa, contudo, ser ainda mais explorado (VILAS BOAS, QUEIROZ, em prelo).

Além disso, segundo o referencial teórico desta dissertação, é possível entender a aprendizagem do aluno como uma mudança na sua forma de participar da sala de aula. Desse modo, após analisar a participação desse sujeito, o que poderia afirmar sobre a aprendizagem matemática dos alunos em aulas que se utilizam materiais manipuláveis? Qual o papel desses materiais nesta aprendizagem?

Outra questão a considerar é que estas formas especiais de participar de atividades com materiais manipuláveis, assim como as demais, envolve o ser humano, envolve o corpo humano. O pensamento e a aprendizagem são também situados em contextos biológicos, corporais, que moldam, de uma maneira não arbitrária, as características humanas de aprender (NÚÑEZ, EDWARDS, MATOS, 1999). Como foi possível observar nos dados apresentados, os alunos utilizam o corpo - gestos, movimentos, ou fazendo referência ao corpo em sua fala - não somente para expressar algo, mais do que isso, o corpo compunha a prática do aluno. Dessa forma, também se mostrou instigante investigar o papel do corpo humano nas atividades com materiais manipuláveis na sala de aula de matemática. Qual seria este papel?

Assim, finalizo esta dissertação acreditando que contribuí para a área da Educação, em particular, para os estudos da sala de aula onde são inseridos materiais manipuláveis, com a certeza, porém, de que ainda há muito que pesquisar e estudar neste contexto.

4.3 – REFERÊNCIAS

ALOCK, L.; SIMPSON, A.P. Convergence of sequences and series 2: interactions between monvisual reasoning and learner's belief about their own role. **Education Studies in Mathematics**, v. 58, n. 1, p. 157-175, 2005.

CLEMENTS, D. H. 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood**, n. 1, p 1-16, 1999.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim SBEM**, v. 7, n.4, 1990.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press, 1991.

NÚÑEZ, R.; EDWARDS, L.; MATOS, J.F. Embodied cognition as grounding for situatedness ans context in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 39, p. 45-65, 1999.

PAIS, L.C. **Ensinar e aprender matemática**. São Paulo: Autêntica, 2006.

PAIS, L.C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria, 2001. Disponível em < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em 23 de setembro de 2009.

SANTOS, M. P.; MATOS, J. F. The role of artefacts in mathematical thinking: a situated learning perspectives. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (ORG) **New directions for situated cognition in mathematics education**. Melbourne: Mathematics Education Library, p. 179-204, 2008.

SFARD, A. **Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing**. Cambridge: University Press, 2008.

TURRONI, A.M.S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, P. 57 - 76, 2006.

WEBER, K. Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of on theather’s leactures and proofs in an introductory real analysis course. **The Journal of Mathematics Behavior**, v. 23, n. 2, p. 115-133, 2004.

WENGER, E. **Comunities of Pratices Learning, Meaning, and Indentity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

WERTSCH, J. V. **Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action**. Cambridge: Harvard University. 1991.