CLAUDENE FERREIRA MENDES RIOS

POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DOS CONCEITOS DO CÁLCULO NÃO-STANDARD PARA O ENSINO MÉDIO

SALVADOR, 2005

CLAUDENE FERREIRA MENDES RIOS

POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DOS CONCEITOS DE CÁLCULO NÃO-STANDARD PARA O ENSINO MÉDIO

Esta Dissertação é requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências; será apresentada às Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana no Instituto de Física - UFBA; sua área de concentração é História e Filosofia das Ciências e implicações para Ensino das Ciências.
Orientador: Profº Dr. Carloman Carlos Borges.

SALVADOR
2005

Ficha Catalográfica

Rios, Claudene Ferreira Mendes
Possíveis contribuições dos conceitos do cálculo não-standard para o ensino médio. / Claudene Ferreira Mendes Rios. – Salvador: C. F. M. Rios, 2005.
183 f.

Orientador: Prof. Dr. Carloman Carlos Borges.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, 2005.

1. Cálculo. 2. Matemática (Ensino Médio) – Estudo e ensino. I. Universidade Federal da Bahia. Escola de Teatro. II. Borges, Carloman Carlos. III. Título.

CDD : 515

TERMO DE APROVAÇÃO

CLAUDENE FERREIRA MENDES RIOS

POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DOS CONCEITOS DE CÁLCULO NÃO-STANDARD PARA O ENSINO MÉDIO

Esta Dissertação é requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências, junto à Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), sua área de concentração é História e Filosofia das Ciências e implicações para Ensino das Ciências. Será defendida em 21 de março de 2005 e examinada pela seguinte banca:
Profº Dr. Carloman Carlos Borges (Orientador) – UEFS/UFBA
Profº Dr. Trazíbulo Henrique Pardo Casas – UEFS
Profº Dr. Valdenberg Araujo da Silva – UFS

____

Data de Aprovação

Assinatura da Banca:

____

____

____

Salvador, 21 de março de 2005.

Aos meus pais

Ao meu orientador

Ao meu filho: Luiz Filipe

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, possibilitando-me sonhar e ousar no construir da minha existência.

Sonhar...! faz bem, mesmo que o sonho seja algo aparentemente inacessível. Por isso, esta dissertação representa uma conquista significativa da minha trajetória de estudante, que numa pequena cidade do interior da Bahia – Pintadas, sonhou com o dia em que ouviria seu nome ser divulgado pelo rádio (lá não circulava jornal) ao ser aprovada no Vestibular. Enfim, esse dia chegou e entrei na Universidade (UEFS).

A realização desse sonho só foi possível porque contei com a colaboração dos meus pais - Valdivino e Terezinha, pois, mesmo com poucos recursos, recorreram aos meus tios - Agabino e Raquel que me receberam em sua casa em Feira de Santana, com carinho e foram se tornando um pouco meus pais.

No último ano da graduação ganhei um dos melhores presentes da minha vida – conhecer o professor Dr. Carloman Carlos Borges e ser sua aluna. Desde a sua primeira aula, ao querer saber de onde éramos (os alunos), que ele passou a incentivar-me. Desde então, sempre esteve disposto a ajudar-me no que fosse preciso, e, com sua bela mania de incentivo à leitura, me ajudou a desenvolver o gosto pela leitura. Lembro-me dos primeiros livros que me sugeriu: *A Arte de Amar* de Eric Fromm (nunca esqueci), *O Velho e Mar*, *Sidarta*, *O Retrato de Dorian Gray, Madame Bovary, Terras do Sem Fim*, entre outros.

Tenho plena consciência de que sem o seu incentivo, tudo teria sido mais difícil - talvez eu nem estivesse vivendo este momento. Portanto, desejo-lhe agradecer do íntimo do meu ser toda a sua *dedicação* e *paciência* para comigo e dizer-lhe que é o grande responsável pelo meu êxito, pela realização de mais um sonho: tornar-me Mestre.

Aos membros da banca, profº Trazíbulo e profº Valdenberg, agradeço pela boa vontade e disponibilidade, como também, pelas contribuições, dada, a esta Dissertação.

Agradeço também,

- ao meu esposo Edivaldo pelo carinho e pela compreensão;
- aos meus irmãos, em especial, EdnyMarcos e Edicarlos pelo incentivo e força que me deram;
- aos professores Osvaldo Pessoa, Olival Freire, Robinson Tenório, João Carlos e os demais professores do Mestrado;

- ao professor Inácio Fadigas pela boa vontade e disponibilidade para melhorar os gráficos desta dissertação;
- a bibliotecária Claudete pelo carinho e pela elaboração da Ficha Catalográfica;
- a Ana Cristina pelo incentivo, pela disponibilidade em ouvir-me quando estava angustiada e pelas discussões acadêmicas;
- a minha prima Iranildes pelo carinho e incentivo;
- a Marta Enéas pelo incentivo e por dividirmos nossas angustias no processo de construção;
- a Mônica e a Gelcivânia pelo carinho e pelo incentivo desde a seleção;
- a Selma dos Santos por ter lido os primeiros rabiscos do projeto que apresentei na primeira seleção que fiz para o Mestrado;
- a todos os colegas do Campus XI da UNEB – Serrinha e do Centro Integrado de Educação Assis Chateaubriand – Feira de Santana que me incentivaram;
- e a todos os demais amigos que me incentivaram.

Cantar

a

beleza

de

ser

um

eterno

aprendiz.

Gonzaguinha

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma análise teórica sobre os conceitos do cálculo não-standard, evidenciando os seus aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos, e também, o papel da intuição na formação dos conceitos matemáticos. As principais questões que suscitamos surgem das minhas experiências como professora de Matemática no ensino médio e no ensino superior, por meio de questionamentos sobre o baixo desempenho dos alunos e do meu interesse em estudar conceitos matemáticos "fecundos" que possibilitem estabelecer relações. Deste modo, temos como objetivo central identificar possíveis contribuições dos conceitos do cálculo não-standard para o ensino médio. E também, contribuir, ao apontar práticas pedagógicas que possibilitem "novas" formas para aprender conceitos matemáticos, e que podem ser desenvolvidas por professores e alunos. Nessa análise, consideramos os pressupostos de que a aprendizagem matemática no ensino médio, resulta de um bom nível de articulação entre os aspectos citados dos conceitos matemáticos, a intuição, e também, a linguagem matemática (sem exageros simbólicos) no processo de sistematização e formalização dos conceitos matemáticos. Inicialmente, apresentamos o desenvolvimento dos infinitésimos – conceito básico do cálculo não-standard, e posteriormente, os conceitos de continuidade, derivada e integral. Além disso, são apresentadas idéias sobre a capacidade cognitiva do aluno fundamentadas nas teorias de Piaget e Vygotsky, e numa perspectiva contextualizada - com base nos PCNEMs, algumas reflexões acerca da Matemática, da formação e aprendizagem de conceitos científicos matemáticos e estratégias que podem contribuir, de maneira significativa, para a melhoria das aulas de Matemática. Por fim, perante a necessidade imperativa de melhorar a qualidade do ensino de Matemática, podemos dizer que a nossa análise é relevante por apresentar algumas sugestões no sentido de, pelo menos, minimizar os problemas relacionados com a aprendizagem matemática no ensino médio.

Palavras-chave: cálculo não-standard, intuição, contextualização, aprendizagem matemática, ensino médio.

ABSTRACT

This dissertation presents a theoretical analysis about the concept of non-standard calculus by making evident its epistemological, philosophical, and historical aspects as well as the role of intuition in the constitution of mathematical concepts. The main issues we suscitate in this work emerge from my experience as a teacher of mathematics in Brazilian high schools and colleges wherein I have been facing many situations involving the low performance of the students as well as my own interest in studying “fecund” mathematical concepts which allow me to establish relationships with reality. Thus the central target of this work is the identification of possible contributions of the concept of non-standard calculus to the learning of mathematics in Brazilian high schools. We also attempt to contribute to this discussion by identifying pedagogical practices which allow the students to have new forms of learning mathematical concepts which, in turn, can be developed by teachers and students themselves. With this analysis, we consider the pressupposition that the learning of mathematics in high school is the result of a high level of articulation between the aforementioned mathematical concepts, intuition, and the mathematical language – without any symbolic exageration – during the process of systematization and formalization of those mathematical concepts. Firstly, we present the development of the infinitesimal – which is one of the basic concepts of the non-standard calculus – and, after that, the concepts of continuity, derivative, and integral. Moreover, we present some discussions involving the cognitive capacity of the students in the learning process based on Piaget’s and Vygotsky’s theories. From a contextualized perspective, we take into consideration the PCNEMs and reflect on the role of mathematics as well as the construction and the learning of scientific mathematical concepts and strategies which can contribute significantly to the improvement of mathematics classes. Finally, due to the imperative necessity of improving the learning of mathematics, we defend that the analysis contained in this work is relevant because it makes some suggestions in terms, at least, of the attempt of minimizing the problems related to the learning of mathematics in brazilian high schools.

Keywords: non-standard calculus, intuition, contextualization, learning of mathematics, high school

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O propósito deste estudo é trabalhar com os conceitos matemáticos do **cálculo não-standard** com o objetivo de identificar na análise dos conceitos, possíveis contribuições históricas, filosóficas, epistemológicas e pedagógicas para o ensino médio; e contribuir com indagações acerca da inserção de idéias científicas "fecundas" para o aprendizado do aluno nesse nível de ensino; e provocar uma discussão entre os professores de Matemática que formam outros professores e que também atuam no ensino médio sobre as idéias do **cálculo não-standard.**

Sem dúvida, o cálculo ocupa lugar de destaque no desenvolvimento científico, pois sua parte conceitual está presente nas grandes idéias da ciência, a exemplo da teoria restrita da relatividade. Mas é indispensável buscar a compreensão de suas diferentes abordagens para mostrar como seus conceitos foram estruturados e, conseqüentemente, formalizados. Os primórdios do cálculo nos remete aos antigos gregos, passando por inúmeros matemáticos como Arquimedes, Leibniz, Newton, Euler, Pascal, Robinson. Este último, na década de 60, contribuiu de forma decisiva para ampliar o campo de atuação do cálculo ao desenvolver a teoria da **análise não-standard**, da qual o **cálculo não-standard** faz parte. Essa teoria faz um resgate dos infinitésimos, conceito que teve vários significados e que agora são aceitos na estrutura dos números hiper-reais, representado por *R, que são constituídos pelos números reais ($\Re$), infinitésimos e números infinitos. Os infinitésimos que são os $\xi \in$ *R cujo módulo é menor que todos os reais positivos e os infinitos que são os $\Omega \in$ *R cujo módulo é maior que todos os reais positivos. Assim, um número ξ é tido como infinitamente pequeno, ou infinitesimal, se $-a < \xi < a$ para cada número real positivo "a". Então, o único número real que é infinitesimal é o zero e se "a" e "b" são números hiper-reais cuja diferença $a - b$ é infinitesimal, dizemos que "a" é infinitamente próximo de "b"- representado por ($a \approx b$).

Os fundamentos dos conceitos do cálculo não-standard são instrumentos/elementos da ciência Matemática que contribuem para o desenvolvimento científico. Sua apresentação de forma contextualizada no ensino médio poderá proporcionar aos estudantes deste nível de ensino, o exercício da estruturação e objetividade de seus pensamentos, pois "*a formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte*" (VYGOTSKY, 1998a, p. 72-73), e uma aprendizagem que tem por objetivo prover a compreensão por mostrar como esses conceitos foram se estruturando no decorrer da evolução da Matemática.

Existem diferentes enfoques sobre o cálculo. Mas trabalharemos com o enfoque infinitesimal (nosso objeto de estudo), por apresentar algumas vantagens para o entendimento do aluno sobre cálculo – é nosso entendimento. Neste, primeiro, abordam-se as noções intuitivas que originaram o cálculo; segundo, a conceituação e aplicação dos conceitos de derivada e integral e depois as aplicações dos infinitésimos fora da Matemática - o que o diferencia do enfoque clássico, no qual se aprende cálculo pela abordagem tradicional do conceito de limite, verdadeira dor de cabeça para os estudantes.

A intuição é uma poderosa aliada a especulações, inclusive sobre como aprender-ensinar cálculo. Portanto, por ser professora de Matemática do ensino médio e superior, sempre quis saber mais sobre como os conceitos do cálculo se desenvolveram, e agora neste trabalho de dissertação para o mestrado tenho a oportunidade de fazê-lo. Procurarei fazer o melhor para que o trabalho dê conta de apresentar algumas contribuições ao ensino, como também, provocar uma mudança de atitude nas aulas de Matemática do ensino médio.

A Matemática é uma ciência que precisa ser desmistificada frente aos alunos do ensino médio que a encaram, em grande maioria, sem perspectiva de aprender, pois a consideram sem atrativos. É preciso fazer um movimento inverso à esta perspectiva para mostrar o quanto a Matemática tem de interessante aos jovens deste nível de ensino.

Nossa escolha pressupõe que o ensino de conceitos de cálculo no ensino médio na perspectiva do cálculo não-standard contribuirá para: 1) Diminuir o hiato entre o que o aluno tem aprendido no ensino médio e o que é ensinado no nível superior, ou seja, permitir ao aluno conhecimento de conceitos e técnicas operatórias que facilitam sensivelmente a aprendizagem matemática, enfim, que a passagem do ensino médio ao superior seja contínua e não apresente tanta descontinuidade, como agora. 2) Estabelecer uma interdisciplinaridade (de fato) entre certos conteúdos de Física e algumas idéias matemáticas. 3) Trabalhar a “contextualização” além do cotidiano do aluno, ou seja, apresentar os aspectos teóricos, históricos e filosóficos dos conceitos e suas contribuições para a Matemática e outras ciências (fortemente recomendada nos PCNEMs). 4) Trabalhar com modelos matemáticos, que embora possam ser chamados de simples, se transformam em padrões confiáveis à compreensão de situações-problema.

De modo geral, temos um ensino mais problemático do que é divulgado, tanto na educação básica (ensino fundamental e médio) quanto no nível superior. Mesmo as melhores escolas e universidades são bastante desiguais nos seus cursos, metodologias, formas de avaliação, propostas pedagógicas, infra-estrutura. No nosso sistema de ensino, predominam a fala massiva e massificante, professores mal preparados, mal pagos, pouco motivados, um número excessivo de alunos por sala e alunos que ainda valorizam mais o diploma do que o aprender. Então, é preciso reconhecer: temos um ensino de Matemática no nível médio que não tem sido satisfatório, mas temos a possibilidade de torná-lo mais “contextualizado”. Porém, a contextualização ao qual me refiro não trata só das questões cotidianas, tão em voga ultimamente, mas de um contexto que deve considerar os aspectos históricos, filosóficos, conceituais e pedagógicos dos assuntos estudados. Portanto, é preciso ao professor conhecer os métodos de investigação usados na construção dos saberes matemáticos, como também ter competência para formular questões que estimulem a reflexão dos alunos, e sensibilidade para apreciar a originalidade e a diversidade na elaboração de hipóteses e soluções de problemas.

A sala de aula está cada vez mais sem atrativo e os alunos cada vez mais desinteressados de seu modelo clássico baseado na transmissão de conhecimento, memorização e reprodução. Creio, ser preciso trabalhar a Matemática no ensino médio numa perspectiva de movimento, variação, mudança, a começar pelos conceitos que traduzam estas idéias, os conceitos do cálculo não-standard. Na verdade, as noções do cálculo não-standard são um bom exemplo do que não é estático no processo de ensino-aprendizagem da Matemática – é fecundo. Ora está em conformidade e ora em contradição com as idéias intuitivas dos alunos. É uma oportunidade para aprender com a diversidade dos fundamentos do cálculo. Existem diferentes e legítimas possibilidades.

CAPÍTULO I
O DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL DOS INFINITÉSIMOS

Afinal de contas o que são os infinitésimos? Historicamente, suas primeiras noções surgiram entre os gregos e se desenvolveram ao longo dos tempos. Há evidências de que os gregos admitiam "*que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis.*"(EVES, 1995, p.417). Na verdade, muitas foram as respostas dadas pelos matemáticos, algumas pouco convincentes, outras mais esclarecedoras e identifica-se também, alguns matemáticos que a evitaram. Mas somente no século XX, é que foram devidamente formalizadas as noções sobre os infinitésimos nos trabalhos do matemático, físico, lógico americano Abraham Robinson (1918-1974) na década de 60.

Das respostas dadas, a idéia de movimento, aparentemente trivial ao senso comum, porém cerne de questões ontológicas da Ciência, teve no filósofo Zenão de Eléia, discípulo de Parmênides, nascido por volta de 450 a.C., na Magna Grécia, um dos seus maiores explicadores da época. Zenão tentava demonstrar com seus estudos a existência de dificuldades na relação do senso comum com o pensamento filosófico-científico do seu tempo e, destacou-se ao construir argumentos engenhosos (mais conhecidos como paradoxos[1]), nos quais chamava à atenção para a impossibilidade de compreender a idéia de movimento ao considerar qualquer uma das suposições gregas, por "*mostrar-nos que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considerá-lo assim, equivale a abordar o seu estudo por um método estático que traz consigo o gérmen da infecundidade e da incompreensão.*"(CARAÇA, 1989, p.215). Defensor da tese de que "*a realidade é a permanência, aquilo que não muda*"; seu objetivo era demonstrar que os matemáticos gregos da época não conseguiam exprimir de modo conciso as relações entre quantidades variáveis (inclui o gérmen do conceito de infinito).

Dos inúmeros argumentos construídos por Zenão, destaquemos dois: o da Dicotomia[2] e o da Flecha[3]. O argumento da Dicotomia tenta mostrar que o movimento é impossível, pois para que um corredor possa mover-se do ponto A para o ponto B, ele precisa primeiro

(1) Paradoxo – argumento que contraria crenças compartilhadas pela maioria, ou seja, é uma opinião contrária ao senso comum. Auto-contradição lógica, devido à auto-referência.
(2) Dicotomia – Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de uma quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. (EVES, 1995, p.418).
(3) Flecha – Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa.(EVES, 1995, p.418).

alcançar o ponto médio da distância AB, e o ponto médio da distância remanescente e assim por diante. Conclusão: Sobrarão sempre metades a serem percorridas e, portanto, nunca a distância total AB será percorrida. O corredor nunca alcançaria seu destino. Seus argumentos mostravam que um segmento finito pode ser dividido num número infinito de pequenos segmentos, cada um deles com um comprimento finito.

As distâncias percorridas formam a seguinte seqüência numérica infinita: ½ + ¼ + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ... Tal seqüência é na verdade uma progressão[4] geométrica de termos infinitos e de razão igual a ½.

Para Zenão e os gregos, segundo Borges (1999), qualquer totalidade com um número infinito de termos é, também infinito. Eles raciocinavam que *uma soma com infinitos termos tem por resultado um número infinito*. Os paradoxos de Zenão, qualquer que tenha sido sua motivação, provocou a exclusão dos infinitésimos das discussões gregas, cuja "*concepção discreta do número se opõe a intuição do contínuo geométrico*"(OLIVEIRA, 1990, p.6) e, somente foram compreendidos – os paradoxos, a partir do século XIX, quando os matemáticos criaram o instrumental adequado: os conceitos de função, variável, continuidade e o de limite.

Dada a importância desses paradoxos à compreensão da idéia de movimento, continuaremos a falar deles. Para tanto, utilizar-se-á um pouco da linguagem da Lógica Clássica pelo seu caráter universal.

Idéias básicas dos paradoxos.

(I) Se o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis não há movimento, porém, se há movimento, o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis.

(II) Se o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis, então não há movimento, porém, há movimento, logo, o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis.

Da (I) decorre os paradoxos de "Aquiles e a Tartaruga" e o da "Dicotomia", enquanto que da (II), decorre o da "Flecha" e o do "Estadium".

Consideremos as proposições p e q para (I) e (II).

p: O espaço e o tempo são infinitamente divisíveis.

q: Há movimento.

Assim, para (I) teremos: $[(p \rightarrow \sim q) \wedge q] \Rightarrow \sim p$

(4) São grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais. "As seqüências mais simples são conhecidas desde o tempo dos gregos, onde cada termo resulta do precedente por uma operação simples. Distinguem-se dois tipos de progressões: aritmética e geométrica" (CATUNDA, 1972, p.158). Vale ressaltar que os matemáticos, com o conceito de limite – desenvolvido no séc XIX, mostraram que o limite da progressão geométrica acima é igual a 1 e portanto, pode-se percorrer a distância AB.

Traduzindo: Se o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis, então não há movimento. Há movimento.

Logo, o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis.

Agora, para (II): $[(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge q] \Rightarrow p$

Traduzindo: Se o espaço e o tempo não são infinitamente divisíveis, então não há movimento. Há movimento.

Logo, o espaço e o tempo são infinitamente divisíveis.

Enfim, admitindo-se qualquer das suposições (I) ou (II), o movimento é impossível. Mas é claro, que mesmo com todos esses argumentos sobre a impossibilidade do movimento, Zenão não quis negar o movimento físico, e sim apontar a sua problemática. Logo, quando o filósofo Diógenes pensou ter refutado os paradoxos de Zenão ao levantar-se e sair andando "demonstrando" assim, a existência do movimento – estava apenas, sendo engraçado. Zenão sabia muito bem que as pessoas em geral eram capazes de se mover. Na verdade, não se pode enfrentar os paradoxos de Zenão como o fez Diógenes, recorrendo ao movimento físico. O cerne da argumentação zenoniana foi resolvido por Cantor[5] ao mostrar a equivalência entre a totalidade infinita e qualquer uma de suas partes.

Cada época, com seu desenvolvimento característico, apresentou e apresenta problemas que desafiam as mentes curiosas. Um destes problemas, foi o estudo do movimento. Então, qual é a essência do movimento? É bom lembrar que "*o movimento de que estamos tratando é tão somente uma correspondência entre posição e tempo.*"(BORGES, 1999, p.4). Se desejarmos fixar a posição de um certo móvel, em determinado instante da sua trajetória, ele já não se encontra mais, pois entre dois instantes, por mais próximos que sejam um do outro, o móvel percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos. A cada instante, o móvel está e não está em determinado ponto, pois entre ponto e ponto, por mais próximos, existem uma infinidade de pontos. É como **ser** e **não ser**. Aliás, pode-se compreender o **ser** como repouso – "estou aqui, estou aqui" e o **não ser** é o movimento como um todo percebido pelos nossos sentidos (senso comum) - "estou aqui, estou ali" – "estou aqui, estou ali". Reconhecer essa questão do ser e do não ser, do está e do não está em determinado ponto, é considerar que o mundo passa a se colocar novos problemas e, não é

(5) Georg Cantor (1845-1918) estudou o infinito e foi o criador da Teoria dos Conjuntos no final do séc. XIX. Sua teoria retomou uma idéia antiga e simples da humanidade: a idéia de correspondência. Através dessa idéia mostrou que para totalidades infinitas, o todo pode ser equivalente a uma de suas partes. Vejamos: seja a totalidade dos números inteiros positivos, que é infinita, contém números pares e ímpares. Retirando-se os números ímpares, pode-se pensar que o resto é a metade do que se tinha no início. Mas continuam a existir tantos números pares quantos eram os números inicialmente, ou seja, para cada número par há um número correspondente inteiro positivo.

possível compreender o movimento como uma sucessão infinita de estados de repouso.

Portanto, para compreender o movimento, faz-se necessário, novos conceitos, que segundo Caraça (1989, p. 218), "*deve ser de natureza a permitir que se dê conta da infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer; de natureza a permitir-nos trabalhar, não só com estados determinados, mas com a infinidade das possibilidades entre dois estados*." De fato, também é preciso desenvolver novas atitudes, renunciar à idéias dominantes – cristalizadas, a exemplo da idéia de velocidade. A velocidade não é mais discutida da perspectiva de Aristóteles – a força não é mais proporcional à velocidade (base da Física de Aristóteles) e sim, proporcional à aceleração (base da Física de Newton).

Outro exemplo de quebra de hegemonia a desencadear novas atitudes foi a derrocada do movimento circular uniforme, que embora de acordo com a mentalidade finitista dos gregos antigos, recebeu contestações pela primeira vez nas leis de Kepler. Esse "movimento perfeito" que dominou as Cosmologias de Platão a Copérnico, passa a ser observado como um mero movimento, não mais importante do que outros. Assim, ao pensar em *"movimento como a solidariedade do ser e do não ser, da permanência e da impermanência*" (BORGES, 2002b, p.2), fica a idéia de movimento bem caracterizada no conceito de variável[6].

Deve-se lembrar, porém, que o grande matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C), tratou de forma intuitiva/incipiente das primeiras noções dos infinitésimos em alguns dos seus inúmeros trabalhos. Suas idéias suscitaram inúmeros problemas que contém os germens de que hoje conhecemos como cálculo diferencial e integral (AABOE, 1984; BORGES, 2002b). Arquimedes pode ser considerado o precursor das idéias do cálculo diferencial e integral, como também criador de uma matemática que é o prolongamento da geometria euclidiana.

Arquimedes mostrou, por exemplo, através do método da exaustão[7], cuja idéia é "espremer" a quantidade que se procura, quer seja um volume, ou uma superfície entre duas outras que podem ser calculadas (é indispensável que essas duas grandezas possam se aproximar uma da outra indefinidamente), que a área de um segmento parabólico é equivalente a dois terços (2/3) da área de um retângulo de mesma base e altura; que o volume

(6) Uma variável é algo que pode assumir todos os valores de um determinado conjunto – ora um valor, ora outro valor. Então, seja um conjunto qualquer E finito ou infinito, e seja x o seu representante, isto é, x é o símbolo (variável) representativo do conjunto E. Ele representa, assim, a vida coletiva de um conjunto.

(7) É creditado por muitos historiadores ao matemático grego Eudoxo (408 – 355 a.C), ligado à academia de Platão, as idéias fundamentais desse método. Tal método parte do pressuposto de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, e cujo enunciado consiste em: *Se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie*. No século XVIII, o emprego de coordenadas permitiu uma ampla generalização do método de exaustão.

de uma esfera é dois terços(2/3) do volume do cilindro circunscrito, além de outros exemplos. Mas pode-se empregar esse método na prova de proposições tais como: i) a razão entre cones e cilindros de mesma altura é igual à razão entre suas bases; ii) qualquer cone é a terça parte do cilindro que tem a mesma base e igual altura.

Sem dúvida, o cálculo de áreas e volumes de figuras limitadas por curvas e superfícies é um dos problemas que tratam dos infinitésimos, como também, obter a velocidade e a aceleração em qualquer instante, dado tempo e espaço; obter a tangente de uma curva e estudar máximos e mínimos de uma função.

É importante perceber que em certas épocas do desenvolvimento dos infinitésimos houve ausência de rigor, pois uma das suas característica consistia ora ser considerado uma quantidade diferente de zero e ora ser igual a zero. Este processo de mudar ligeiramente a variável e considerar valores vizinho se configura na essência da análise infinitesimal. Um exemplo característico dessa situação é o método desenvolvido por Fermat por volta de 1638, que em termos de notação cartesiana, segundo Boyer, consiste em: Seja a ordenada da curva dada por $2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$. Então, num ponto vizinho, de abscissa x + E (o valor de E deve ser indefinidamente pequeno), a ordenada será $2(x + E)^3 - 5(x + E)^2 + 4(x + E) - 7$. Fermat argumentava que num ponto de máximo ou de mínimo a variação da ordenada é desprezível desde que a variação E na abscissa seja pequena. Do desenvolvimento dos termos, obtém-se como resultado $(6x^2 - 10x + 4)E + (6x - 5)E^2 + 2E^3 = 0$; então, ao dividi-lo por E e depois fazer E igual a zero nos termos restantes, obtém-se a equação $6x^2 - 10x + 4 = 0$. Ao resolver essa equação encontra-se 1 e 1/3 como abscissas dos *pontos críticos*[8] da curva, (BOYER, 1992, p.15). A preocupação dos matemáticos eram com os resultados obtidos pela aplicação dos infinitésimos, o que os levava a definir vagamente seus termos e a usar seus métodos livremente. Não é difícil concluir que usar Δx ou h onde Fermat escrevia E é irrelevante. Fermat não explica porque faz E igual a zero e seus sucessores também não explicam. Esta falta de explicação perdurou até o abandono dos infinitésimos por Cauchy, Bolzano e Weierstrass, como também, até os trabalhos de Abraham Robinson.

Contudo, em relação aos conceitos matemáticos, podemos dizer que

> *Por muito tempo a maioria dos conceitos de que se ocupavam os matemáticos eram mal definidos; julgavam conhecê-los, porque os representavam com os sentidos ou com a imaginação, mas deles só tinham uma imagem grosseira, e não uma idéia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse atuar*. (POINCARÉ, 1995, p.17).

(8) Pontos onde a equação se anula.

Em meados do séc XVII já eram razoavelmente bem conhecidas pelos matemáticos as regras necessárias para lidar com problemas de área, taxa de variação, máximos e tangentes. Parafraseando Struik (1989), o problema da tangente consistia na procura de métodos para encontrar a tangente a uma dada curva C em um de seus pontos P, com duas tendências bem marcadas: geométrica (Cavalieri, Torricelli, Barrow, Huygens – preferiam o método grego de raciocínio geométrico, sem se preocuparem muito com o seu rigor) e algébrica (Fermat, Descartes, John Wallis). Fermat, em 1638 descobriu um método para encontrar máximos e mínimos alterando um pouco a variável numa equação algébrica simples e deixando a alteração desaparecer – é o processo que hoje chamamos de "diferenciação". Esse método foi generalizado em 1658 por Johannes Hudde para curvas algébricas mais gerais. Mas, apesar dos matemáticos já determinarem tangentes, volumes e centroídes[9] nesta época, a relação entre integral e diferenciação, como problemas inversos um do outro só foi explicado em 1670 por Barrow numa forma geométrica difícil.

A época reunia as condições para se constituir, a partir da análise infinitesimal, o que hoje conhecemos como cálculo. A idéia predominante era a idéia do movimento e, conseqüentemente, a da ação, a da variabilidade. Transformação, dependência, variável: onde encontrar o instrumento matemático adequado que não somente refletisse essas idéias, mas que as tornassem operacionalizáveis. Na verdade, "*as técnicas estavam à mão, o que faltava era um senso de universalidade das regras*" (BOYER,1992, p.17), pois

> *Cada problema exigia uma abordagem diferente e o sucesso dependia da engenhosidade geométrica, habilidades com a álgebra e uma boa dose de sorte. Era preciso estabelecer procedimentos gerais e sistemáticos que permitisse resolver com eficácia e eficiência os problemas.* (MAOR, 2003, p.95).

Muitos foram os fatores, de certa forma externos à Matemática, produzidos pelos movimentos (relações) da sociedade que contribuíram para o desenvolvimento dos infinitésimos. A inquietação dos gregos sobre o infinito proporcionou discussões filosóficas calorosas; o liberalismo de Looke que proporcionou à burguesia a base teórica para as mudanças políticas e econômicas; a exploração marítima já nos séculos XV e XVI que tinha por objetivo não deixar nenhum canto do "mundo" sem ser visitado; o sistema heliocêntrico de Copérnico que mexeu na forma de pensar vigente; Kepler que com suas leis sobre o movimento planetário eliminou, de uma vez por todas, a concepção grega de um imaginário geocêntrico; a mecânica celeste do séc. XVIII.; e outras.

---

(9) Ponto central de uma figura.

O aparecimento do livro de Bonaventura Cavalieri, discípulo de Galileu, em 1635, intitulado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,* segundo Struik (1989, p.167), "*estimulou um número considerável de matemáticos, em diferentes países, a estudar problemas que envolviam infinitesimais.*" Para o historiador Eves (1995), as raízes deste livro remontam a Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c 287-212 a.C.), mas a sua motivação talvez esteja nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes. Eves também chama atenção para o caráter prolixo e pouco claro da obra, quando diz que é difícil descobrir o que Cavalieri entendia por "indivisível".

> *Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas*. (EVES, 1995, p.425).

Porém Cavalieri argumentava que fazendo deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contato contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Procedimento análogo vale para os sólidos.

Para Boyer (1974), no método de Cavalieri não havia nenhum processo de aproximação contínua, nem omissão de termos, pois ele usava uma estreita correspondência um a um dos elementos em duas configurações. Nenhum elemento era descartado, qualquer que fosse a dimensão. E,

> *Os indivisíveis, ou infinitésimos fixos, eram aplicados com tanto êxito a problemas de mensuração de áreas e volumes, que o postulado fundamental, que geralmente recebe o nome de "teorema de Cavalieri", permanece intacto nos textos elementares até os dias de hoje*: *Se dois sólidos (ou regiões planas) têm alturas iguais, e se secções paralelas às bases e a distâncias iguais delas estão sempre numa dada razão, então os volumes (ou áreas) dos sólidos (ou regiões) também estão nessa mesma razão.* (BOYER, 1992, p.11).

Cavalieri também, embora não tenha sido o único a utilizar a idéia dos infinitésimos, pois a mesma estavam sendo amplamente usada por pessoas que estavam a par dos pensamentos matemáticos da época, a aplicou a uma variedade de novos problemas de forma engenhosa. (BOYER, 1992).

Observa-se porém, que apesar da crítica que o historiador Howard Eves faz ao caráter pouco claro dos indivisíveis, reconhece que as idéias de Cavalierie "*representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode* *facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno*"(EVES, 1995, p.426). Tanto é assim, que a fecundidade das suas idéias têm sido reconhecida por matemáticos contemporâneos. Um exemplo desse reconhecimento aparece em alguns trabalhos do renomado matemático brasileiro Elon Lages Lima, autor de diversos livros dedicados ao ensino das idéias matemáticas nos níveis superior e médio.

Em seu livro *Medidas e Forma em Geometria* de 1991, E. Lages mostra o valor prático do princípio de Cavalieri para calcular o volume dos sólidos e o enuncia da seguinte forma: *Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então vol (A) = vol (B).*

Apesar de não demonstrá-lo pois é um teorema[10] , Lima (1991a, p.71) o aceita como verdadeiro e diz que é plausível observar que "*duas fatias muito finas, de mesma altura, cujas bases têm a mesma área, têm aproximadamente o mesmo volume.*" Na verdade, pode-se dizer que o volume de cada sólido é a soma dessas fatias, ou seja, o princípio reduz o cálculo de volumes ao cálculo de área. E, para Lima (1991a, p.88-89), "*o método mais eficiente e geral que se usa hoje em dia para obter as fórmulas do volume e da área dos chamados "três corpos redondos"(cilindro, cone e esfera) é o cálculo infinitesimal, com a integração de funções elementares.*"

Outro livro importante escrito neste período foi *Aritmética infinitorum* (1655), de John Wallis. Para Eves (1995), Wallis foi um dos matemáticos mais capazes e originais de seu tempo. Foi um dos primeiros a discutir as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone e, seu livro, apesar de algumas imperfeições lógicas, manteve-se como um tratado – modelo por muitos anos. Nesse livro aritmetizou a *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri e, segundo Struik (1989, p.170), "*os seus métodos de relacionação com processos infinitários eram muitas vezes grosseiros, mas ele obteve novos resultados. Introduziu séries infinitas e produtos infinitos e usou com grande arrojo expoentes imaginários, negativos e fracionários.*"

É evidente que a questão sobre o que são os infinitésimos continua; então podemos perguntar: como esta idéia foi estudada/compreendida a partir do século XVII, com a invenção do cálculo que é considerada uma invenção singular na Matemática, mas que nos remete aos gregos para compreender o seu desenvolvimento ao longo dos tempos. As idéias que fundamentam o cálculo foram discutidas por inúmeros matemáticos, mas o reconhecimento aos trabalhos de Newton em 1665-66 e depois, independentemente, Leibniz

(10) Proposição que deve ser provada para ser aceita como verdade em uma determinada teoria.

em 1673-76, deve-se ao pioneirismo (deles) por terem percebido que faltava uma generalização para as regras já existentes; então desenvolveram um método geral para se encontrar a taxa de mudança de praticamente qualquer função. Assim, Newton e Leibniz serão sempre mencionados juntos como inventores do cálculo. Também, pode-se afirmar que com o cálculo se iniciou a *domesticação* do infinito, idéia que sempre fascinou os sábios da Grécia Antiga.

Para reforçar o pioneirismo de Newton e Leibniz, vejamos o que disse o matemático e historiador holandês Struik, que trabalhou em Göttingen e no MIT, nos Estados Unidos:

> *Um método geral de diferenciação e integração, derivado da compreensão de que um processo é inverso do outro, somente pôde ser descoberto por homens que dominaram o método geométrico dos Gregos e de Cavalieri, assim como os métodos algébricos de Descartes e Wallis. Estes homens só poderiam ter aparecido depois de 1660, e na realidade surgiram com as figuras de Newton e Leibniz.* (STRUIK, 1989, p.177*).*

Newton não usava a expressão "calculo diferencial e integral" nos seus trabalhos, tal expressão é creditada a Leibniz por ter inventado um sistema de notação eficiente para o desenvolvimento do cálculo. Newton, porém, preferia chamar sua invenção de "métodos dos fluxões". O que chamamos hoje de "quantidades variáveis" ele chamava de "fluente". Para Maor (2003, p. 103), professor de História da Matemática na Loyola University, em Chicago, *"a escolha desta palavra revela o funcionamento de sua mente. Newton era tanto físico quanto matemático. Sua visão de mundo era dinâmica, onde tudo se encontrava num estado contínuo de movimento, causado por forças conhecidas.*"

A invenção dos "fluxões" por Newton, segundo Struik (1989), está ligada aos seus estudos sobre séries infinitas através da Aritmética de Wallis. Esse estudo o ajudou a estender o teorema do binômio[11] a expoentes fracionários e negativos e à descoberta das séries binomiais. Com as séries binomiais estabeleceu a teoria dos "fluxões" para todas as funções – algébricas ou transcendentes. Quanto a notação, Newton usava letras ponteadas ($v^{\bullet}$,$x^{\bullet}$,$y^{\bullet}$,$z^{\bullet}$) para representar os "fluxões" e letras sem pontos (v,x,y,z) para os "fluentes".

Desejo observar que as idéias sobre os infinitésimos aparecem nos fundamentos do cálculo infinitesimal desenvolvido por Newton e Leibniz.

Os infinitésimos de Newton eram chamados "momentos de fluxões" e eram representados por $v^{\bullet}0$, $x^{\bullet}0$, $y^{\bullet}0$, $z^{\bullet}0$, sendo 0 (zero) "uma quantidade infinitamente pequena". Pode-se, segundo Newton, em qualquer problema, desprezar os termos que aparecem

(11) O teorema binomial para potências inteiras era conhecido na Europa pelo menos desde 1527, (BOYER, 1974, p.281). Mas coube a Newton fornecer as expansões como parte do seu método de séries infinitas por volta de 1664-65.

multiplicados por potências de 0 (zero) iguais a ou maiores que 2 e obter assim uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus fluxos $x^{\bullet}$ e $y^{\bullet}$. Sabemos que Newton deu vários exemplos de como funciona o "método do fluxões". Seu ponto de partida foi considerar duas variáveis que se relacionam através de uma equação.

Vejamos como ele procede para encontrar o "fluxo", isto é, a derivada de $y = x^2$. A quantidade x era considerada como uma quantidade "fluente", variando com o tempo. Dizia Newton: *Deixemos que x flua por um tempo pequeno, de maneira que se chega a tornar-se* $x + dx$, *onde dx é um acréscimo evanescente ou infinitesimal de x. Temos então:* $(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2$, *sendo o acréscimo de y igual a* $2xdx + (dx)^2$. *A razão entre os acréscimos ou incrementos é:* $\dfrac{2xdx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx$. *Deixando dx desaparecer, a razão se torna 2x*.

Logo a derivada de $y = x^2$ é $2x$.

Newton afirmava que a razão entre os fluxos $y^{\bullet}/x^{\bullet}$ é a mesma que há entre os incrementos ou acréscimos evanescentes. Logo $y^{\bullet}/x^{\bullet} = 2x$, ou seja, $y = 2xx^{\bullet}$.

Outro exemplo é o da equação cúbica $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ que nos permite expressar a taxa de variação de x em termos da taxa de variação de y e vice-versa, para cada ponto P(xy) da curva.

Dada a equação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, substituindo x por $x + x^{\bullet}0$ e y por $y + y^{\bullet}0$, obter-se-á:

$$x^3 + 3x^2\, x^{\bullet}0 + 3x(x^{\bullet}0)^2 + (x^{\bullet}0)^3 - ax^2 - 2ax\, x^{\bullet}0 - a(x^{\bullet}0)^2 + axy + ax\, y^{\bullet}0 + ay\, x^{\bullet}0 +$$
$$a\, x^{\bullet}0\, y^{\bullet}0 - y^3 - 3y^2\, y^{\bullet}0 - 3y(y^{\bullet}0)^2 - (y^{\bullet}0)^3 = 0$$

Agora, por hipótese, $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, portanto , eliminando os termos remanescentes (restantes) divididos por "0", ficará:

$$3x^2x^{\bullet} + 3x\, x^{\bullet}x^{\bullet}0 + x^{\bullet 3}00 - 2ax\, x^{\bullet} - a\, x^{\bullet}x^{\bullet}0 + ax^{\bullet}y + ax\, y^{\bullet} - 3\, y^2y^{\bullet} + a\, x^{\bullet}y^{\bullet}0 -$$
$$3yy^{\bullet}y^{\bullet}0 - y^{\bullet 3}00 = 0$$

Mas visto que se supõe "0" infinitamente pequeno, para que possa representar momentos de quantidades, os termos que estão multiplicados por ele são insignificantes em relação aos outros; portanto, rejeito-os e fica:

$$3x^2\, x^{\bullet} - 2axx^{\bullet} + ax^{\bullet}y + axy^{\bullet} - 3y^2y^{\bullet} = 0 , \quad \text{donde } \frac{y^{\bullet}}{x^{\bullet}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Nesse exemplo, segundo Struik (1989), Newton mostra que pensava nas derivadas como sendo velocidades, mas também identifica uma certa imprecisão no seu modo de expressão. Os símbolos “0” são zeros? São infinitesimais? Ou são números finitos? Também, tal posição está longe de ser clara. Newton, porém, tentou esclarecê-la em sua obra *Principia* por reverter as primeiras idéias rudes sobre os incrementos “infinitamente pequenos” em “momentos” e as dificuldades que se originavam da compreensão, melhor, da falta de compreensão da teoria dos “fluxões”, conduziram a muitas confusões e a uma crítica severa do bispo Berkeley.

Mas não é só isso; com a invenção do cálculo resolveram-se problemas gerais como: *Dada uma curva e um ponto P sobre ela, define-se a inclinação da curva e da reta tangente à curva nesse ponto.*

Leibniz um dos inventores do cálculo em 1675, já tinha em 1677 um sistema bem desenvolvido e funcional. Suas idéias, desde o começo se diferenciam das de Newton. As idéias de Newton se baseavam na Física – ele considerava um fluxão como uma taxa de mudança, ou velocidade, de um ponto cujo movimento contínuo gerava a curva $y = f(x)$. Enquanto que as idéias de Leibniz estavam mais próximas da Filosofia, do que da Física. Suas idéias moldaram-se num mundo muito mais abstrato, pois Leibniz pensava em termos de diferencias, pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y.

Vejamos como Leibniz resolveu o problema geral do cálculo diferencial.

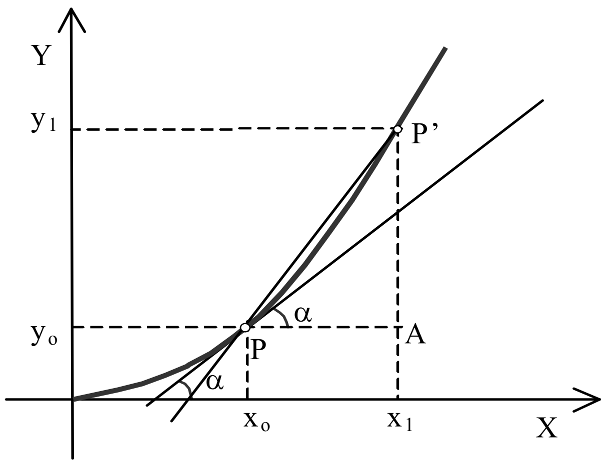


Fig. 1.1

Seja P’ um ponto sobre a curva, muito perto de P. Dessa forma, a secante PP’ está bem próxima da reta tangente em P. Isto posto, segue o raciocínio: Seja P’ um ponto “infinitamente próximo” de P. Então a secante PP’ coincide com a reta tangente em P e a inclinação da reta tangente em P é igual à inclinação da secante PP’.

Agora, para calcular a inclinação da secante PP', segundo a observação de que "a secante PP' coincide com a reta tangente em P" precisamos achar a proporção P'A/PA que é a tangente de α e a inclinação da secante PP'.

Logo tg α = tangente da secante = $\dfrac{|P'A|}{|P'A|}$

Leibniz então raciocinava que é igual a diferença "infinitamente pequena" entre y_1 e y_0, denominado-a de "diferencial de y", simbolizado por *dy*, como também a diferença entre x_1 e x_0, denominando-a de "diferencial de x", simbolizado por *dx*.

Resumindo: tg α = tangente da secante = $\dfrac{|y_1 - y_0|}{|x_1 - x_0|} = \dfrac{dy}{dx}$

Como dx e dy são quantidades pequenas, sua relação representa não apenas a inclinação da reta tangente em P, mas também a inclinação do gráfico em P.

A fim de ilustrar a idéia de Leibniz, consideraremos a função $y = x^2$ para calcularmos o quociente daqueles dois "infinitamente pequenos", *dy* e *dx*.

Vejamos: Se x_0 aumenta por uma quantidade dx, o aumento correspondente a y será *dy*. Assim,

$y_1 = x_1^2 = (x_0 + dx)^2 = x_0^2 + 2x_0dx + (dx)^2$ (I)

$y_1 - y_0 = 2x_0dx + (dx)^2$ (II)

Dividindo (II) por $x_1 - x_0 = dx$, teremos

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 2x_0 + dx$ (III)

Suprimento dx à direita de (III), teremos,

$\dfrac{dy}{dx} = 2x_0$ (IV)

Como, nesse caso, a função é sempre derivável, tem-se o resultado final: $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

Tal resultado pode ser generalizado: se $y = x^n$ (onde n pode ser qualquer número), então $\dfrac{dy}{dx} = n.x^{n-1}$.

Porém, embora qualquer estudante de cálculo, hoje em dia, saiba perfeitamente, que o resultado obtido é verdadeiro (BORGES, 2002b), o método adotado apresenta falhas do ponto de vista do rigor, visto que, da expressão (II) para (III) "o infinitamente pequeno" é considerado diferente de zero, enquanto da expressão (III) para (IV) ele é considerado igual a zero, ou seja, *x* ora é diferente de zero, e *dx* ora é igual a zero – o que é uma contradição. Para Borges (2002b), é estranho que Leibniz tão admirador da Lógica não tenha observado uma flagrante violação do *princípio da contradição*[12] da Lógica Clássica ao empregar o método descrito acima.

Aliás, havia um pequeno problema. Se em (I) dx fosse considerado como igual a zero, ter-se-ia:

$y_1 = (x_1)^2 = (x_0 + dx)^2 = (x_0 + 0)^2 = (x_0)^2$ e

$dy = y_1 - y_0 = (x_1)^2 + (x_0)^2 = 0$

donde, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{0}{0}$

um resultado incompreensível naquela época.

Portanto, tanto a explicação de Leibniz quanto a de Newton sobre os fundamentos do cálculo, sofrem da mesma imprecisão, pois, algumas vezes os seus dx, dy são considerados quantidades finitas, outras vezes quantidades menores que qualquer quantidade significativa, porém não nulas e outras vezes nulas.

Devido a isso, devemos lembrar, das considerações que o bispo irlandês George Berkeley (1685 – 1753) fez em 1734 a respeito de uma certa quantidade infinitesimal ser considerada ora como não-nula, ora como nula, em um contundente panfleto que escreveu intitulado: *o analista, ou discurso dirigido a um matemático infiel, donde são examinados se os objetos, princípios e inferências da análise matemática estão formulados de maneira mais clara, ou deduzidos de maneiras mais evidente que os mistérios religiosos e os assuntos de fé*.

Berkeley que além de sacerdote era conhecido como filósofo, denominou as quantidades "infinitamente pequenas" de "fantasmas das quantidades desaparecidas" e se referia a elas como: "*não são nem quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nem nada.*" (BERKELEY, apud DANTZIG, 1970, p.124). Mas quanto ao êxito obtido pelas aplicações do Cálculo, segundo Borges (2002b), Berkeley o explicava por meio de uma *compensação de erros* [13], implícita na aplicação das regras do cálculo: inicialmente fala-se numa estranha "coincidência" entre a secante PP' com a reta tangente em P, considerando a inclinação da reta tangente igual à inclinação da secante PP'; em seguida, no cálculo da razão dy/dx, é introduzido novo erro, pois dx ora é considerado diferente de zero ora é considerado igual a zero. Esses erros, segundo Berkeley, são compensados um com o outro, logo o Cálculo não pode "chamar-se de Ciência, pois se procede às cegas e se chega a

(12) O que é, enquanto é, não pode não ser – que na sua aplicação à Lógica Matemática recebe a seguinte formulação: Uma proposição não pode ser verdadeira ou falsa ao mesmo tempo.

(13) A alusão à compensação de erros é bem conhecida na história da ciência. Um dos exemplos mais citados refere-se a Kepler com a sua Segunda lei: "*o raio-vetor que liga um planeta ao sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais*" (EVES, 1995, p.351).

verdade não sabendo como nem por quais meios". Finalmente, Berkeley decreta a sua sentença: - *quem acredita nesse cálculo diferencial misterioso, não tem razão nenhuma para não acreditar em Deus...* .

As críticas de Berkeley embora negativas, não são apenas contundentes; elas são procedentes, pois,

> *Observava que ao achar sejam fluxos sejam razões de diferenciais, os matemáticos primeiro assumem que são dados incrementos às variáveis e depois retiram esses incrementos supondo que são nulos. O cálculo, tal como era explicado então parecia [...] ser apenas uma compensação de erros*. (BOYER, 1974, p.316).

É de causar admiração que tenham sido levantadas primeiro por um leigo (no campo da Matemática), por se tratar de uma questão importante ligada aos fundamentos da Matemática. Na verdade, as críticas "*eram incapazes de fornecer uma fundamentação rigorosa do Cálculo, mas inspiraram trabalhos construtivos posteriores.*"(STRUIK, 1989, p.186).

É evidente que apesar das contradições encontradas nos fundamentos do cálculo - existam debates; o debate sobre os infinitesimais visa, sobretudo, a validação do cálculo.

Por algum tempo, o conhecimento do cálculo ficou restrito a um grupo pequeno de matemáticos: o círculo de Newton na Inglaterra, e Leibniz e os irmãos Bernoulli no Continente. Os Bernoullis o propagaram por toda a Europa, ensinando-o, particularmente, a vários matemáticos. Entre eles o francês Guillaume François Antoine L'Hospital (1661 – 1704), que fez um acordo singular (financeiro) com seu professor particular Johann Bernoulli (1667 – 1748) para publicar as lições que recebera. Foi o primeiro livro-texto sobre cálculo: *Analyse des infiniment pettis*[14] (1696). Outros matemáticos do Continente o seguiram e logo o cálculo era o tópico dominante na Matemática do século XVIII. Jakob Bernoulli (1654 – 1705), Leonhard Euler (1707 – 1783), Joseph L. Lagrange (1736 – 1813), Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827). E, a maior parte do cálculo que se vê hoje nos cursos introdutórios de cálculo, ou na graduação, junto com tópicos mais avançados, como o cálculo das variações, foram devidamente estabelecidos por volta de 1700. (BOYER, 1992; EVES, 1995; MAOR, 2003; STRUIK, 1989).

Para o historiador Eves (1995, p.462):

(14) Nesse livro encontra-se a chamada regra de L'Hospital, para determinar o limite de uma fração cujo numerador e cujo denominador tendem simultaneamente para zero. Mas após a morte de L'Hospital em 1704, Johann Bernoulli reivindicou publicamente o crédito pela regra. Na verdade, os dois tinham assinado um contrato permitindo a L'Hospital, em troca do dinheiro pago pelas aulas de Johann , o direito de usar as descobertas do professor, se assim o quisesse. O livro de L'Hospital tornou-se popular e contribuiu para a difusão do cálculo nos círculos intelectuais, (MAOR, 2003).
Havia um grupo na Académie des Sciences, especialmente logo depois de 1700, que questionava a validade dos novos métodos infinitesimais tais como eram apresentadas por L'Hospital. (BOYER, 1974).

> *O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostra notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em matemática da época, resultando daí uma profusão de artigos pouco preocupados com o estudo bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram freqüentemente justificados com o argumento de que eles funcionavam. E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa.*

Sobre a funcionalidade dos métodos de cálculo, vale lembrar das palavras do grande matemático Jean Le Rond D'Alembert (1717 – 1783) ao praticar o cálculo – "*avante que a fé vos guiará*?". Entretanto, enquanto Newton e Leibniz se apoiavam em "quantidades infinitamente pequenas", D'Alembert[15] considera o acréscimo Δx um "incremento finito qualquer". De qualquer modo, essa hipótese assegura o emprego das regras do cálculo, sem maiores preocupações, e o emprego das regras operatórias da álgebra ordinária, em particular, do binômio de Newton.

Observemos o procedimento de D'Alembert.

Seja a função $y = x^3$. Ele fez $x_1 = x_0 + \Delta x$, ao considerar Δx um "acréscimo finito arbitrário".

Assim:

$y_1 = (x_1)^3 = (x_0 + \Delta x)^3 = (x_0)^3 + 3(x_0)^2 . \Delta x + 3(x_0).(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, e

$\Delta y = y_1 - y_0 = [(x_0)^3 + 3(x_0)^2 . \Delta x + 3(x_0).(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - (x_0)^3 =$

$= 3(x_0)^2 . \Delta x + 3(x_0).(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3(x_0)^2 + 3(x_0). \Delta x + (\Delta x)^2 \quad \text{(I)}$$

Efetuando em (I) a substituição $x_1 = x_0$, isto é, $\Delta x = x_1 - x_0 = 0$, vem: $\Delta x = y_1 - y_0 = = (x_1)^3 - (x_0)^3 = 0$.

Logo, $0/0 = 3(x_0)^2$. Tanto D'Alembert quanto Euler, substituem 0/0 por dy/dx chegando ao resultado correto: $dy/dx= 3(x_0)^2$.

Então, a questão é saber se é possível a divisão por zero, embora saibamos tratar-se de uma questão contraditória. Mas então, por que Euler e D'Alembert tratam dessa questão nos fundamentos do cálculo? Não estariam usando idéias contraditórias?

---

(15) D'Alembert empenhou-se tanto em provar o teorema fundamental da álgebra, (que uma equação polinomial completa f(x) = 0 de grau n ≥1 tem pelo menos uma raiz complexa) que o teorema é conhecido na França como teorema de D'Alembert. (EVES, 1995).

D'Alembert era um tanto cauteloso e ao mesmo tempo ousado em relação ao desenvolvimento da Matemática, segundo Boyer (1974). Ele fazia objeções a Euler por esse assumir que diferenciais são símbolos para quantidades que são zero mas no entanto são qualitativamente diferentes, mas não se envolvera nas dificuldades sutis que apareceram mostrando ser uma atitude ingênua a restrição feita por Euler a funções bem comportadas, (BOYER, 1974). Por outro lado, vejamos o que escreveu em 1755, o grande matemático L. Euler em seu livro *CálculoDiferencial*, sobre a divisão por zero: *"Existe uma infinidade de ordens de grandezas infinitamente pequenas, que embora sejam todas iguais a zero, devem ser distinguidas entre si, quando olhamos para a sua proporção mútua, o que se explica por uma razão geométrica*" (apud BORGES, 2002c, p.1).

Para Borges (2002c) não deixa de ser interessante esse trecho de Euler, pois ele fala sobre grandezas infinitamente pequenas todas iguais a zero, porém, diferentes entre si, e que, aritmeticamente não se pode dividir por zero, porém, geometricamente, dar-se um *jeitinho* – justificativa interessante, mas podemos observar que o princípio da não contradição é arranhado – "*todas iguais a zero, porém, diferentes entre si*". Todavia, os resultados de Euler, de D'Alembert e de outros matemáticos do século XVIII foram assimilados e mais tarde desenvolvidos de um ponto de vista consistente.

Euler, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, escreveu um extraordinário número de livros e artigos. O livro *Introductio in analysis infinitorun*, obra em dois volumes publicada em 1748 é considerada o alicerce da moderna análise matemática. Para Boyer (1974), Euler dominou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ensino mais geral da Matemática; a partir daí é chamado "análise" - o estudo de processo infinito. Foi um dos primeiros matemáticos a desenvolver a teoria das frações contínuas e contribuiu notavelmente para os campos da geometria diferencial, cálculo de diferenças finitas e cálculo de variações, além de enriquecer a teoria dos números. Mas quero registrar algumas contribuições no nível da Matemática elementar, referente a notação, interessantes ao nível médio de ensino: *f(x)* para funções; *e* para a base dos logaritmos naturais; *a, b, c* para os lados do triângulo ABC; *s* para o semiperímetro do triângulo ABC; *r* para o inraio do triângulo ABC; *R* para o circunraio do triângulo ABC; *Σ* para somatório; *i* para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$. Também se deve a Euler a notabilíssima fórmula $e^{ix} = cos + i\ sen\ x$, que para x = π, se transforma em $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da Matemática. (EVES, 1995).

Joseph Louis Lagrange(1736 – 1813), outro grande matemático do século XVII, publicou alguns livros sobre funções numa tentativa de dar uma fundamentação sólida ao cálculo, pela sua redução à álgebra. Rejeitava a teoria dos limites indicada por Newton e formulada por D'Alembert por não entender bem o que acontecia quando $\Delta y/\Delta x$ atingia o limite. Seu método era diferente do método dos outros matemáticos da época por postular que "*cada função pode ser expandida em série de potências*". Começou com as séries de Taylor de forma bastante ingênua. Cauchy, ao criticar a postulação feita por Lagrange, na Escola Politécnica de Paris, chama atenção, exemplificando, através da função exp (-1/x) que basta observar todas as derivadas da função no ponto x = 0, para mostrar que ela não admite desenvolvimento em série de Taylor nesse ponto. Mas embora seu método algébrico tenha se mostrado insatisfatório para fundamentar o cálculo, o surgimento da "teoria de funções de uma variável real" com aplicações a uma grande variedade de problemas na álgebra e na geometria, foi considerado um passo a frente e o grande uso do cálculo das variações tornou possível a unificação de vários princípios de estatística e dinâmica. (BORGES, 2002c; STRUIK, 1989).

Sabe-se que houve muito entusiasmo pelos resultados do cálculo na segunda metade do século XVIII, mas também muita confusão quanto a seus princípios fundamentais. Segundo Boyer (1974), nenhum dos métodos em voga, quer os fluxos de Newton, quer os diferenciais de Leibniz ou os limites de D'Alembert, parecia satisfatório, (p.354). Devido a esta falta de clareza e a interpretações conflitantes, Lazare Carnot, o organizador da vitória na Revolução Francesa, que também se preocupou com a questão dos infinitesimais, disse:

> *Aquele método tinha o grande inconveniente de considerar as quantidades no estado em que deixam, por assim dizer, de ser quantidades, porque, embora possamos sempre conceber bem a razão de duas quantidades, desde que permaneçam finitas, essa razão não oferece ao espírito idéias claras e precisas logo que os seus termos se tornem, um e outro, nulos ao mesmo tempo. (CARNOT, apud STRUIK, 1989, p.217).*

Por isso, tentou mostrar "*em que verdadeiro espírito*" consistia a análise infinitesimal. Concluiu, porém, que "*os verdadeiros princípios metafísicos*" são "*os princípios da compensação dos erros*". Argumentava que os infinitésimos são *quantités inappréciables* que, como os números imaginários são introduzidos somente para facilitar a computação, e são eliminados quando se chega ao resultado final. Observara que "*equações imperfeitas*" se tornam "*perfeitamente exatas*", no cálculo, pela eliminação de quantidades tais como os infinitésimos de ordem superior, cuja presença causa erros. Quanto à questão de que quantidades em desaparecimento ou são ou não são zero, respondia que "*as quantidades chamadas infinitamente pequenas não são simplesmente quaisquer quantidades nulas, mas* *sim quantidades nulas designadas por uma lei de continuidade que determina a relação"* (CARNOT, apud BOYER, 1974, p.354). Esse argumento de Carnot lembra fortemente Leibniz. (BOYER, 1974; OLIVEIRA, 1994; STRUIK, 1989).

Para Carnot os diversos tratamentos do cálculo eram apenas simplificações do antigo método da exaustão que o reduziam de várias maneiras a um algoritmo conveniente. As suas *Reflexions* tiveram grande popularidade, aparecendo um muitas línguas e edições e apesar de mal sucedida no que se refere a clareza e interpretações dos fundamentos do cálculo, ajudou a fazer com que os matemáticos se sentissem insatisfeitos com os "abomináveis zerinhos" do século XVIII e a fazer surgir a era do rigor no século XIX. (BOYER, 1975).

Sem dúvida, a questão dos infinitésimos demanda maior esclarecimento. Mas, pode-se dizer que somente com os trabalhos de Bolzano, Cauchy e, principalmente Weierstrass, as questões de clareza e interpretação dos fundamentos do cálculo tiveram um enfoque suficientemente rigoroso para serem aceitos pela comunidade matemática.

Bernard Bolzano (1781-1848) foi um padre matemático que nasceu em Praga, na Tchecoslováquia, cuja obra matemática foi desconsiderada por seus contemporâneos, embora seus trabalhos apresentassem a característica do rigor matemático, tão em voga no século XIX. Muitos dos seus trabalhos aguardaram redescoberta, como foi o exemplo da função contínua não diferenciável de 1834, que segundo Eves (1994) só se tornou conhecida – crédito atribuído a Weierstrass, 40 anos mais tarde. Para Bolzano, uma função $f(x)$ é contínua num intervalo se, para qualquer valor de x neste intervalo, a diferença $f(x + \Delta x) - f(x)$ torna-se e permanece menor que qualquer quantidade dada para Δx suficientemente pequeno, quer seja positivo ou negativo, e definiu a derivada[16] da $F(x)$ para qualquer valor de x, como a quantidade $F'(x)$ da qual a razão: $[f(x + \Delta x) - f(x)]/ \Delta x$ está indefinidamente próxima, ou tão próxima quanto queiramos, a medida que Δx se aproxima de zero, quer Δx seja positivo ou negativo.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) foi um grande matemático francês que escreveu tanto sobre matemática pura quanto aplicada. Foi considerado o mais importante analista da primeira metade do século XIX. Professor da École Polytecnique, escreveu de forma elegante e primava pelo rigor (característica fundamental da Matemática no séc. XIX) nos seus trabalhos. Suas contribuições foram inúmeras: pesquisas sobre convergência e divergência de séries infinitas; teoria das funções reais e complexas; equações diferenciais, determinantes, probabilidades e física matemática. Deve-se a Cauchy grande parte da

(16) Trataremos desse conceito posteriormente.

abordagem do cálculo que é tratado nos atuais manuais, com os conceitos básicos de limite e continuidade. Ao dispensar a geometria e os infinitésimos ou velocidades, deu uma definição relativamente precisa de limite: "*Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros.*" (CAUCHY[17], apud BOYER, 1974, p. 380).

Assim terei necessidade de relembrar que enquanto muitos matemáticos desta época pensavam nos infinitésimos como um número fixo muito pequeno, Cauchy, o definia como uma variável, dizendo que "*uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero.*" (CAUCHY[18], apud BOYER, 1974, p.380).

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) é uma exceção à crença de que um grande matemático deve revelar-se cedo. Ensinou durante muito tempo no nível secundário e já com idade próxima aos 40 anos, publicou um artigo sobre funções abelianas no *Journal de Crelle* em 1854. Obtendo boa repercussão e um convite para ser instrutor na Universidade de Berlim. Passados oito anos foi promovido a professor titular. Escreveu muitos artigos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas, equações diferenciais e teoria das funções complexas por meio de séries de potências (uma das contribuições mais conhecidas). Seus trabalhos apresentavam um raciocínio extremamente cuidadoso – rigor weieratrassiano.

Segundo Boyer, a linguagem sem ambiguidades e o simbolismo utilizado por Weierstrass expulsaram dos fundamentos do cálculo a noção de variabilidade e o persistente apelo aos infinitésimos fixos, marcando definidamente a chegada da "idade do rigor", ao substituir "*os antigos artifícios heurísticos e os antigos conceitos intuitivos por precisão lógica crítica*"(BOYER, 1974, p.411).

Ora, tudo parecia mostrar que "*as nefastas quantidades infinitamente pequenas ou infinitesimais*", como se referia aos infinitésimos Richard Courant, um grande autor de excelentes livros de divulgação desta ciência, tinham sido banidos dos fundamentos do cálculo, (BORGES, 2002c). Mas embora o trabalho desses matemáticos que primaram pelo rigor (proceder de acordo com as regras acordadas) tenham garantido grandes avanços aos fundamentos do cálculo, os infinitésimos não foram abandonados/banidos. Segundo Borges, "*não se abandona um instrumento (grandezas infinitamente pequenas) por falta de rigor,*

---

(17) Segundo Boyer (1974, p.380)essa e outras definições se encontram no Vol. III das Oeuvres Complètes de Cauchy (Paris, 1882-1932, 25 vols.)
(18) Ibid.

tendo o seu emprego mostrado grande funcionalidade e simplicidade juntamente com a produção de resultados corretos."(BORGES, 2002c, p.3).

Em outros termos, vejamos o que escreveu Tobias Dantzig em seu livro *Número – a Linguagem da Ciência*, sobre a importância dos infinitésimos.

> *A importância dos processos infinitesimais para as exigências práticas da vida técnica dificilmente pode ser exagerada. Praticamente todas as aplicações da Aritmética à Geometria, Mecânica, Física e até mesmo Estatística envolvem tais processos, direta ou indiretamente. Indiretamente devido ao grande uso que tais ciências fazem dos irracionais e transcendentes; diretamente porque os conceitos mais fundamentais usados em tais ciências não podem ser definidos com qualquer concisão sem tais processos. Expulse-se o processo infinito e a Matemática pura e aplicada será reduzida ao estado em que era conhecida dos pré-pitagóricos. (DANTZIG, 1970, p. 125-126).*

Portanto, o renascimento dos infinitésimos nos mostra que a postura do rigor adotada por Weierstrass e outros nos seus trabalhos não era a única; que é possível posturas, digamos complementares, por não negarem os avanços feitos, e sim, por possibilitarem novos, também com rigor. De fato, os físicos continuaram a usar os infinitésimos apesar dos trabalhos de Weierstrass e Dedekind, o que confirma ser possível outras formas de interpretá-los.

Mas então podemos perguntar: qual é a interpretação dada aos infinitésimos que é aceita pela comunidade matemática atualmente? Para responder a essa questão abordaremos aspectos da teoria não-standard desenvolvida e fundamentada pelo físico, lógico e matemático, o americano Abraham Robinson (1918 – 1974).

A criação da teoria de Robinson aconteceu durante uma visita ao Institute for Advance Study in Princeton, nos anos 1959 – 1960. Durante seus anos de professor de Matemática e Filosofia na Universidade da Califórnia – Los Angeles, de 1962 a 1967, trabalhou forte no desenvolvimento das técnicas não-standard para aplicá-las a diferentes ramos da Matemática. Em 1966 escreveu seu livro Non-standard Analysis e em 1973 a Segunda edição. Também foi professor de Matemática na Universidade de Yale e colaborou com P. Roquette da Universidade de Heidelberg num programa sobre problemas algébricos da teoria dos números e métodos não–standard.

Em meio a tantas explicações para resolver o problema da ambigüidade dos infinitésimos, temos nos trabalhos de Robinson uma sistematização rigorosa que responde às duas questões levantadas pela crítica do bispo Berkeley: i) os infinitésimos existem? ii) firmada sua existência, como operar com eles de maneira consistente? Ao construir um sistema numérico no qual, além dos números reais acrescenta os infinitesimais e os números infinitos - denominado por hiper-reais, Robinson demonstrou que os infinitésimos são números.

Para mostrar a consistência dessa notável criação, vejamos sua definição de infinitésimos: Os infinitésimos são os $\xi \in$ *R cujo módulo é menor que todos os reais positivos. Assim, um número ξ é tido como infinitamente pequeno, ou infinitesimal, se $-a < \xi < a$ para cada número real positivo "a". Então, o único número real que é infinitesimal é o zero e se "a" e "b" são números hiper-reais cuja diferença a – b é infinitesimal, dizemos que "a" é infinitamente próximo de "b" – ($a \approx b$).

Observemos que com a introdução dos novos números no conjunto dos reais, os infinitésimos e os números infinitos, a reta real passa a ser um subconjunto da reta hiper-real. Cada número real é membro dos hiper-reais e os infinitesimais podem ser positivos, negativos e o número real zero. Os símbolos Δx, Δy, ... , e as letras gregas epsilon (ξ) e delta (δ) também são usados para infinitesimais. Exemplificando: Se Δx é infinitesimal, então $x_0 + \Delta x$ é infinitesimal próximo de x_0. Se ξ é infinitesimal positivo, então - ξ será infinitesimal negativo e $1/\xi$ será um número positivo infinito – maior que qualquer número real. Por outro lado, - $1/\xi$ será um número negativo infinito – menor que qualquer número real. Os números hiper-reais que não são números infinitos são chamados de números finitos.

Vejamos a representação da reta hiper-real.

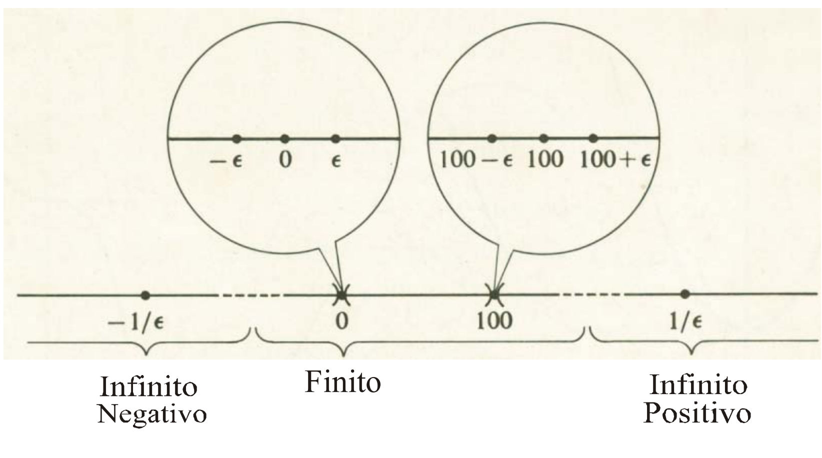


Fig. 1.2

Segundo o norte americano H. Jerome Keisler (1986), autor do livro *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach*, os círculos da figura acima representam "microscópios infinitesimais" que são suficientemente poderosos para mostrar uma porção infinitesimal pequena da reta hiper-real. Aproximadamente cada número real "c" é uma porção da reta hiper-real composta de números infinitamente próximos à "c"(c = 0 e c = 100). Os números infinitamente próximos a 0 (zero) são infinitesimais. As partes finita e infinita da reta hiper-real foram separadas uma da outra por uma linha pontilhada.

Outra maneira de representar as partes infinitas da reta hiper-real é através do que Keisler chamou de "telescópio infinito". O campo de visão de um telescópio infinito tem a mesma escala que a porção finita da reta hiper-real, enquanto que no campo de visão de um microscópio infinitesimal contém uma porção infinitamente pequena da reta hiper-real ampliada.

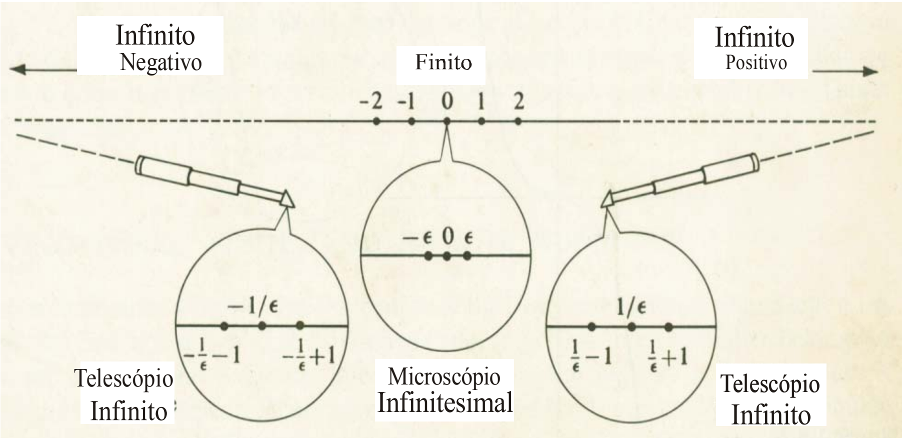


Fig. 1.3

Pode-se dizer que a reta hiper-real é um modelo matemático assim como a reta real. Os modelos são criações mentais que buscam correlações com a realidade – essas correlações podem existir ou não. Na verdade, tem sido útil em aplicações das noções do cálculo imaginar uma linha no espaço físico como uma reta hiper-real.

O conjunto dos números hiper-reais (*R) é não-arquimediano, embora possua, em certa medida, "as mesmas propriedades" de R. Pode-se dizer que qualquer conjunto E que tenha a operação (+) definida e o elemento zero como elemento neutro, é arquimediano se para quaisquer que sejam os elementos *a* e *b* pertencente a E, com a < b, existe um inteiro n tal que n.a ≥ b. Os hiper-reais (*R) é na verdade, uma extensão[19] dos reais (R). Isso, num primeiro momento, implicaria em dizer que todas as propriedades de R continuariam a valer em *R. Mas não é isso que acontece. A propriedade arquimediana não vale para os hiper-reais. Acontece neste caso, uma mudança significativa na interpretação do n. De fato, são as diferenças entre R e *R que possibilitaram a Robinson definir, com clareza, os números infinitamente pequenos – os infinitésimos, cujo valor absoluto é menor que qualquer valor positivo em R e os infinitamente grandes.

(19). Segundo Caraça (1989, p. 10), "*o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas conseqüências.*"

Pois bem! Os números hiper-reais podem ser algebricamente manipulados exatamente como os números reais. Então, veremos uma aplicação dos infinitésimos a uma curva $y = x^3$ para calcular sua inclinação em um ponto $P(x_0, y_0)$ qualquer. Observaremos porém, que nessa aplicação fica resolvida a questão da ambigüidade dos infinitésimos de ora ser diferente de zero e ora ser igual a zero.

Seja $y = x^3$ e (x_0, y_0) um ponto qualquer da curva e seja Δx um infinitesimal positivo ou negativo.

Considere Δy o acréscimo correspondente em "y" ao longo da curva, e Δx e Δy são mostrados sob um microscópio (Fig. 1.4).

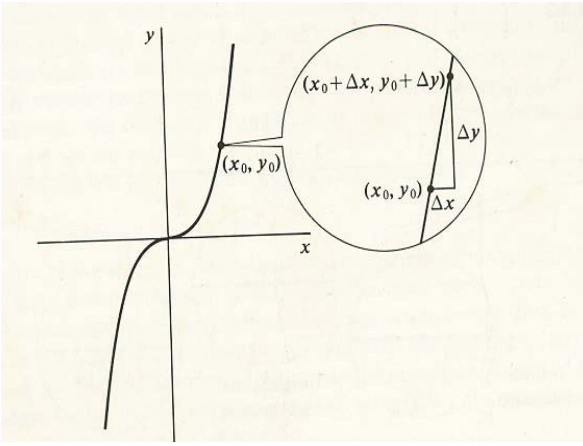


Fig. 1.4

Assim, a definição da inclinação da curva no ponto (x_0, y_0) é dada: inclinação em (x_0, y_0) é igual a um número infinitamente próximo a $\Delta y/\Delta x$.

Calculemos agora o número hiper-real $\Delta y/\Delta x$.

Logo: $y_0 = x_0^3$

$$y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^3$$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

Mostra-se que desde que Δx é infinitesimal, $3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ também o é. Portanto, o número hiper-real $3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ é infinitamente próximo ao numero real $3x_0^2$, donde a conclusão: a inclinação da curva no ponto $(x_0, y_0) = 3x_0^2$.

A teoria dos hiper-reais se fundamenta em princípios e teoremas. Três princípios são básicos: **Princípio da Transferência, Princípio da Extensão e o Princípio da Parte Padrão.** Um princípio, segundo nos parece, provem da intuição, apesar de não ser o suficiente na elaboração de uma teoria porque pode nos levar a cometer enganos. Na verdade, na sua sistematização já se faz necessário o uso da lógica, ou seja, não se pode na elaboração de uma ciência prescindir-se da lógica. Sua importância pode ser constatada pelo seu grau de generalização. É importante lembrar que os princípios da Extensão e da Transferência são essenciais no desenvolvimento das Ciências. No meu entendimento, parte do mérito da criação de Robinson está na consideração desses princípios.

Princípio da Extensão – seu enunciado consiste em: i) Os números reais são subconjuntos dos números hiper-reais, e a relação de ordem $x < y$ para os números reais é um subconjunto da relação de ordem para os números hiper-reais. ii) Há um número hiper-real que é maior que zero, mas menor que todo número real positivo. iii) Para cada função real f de uma ou mais variáveis, corresponde uma função f^* hiper-real de mesmo número de variáveis. f^* é chamada de extensão natural de f.

Aqui é necessário explicar. De (i) pode-se dizer que a linha real é uma parte da linha hiper-real. Já em (ii) é preciso definir que um número hiper-real "b" é positivo infinitesimal se for positivo, mas menor que todo número real positivo; é negativo infinitesimal se for negativo, mas maior que todo número real negativo e infinitesimal se for positivo infinitesimal, negativo infinitesimal ou zero. Contudo, um infinitesimal positivo é um número hiper-real, mas não pode ser um número real, o que assegura a existência de números hiper-reais que não são reais. E, (iii) nos permite aplicar funções reais a números hiper-reais, como também trabalhar com expressões tais como cos(x) ou sen(x + cos(y)) que envolve uma ou mais funções reais.

Princípio da Transparência – qualquer coisa que possamos dizer que seja uma propriedade verdadeira sobre os números reais será também uma proposição verdadeira sobre os números hiper-reais.

Vejamos alguns exemplos para ilustrar esse princípio.

1) Regra final da adição: para qualquer x e y, a soma x + y é definida.
2) Regra de ordem: se $0 < x < y$, então $0 < 1/y < 1/x$.
3) Divisão por zero não é permitida: $x/0$ é indefinida.
4) Uma identidade algébrica: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
5) Uma regra para logaritmos: se $x > 0$ e $y > 0$, então: $\log_{10}(xy) = \log_{10}x + \log_{10}y$.

Deve-se observar que cada exemplo apresenta duas variáveis x e y e permanecem sempre verdadeiros, sempre que x e y forem reais. Pode-se garantir pelo Princípio da Transferência que esses exemplos também são verdadeiros para x e y hiper-reais.

Princípio da Parte Padrão – todo número finito hiper-real é infinitamente próximo a exatamente um número real.

É preciso, pois, buscar sua definição: Seja "b" um número finito hiper-real. A parte padrão de "b" representada por st(b), é o número real que é infinitamente próximo a "b". Os números hiper-reais infinitos não têm partes padrão.

Até aqui, enunciamos os princípios, mas não é só isso que fundamenta os infinitésimos - temos os teoremas e as definições

Quanto à notação específica dos infinitésimos vale lembrar que Robinson denominou os números reais de "standard" e os infinitésimos e os números infinitos de "não-standard". Tal denominação deu origem à expressão "standard part", que é simbolizada por (st). Em outros termos, standard são os elementos (relações, operações) da estrutura dada, como R; não-standard são os novos elementos da estrutura ampliada *R.

É oportuno então, observar a definição que afirma: Dois números hiper-reais "x" e "y" são considerados infinitamente próximos um do outro ($x \approx y$), se sua diferença $x - y$ for infinitesimal. $x \not\approx y$ significa que "x" não é infinitamente próximo de "y".

Conseqüências:

i) Se ξ é infinitesimal, então, $x \approx x + \xi$, porque a diferença $x - (x + \xi) = - \xi$ que é infinitesimal.

ii) "x" é infinitesimal se e somente se $x \approx 0$.

iii) Se "x" e "y" são reais, e "x" é infinitamente próximo de "y" , então "x" é igual a "y" . $x - y$ é real infinitesimal, ou seja, zero. Portanto, $x = y$.

Chamemos atenção para a relação $\approx$ entre números hiper-reais. Ela se comporta quase como a igualdade para os reais, mas não é o mesmo que a igualdade.

Portanto, sejam "a", "b", "c" números hiper-reais.

i) $a \approx a$

ii) Se $a \approx b$, então $b \approx a$.

iii) Se $a \approx b$ e $b \approx c$, então $a \approx c$.

E então, ao assumir que $a \approx b$.

i) Se "a" é infinitesimal, "b" também o é.

ii) Se "a" é finito, "b" também o é.

iii) Se “a” é infinito, “b” também o é.

O teorema da Parte Standard consiste em: Se x for um hiper real finito, existirá um número univocamente definido r, com $x \approx r$ (lê-se: x está infinitamente próximo de r). Esse único r é a Parte Standard de x; e escreve-se $r = st(x)$.

Estamos, agora, em condições de apresentar um resultado bastante conhecido na perspectiva do cálculo não-standard. Antes, porém, consideremos um resultado já conhecido de Arquimedes: a área de um polígono regular com centro O, perímetro Q e apótema $h = r$ é $S = 1/2 .r.Q$.

Calculemos agora, empregando a definição ($x \approx y$) e o teorema da parte standard, a área de um círculo.

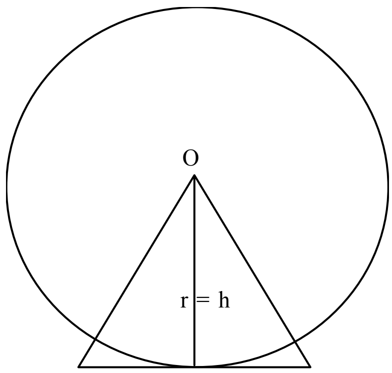


Fig. 1.5

Circunscrevemos o círculo com um polígono de Q lados, Q infinito, cada um de comprimento infinitesimal. Sabemos que:

(i) A (área do círculo) $\approx$ área do polígono.

(ii) C (comprimento da circunferência) $\approx \alpha Q$.

De (i) e (ii) concluímos:

$$S = \frac{st\,(r\,\alpha Q)}{2} = \frac{st(r)\,st\,(\alpha Q)}{2} = \frac{r\,C}{2} = \frac{r\,2\,\pi\,r}{2} = \pi\,r^2$$

Importante, também, para os infinitésimos são os teoremas que tratam das regras para a manipulação algébrica.

Sejam “a” e “b” números finitos hiper reais.

i) $st(-a) = -st(a)$.

ii) $st(a + b) = st(a) + st(b)$.

iii) $st(a – b) = st(a) – st(b)$.

iv) st(ab) = st(a).st(b).

v) Se st(b) $\neq 0$, então st(a/b) = st(a)/st(b).

vi) st(a^n) = $(st(a))^n$.

vii) Se a $\geq$ 0, então st($\sqrt{a}$) = $\sqrt{st(a)}$.

viii) Se a $\leq$ b, então st(a) $\leq$ st(b).

Outras regras para a manipulação algébrica.

Sejam os seguintes hiper-reais "b" e "c" finitos (podem ser infinitesimais).

st(b + c) = st(b) + st (c)	st(b - c) = st(b) - st (c)
st(bc) = st(b)st(c)	st(b/c) = st(b)/st(c) se st(c) $\neq$ 0
st($\sqrt{b}$) = $\sqrt{st(b)}$ se b > 0, n > 0	st(b^c) = $st(b)^{st(c)}$ se st(b) > 0
b $\approx$st(b)	b $\approx$ c se e somente se st(b) = st(c)
b = st(b) se e somente se b é real	se b $\leq$ c, então st(b) $\leq$ st(c)

st(ξ) = 0 , st(H) é indefinido. (H é um número hiper-real infinito positivo)

Essas regras seguem dos princípios para os números hiper-reais e ao utilizá-las, pode-se calcular a parte padrão (standard) de um infinitésimo finito, como também de expressões mais complicadas. Para ilustrar, provaremos a regra (iv) para st(b) e também calcularemos a parte standard de um número hiper-real.

Prova: Seja "r" a parte padrão de "a" e "s" a parte de "b", de forma que: a = r + ξ ,

b = s + δ , onde ξ e δ são infinitésimos.

Então: ab = (r + ξ)(s + δ)

$= rs + r\delta + s\xi + \xi\delta \approx rs$

Logo, st(ab) = rs = st(a) .st(b). cqd.

Calculemos a parte standard do número infinitesimal $3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$, quando Δx é um infinitesimal e x é real.

Vejamos: $st(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) =$

$= st(3x_0)^2 + st(3x_0\Delta x) + st(\Delta x)^2 =$

$=3x_0^2 + st(3x_0).st\Delta x + st(\Delta x)^2 =$

$= 3x_0^2 + 3x_0 0 + (0)^2 = 3x_0$.

Outros exemplos:

1) Calcular a parte standard de $2 + \xi + 3\xi^2$, ξ infinitesimal.

$st(2 + \xi + 3\xi^2) = st2 + st\xi + st(3\xi^2) =$

$= 2 + 0 + st3.\ st(\xi)^2 =$

$= 2 + 0 + 3.0 = 2$

Logo, $st(2 + \xi + 3\xi^2) = 2$.

2) Se ξ é infinitesimal mas não é zero, encontrar a parte standard de $b = \xi / (5 - \sqrt{25 + \xi})$.

Observemos que tanto o numerador quanto o denominador são infinitésimos diferentes de zero. Então, multipliquemos b por $5 + \sqrt{25 + \xi}$.

$$b = \frac{\xi . (5 + \sqrt{25 + \xi})}{(5 - \sqrt{25 + \xi}).(5 + \sqrt{25 + \xi})} = -5 - \sqrt{25 + \xi}$$

Assim, $st(b) = st(-5 - \sqrt{25 + \xi}) = st(-5) - st(\sqrt{25 + \xi}) = -5 - \sqrt{st(25 + \xi)} =$

$= -5 - \sqrt{25} = -5 - 5 = -10.$

Logo, $st(b) = -10$.

3) Seja o número hiper-real infinito $\dfrac{3 + \xi}{4\xi + \xi^2}$, onde ξ é um infinitesimal não-zero.

Observemos que tanto o numerador como o denominador tem parte standard, ou seja: $st(3 + \xi) = 3$; $st(4\xi + \xi^2) = 0$. Entretanto, deve-se lembrar que os números hiper-reais infinitos, não tem parte standard, ou seja, parte padrão.

Assim, o quociente $\dfrac{3 + \xi}{4\xi + \xi^2}$, não tem parte standard, ou seja, $st\left(\dfrac{3 + \xi}{4\xi + \xi^2}\right)$ é indefinida.

Espero, apesar da síntese, ter contribuído para mostrar o quanto é interessante conhecer o desenvolvimento do conceito de infinitésimos. Em suma, os infinitésimos são instrumentos da ciência Matemática que funcionavam na produção de resultados corretos. Com fundamentação não rigorosa, apresentavam contradições nas suas aplicações. Contudo, o problema da fundamentação foi resolvido nos trabalhos de A . Robinson, constituindo-se num vigoroso instrumento matemático, utilizado atualmente para compreensão e resolução de problemas tanto dentro da Matemática, como em outras Ciências.

CAPÍTULO II

ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS, FILOSÓFICOS E HISTÓRICOS DOS CONCEITOS DO CÁLCULO NÃO-STANDARD

Neste capítulo, pretende-se apresentar os conceitos do **cálculo não-standard** numa perspectiva epistemológica, filosófica e histórica. Buscar-se-á abordar aspectos significativos que contribuíram para a construção dos conceitos a começar pela intuição, até sua sistematização/formalização em linguagem matemática apresentadas nos cursos de cálculo atualmente. Portanto, estaremos lidando com aspectos fecundos da Ciência Matemática. O desafio desta abordagem será interpretá-los e explicá-los com o objetivo de torná-los metodologicamente e pedagogicamente inteligíveis.

A teoria da análise não-standard da qual faz parte o cálculo não-standard é considerada um marco na evolução das idéias matemáticas por resolver satisfatoriamente o problema da noção intuitiva dos infinitésimos que perdurou por séculos. O tratamento rigoroso que Robinson aplicou ao conceito de infinitésimos e a outros conceitos ligados a ele, levou à resolução de um problema epistemológico levantado desde os gregos antigos: *qual a natureza das grandezas infinitamente pequenas? Como tratá-las*?. Na verdade, os matemáticos a usavam confiantes na intuição – funcionavam e era isso que contava. Além disso, como tornar claro discursivamente aquilo que surge na mais imediata intuição? A teoria de Robinson responde a essa questão ao apresentar o intuitivo sobre "grandezas infinitamente pequenas" como um número hiper-real.

Os infinitésimos estão na estrutura da formação dos conceitos básicos do cálculo não-standard que são: continuidade, derivada e integral. Esses ocupam lugar de destaque no desenvolvimento da Matemática. Podem ser considerados instrumentos fecundos, pois sua rigorosa fundamentação teórica revela uma importante contribuição para a epistemologia Matemática: a não conservação da propriedade de Arquimedes no sistema numérico dos hiper-reais.

O Cálculo não-standard apresenta uma estrutura baseada em princípios (axiomas), teoremas, definições e fórmulas. Nela, existem regras das quais são deduzidas as fórmulas. Essas por sua vez podem ter significados (de acordo com as aplicações onde são usadas) ou serem simplesmente uma cadeia de símbolos. Essa teoria não escapa dos formalismos praticados pela maioria dos matemáticos e lógicos.

Em certa medida, ousaremos afirmar que a teoria de Robinson está fundamentada no formalismo pela estrutura que apresenta. O formalismo é uma das correntes dos fundamentos da Matemática cuja base é o método axiomático e seu principal representante é o analista alemão David Hilbert (1862 – 1943). A idéia de Hilbert era formalizar os vários ramos da Matemática, e então demonstrar matematicamente que cada um deles está isento de contradições. Em outros termos, consideremos o que fala o eminente matemático francês Alain Connes (1947 -) medalha Fields[1] em 1982, sobre a construção hilbertiana.

> *Hilbert construiu uma linguagem artificial baseada num alfabeto finito, um número finito de regras gramaticais que permitem especificar sem ambigüidade quais as proposições coerentes e um número finito de regras de inferência lógica e de proposições supostas verdadeiras ou axiomas. A partir de um tal sistema ou linguagem formal, um algoritmo universal permite decidir da validade de uma demonstração formulada nesta linguagem. Podemos, assim, pelo menos teoricamente, estabelecer a lista de todos os teoremas demonstráveis nessa linguagem formal. Hilbert esperava poder reduzir os teoremas matemáticos àqueles que são demonstráveis numa linguagem formal conveniente. O teorema de Gödel mostra que isso é impossível.(CONNES, 1991, p. 217-218)*

Desejo observar que nessa notável síntese de A. Connes sobre o formalismo de Hilbert, percebe-se o seu interesse em comentar o alcance dos resultados apresentados por Gödel. Estes resultados impuseram limites à concepção hilbertiana, mas não podemos deixar de reconhecer o quanto a Matemática avançou, e avança, ao utilizar as idéias de Hilbert para compreender seus fundamentos - a exemplo dos infinitésimos.

Para Hilbert não se pode recorrer à intuição como critério geral para legitimar uma teoria; ela só ajudaria enquanto não fossem introduzidos os elementos da formalização. Então é preciso saber o que é uma teoria formalizada. Para formalizar uma teoria é preciso axiomatizá-la primeiro e restringi-la à lógica de primeira ordem. Nessas condições, como formalizar uma teoria axiomatizada? Formalizar uma teoria (T) significa escolher uma linguagem apropriada de primeira ordem para T. O vocabulário de uma linguagem de primeira ordem consiste em cinco itens, quatro dos quais são sempre os mesmo e independente da teoria dada T. Vejamos: i) Uma lista de uma quantidade enumerável de variáveis. Quem consegue falar sobre matemática sem usar variáveis?; ii) Símbolos para os conectivos da linguagem comum, por exemplo: ($\neg$) para "não", ($\wedge$) para "e", ($\vee$) para "ou" inclusivo, ($\rightarrow$) para "se ... então" e ($\leftrightarrow$) para "se e somente se". Quem consegue falar sobre qualquer coisa sem usar conectivo?; iii) O sinal de igualdade (=). Não se pode falar sobre Matemática sem usar este sinal: iv) Os dois quantificadores, o quantificador ($\forall$) "Para todo,

(1). A medalha Fields é uma premiação que acontece a cada quatro anos desde 1936, concedida aos matemáticos com no máximo 40 anos de idade que tenham dado contribuições relevantes para o desenvolvimento da Matemática. Para mais informações ver Revista do Professor de Matemática (RPM nº 10, p.19 e RPM nº 40, p.15.)

qualquer que seja" e o quantificador existencial ($\exists$) para "existe". O primeiro é usado para afirmações do tipo "todos os números primos têm dois divisores", o segundo para afirmações como "existem números irracionais". O item v depende da teoria T. v) Consiste em escolher um símbolo apropriado para cada termo não definido de T. Por exemplo: entre os termos não definidos da geometria euclidiana plana, ocorrerem "ponto", "reta", e "plano", e para cada um deles devemos introduzir um símbolo apropriado no vocabulário da linguagem de primeira ordem.

Mas não é só isso. O formalismo se opõe ao pensamento platônico que defende a tese de que os matemáticos só podem descobrir coisas e não criá-las, isto porque, para os platonistas, os objetos matemáticos como: conjuntos infinitos, conjuntos infinitos enumeráveis, variedades de dimensão infinita, curvas que encham o espaço, entre outros, são reais - sua existência é um fato objetivo, independentemente de nosso conhecimento sobre eles.

Esta oposição pode ser observada nos trabalhos de Kurt Gödel e René Thom, defensores entusiastas do platonismo, e do outro lado Abrahan Robinson.

Os teoremas de Gödel evidenciam que o método axiomático está sujeito a grandes limitações. Para mostrar tais limitações, comecemos por citá-los: i) *Toda axiomática consistente da aritmética é incompleta*, ou seja, é impossível, dada uma teoria matemática constante de uns poucos axiomas simples, mostrar que ela não possui contradições, permanecendo dentro de seus limites. Exemplificando: para mostrar a consistência (ausência de contradição) de uma Geometria como a de Lobachevski, é necessário sair de seus limites, construindo-se, por exemplo, um modelo euclidiano e, então, basta demonstrar que a Geometria de Euclides não é, contraditória; porém para demonstrar a consistência da Geometria de Euclides, é necessário também, sair de seus limites e recorrer, por exemplo, à Aritmética. Contudo, não é possível demonstrar a consistência desta sem sair de seus limites, e, assim, este jogo torna-se, no campo da lógica, indefinidamente aberto. *ii) A consistência de qualquer axiomática consistente da aritmética não pode ser demonstrada nessa axiomática*, ou seja, dentro de uma dada teoria axiomática, há sempre questões para as quais não temos respostas – questões que são denominadas de indecidíveis. Essas questões jamais poderão ser mostradas, ou seja, sua verdade ou falsidade não pode ser provada com os axiomas do sistema. Exemplo: A hipótese do contínuo - *Entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos reais, não existe um terceiro conjunto "maior" do que os naturais e "menor" do que os reais.*. Para Gödel essa hipótese não pode ser demonstrada (1937) e para o matemático americano Cohen (1963), não pode ser negada, ou seja, mostrou que a hipótese do contínuo era uma proposição indecidível dentro da axiomática Z-F-S (Zermelo-Fraenkel-Skolen). Em 1966, no Congresso Internacional de Moscavo, Paul J. Cohen (1934 -) recebeu a medalha Fields por esta descoberta.

Na verdade, esse segundo teorema de Gödel também conhecido como o teorema da **incompleteza** mostra que não podemos reduzir a matemática a uma linguagem formal. As indagações de Gödel tornaram a posição formalista menos "segura". Mas, apesar da fecundidade dos teoremas de Gödel, Connes (1991) considera não ser pertinente utilizá-los, especialmente o da incompleteza, para limitar os nossos mecanismos de compreensão. Faz-se necessário compreender que haverá escolhas a fazer, e que, "*não devemos ter uma visão estática segundo a qual deveria existir, para todo o sempre, um número finito de axiomas que desse respostas a tudo. A nossa compreensão é, pelo contrário, dinâmica"* (CONNES, 1991, p.217). Na realidade, os teoremas de Gödel assinalam as limitações de qualquer sistema axiomático e prova que a Matemática não é um assunto acabado. De qualquer modo, não deixa de ser uma grande veleidade, a Matemática fundamentar-se dentro dela mesma.

Retornemos a R.Thom (adepto do platonisno) com suas idéias geométricas. Em 1971 disse que:

> *Levando tudo em conta, os matemáticos deveriam ter a coragem de suas convicções mais profundas e afirmar assim que as formas matemáticas têm, com efeito, uma existência que é independente da mente que as contempla... No entanto, a qualquer tempo, os matemáticos têm somente uma visão incompleta e fragmentária deste mundo das idéias.* (THOM, apud DAVIS; HERSH, 1984, p.360).

Vejamos então, o que disse Robinson em 1969, a respeito: *"Não consigo imaginar que voltarei jamais ao credo do verdadeiro platonista, que percebe o mundo do infinito real estendido a seus pés, e que pode* *compreender o incompreensível*", (ROBINSON, apud DAVIS; HERSH, 1984, p.360). Ao falar que jamais voltará ao credo platonista que defende ser o matemático um cientista empírico, que não pode inventar nada, pois tudo já existe, Robinson, no meu entendimento, se declara um adepto do formalismo que considera o aporte hilbertiano, apesar das limitações impostas pelos teoremas de Gödel.

A teoria robinsoniana é um bom exemplo de que é possível criar em Matemática. É um método novo (embora não o seja inteiramente) e sob alguns aspectos revolucionário por obrigar a rever conceitos fundamentais, crenças fortemente arraigadas, e consequentemente, alteração do discurso vigente. É também um ramo da Matemática formal que tira partido de resultados e construções oriundos da Lógica. Na realidade, a teoria de Robinson apresenta características que vão além das características que fundamentam uma criação formalista: a intuição. Foi justamente na dosagem certa entre intuição e rigor que Robinson resolveu uma questão epistemológica antiga: *a confusão entre grandezas que diferem por um infinitésimo*, ou seja, passou-se de uma confusa relação para uma bem definida relação de equivalência entre tais grandezas.

É certo que muitas e variadas são as limitações do formalismo, mas o que importa assinalar é sua permanência, ainda que implícita na prática de muitos matemáticos e lógicos. Robinson não escapa a esta regra. Aliás, nada pode impedir que o matemático formalista estude os seus sistemas simbólicos, mas também nada nos garante que ele não encontrará de vez em quando, contradições em sus transformações simbólicas. A idéia forte que os formalistas perseguiram durante muito tempo foi a de que a Matemática pudesse fundamentar-se a si mesma, inclusive com os recursos da lógica. Essa proeza, se fosse conseguida, colocaria a Matemática numa posição invejável, como a única ciência a fundamentar-se em si própria – Hilbert acreditava ser possível tal feito. Em síntese, o desejo dos formalistas era transformar o método axiomático, de técnica que é, na essência da Matemática.

Apesar da crítica contundente de Gödel ao método axiomático, ele não serve apenas para sistematizar teorias, economizar pensamentos, ele constitui-se num ótimo instrumento de trabalho e de pesquisa para a Matemática. Vejamos então como devemos proceder, segundo o matemático, lógico brasileiro Newton da Costa, para se estudar uma teoria pelo método axiomático:

> *Escolhe-se certo número de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações; obtém-se dessa maneira, uma* ***axiomática material*** *da teoria dada; deixam-se de lado os significados intuitivos dos conceitos primitivos, considerando-os como termos caracterizados implicitamente pelas proposições primitivas. Procuram-se, então, as conseqüências do sistema obtido, sem preocupação com a natureza ou com o significado inicial desses termos ou das relações entre eles existentes. Estrutura-se, assim, o que se denomina uma* ***axiomática abstrata****.(COSTA, 1992, p. 49).*

Muitos avanços em Álgebra, Topologia, Análise e em outras áreas da Matemática, alcançados no séc. XX, encontram-se correlacionados com o método axiomático. Também, para Robert Blanchê, autor do livro *A Axiomática*, "*o método axiomático propõe, com efeito, excluir a intuição para lhe substituir, não o raciocínio, mas um cálculo, um manuseamento dirigido e cego de símbolos. Na realidade, porém, o formalismo não pode funcionar sem se alimentar da intuição.*" (BLANCHÊ, 1978, p. 103). Embora a intuição não possa nos dar o rigor, nem mesmo a certeza, é essencial no processo criativo dos matemáticos e para Blanchê (1978), o primeiro alimento a ser considerado para o funcionamento do formalismo é a **intuição concreta** (grifo nosso) em que se baseia, visto que, só nos livros é que a axiomática começa pelos axiomas.

Temos, pois, diferentes tipos de intuição. A intuição concreta é a que nos coloca diretamente em contato com as "coisas intuídas", por apelo aos sentidos e à imaginação. Essa espécie de intuição, também conhecida como sensível ou material, pelos filósofos; difere da intuição formal que serve para explicar o porquê de nós intuirmos relações e propriedades entre diversas entidades.

No formalismo então, pode-se afirmar que os aspectos intuitivos não estão forçosamente fundados no testemunho dos sentidos; isso restringiria o processo criativo, pois os sentidos logo se tornam impotentes frente à generalizações. Aliás, a grande vantagem do método axiomático não é excluir a intuição, mas delimitá-la ao "terreno" no qual é insubistituível.

A intuição[2] em Matemática não só permite demonstrar, mas também inventar. É através dela que se percebe com um breve olhar, por exemplo, o plano geral de um edifício lógico, e isso ao que nos parece, sem a intervenção dos sentidos.

Mas embora em lados opostos (formalistas e platonistas) quanto ao problema da existência dos conceitos matemáticos, eles não discutiam sobre que tipos de raciocínio deveriam ser admissíveis na prática da Matemática.

O formalismo tornou-se a atitude filosófica predominante nas atividades dos matemáticos que investigaram problemas sobre os fundamentos nos meados do séc. XX, e, suas raízes filosóficas são reveladas quando os formalistas definem o que compreendem por raciocínio finitário[3]. Pode-se afirmar que a compreensão do que seja um raciocínio finitário é vital para perceber as raízes filosóficas do formalismo. É necessário também, para percebê-las, refletir um pouco sobre a construção hilbertiana. Comecemos por considerar uma teoria T axiomatizada e formalizada em termos de uma linguagem de primeira ordem. Nesse caso,

---

(2) Agora, sempre que nos referirmos à intuição estará implícito que fazemos referência à intuição intelectual, que segundo os filósofos se apresenta em dois tipos: intuição material e intuição formal. Poincaré chama de intuição sensível a que depende unicamente da imaginação.

(3) Por raciocínio finitário compreendemos um raciocínio que satisfaz as seguintes condições: não consideramos nele nunca nada além de um número finito dado de objetos e de funções; estas funções estão bem definidas, sendo que suas definições permitem o cálculo de valores de maneira inequívoca; nunca afirmamos que um objeto existe sem dar a maneira de construí-lo; nunca consideramos a totalidade de todos os objetos x de uma coleção infinita; e quando dizemos que um raciocínio (ou um teorema) é verdadeiro para todos estes x, queremos dizer que para cada x isolado, é possível repetir o raciocínio geral em questão, que deveria ser considerado somente como o protótipo destes raciocínios particulares. Segundo Ernst Snapper essa definição explícita sobre raciocínio finitário foi dada pelo formalista francês Herbrand. Ver nota de rodapé da página 622 da obra de J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambrige, Estados Unidos.

temos que falar da linguagem L como um objeto, e, ao fazer isso, não estamos falando dentro da própria linguagem L. Pelo contrário, estamos falando sobre L na linguagem comum, do dia a dia. Assim, enquanto estivermos usando nossa linguagem natural e não a formal L, há naturalmente muito perigo de que possam ser introduzida as contradições, ou mesmo, até qualquer tipo de erro. Hilbert dizia que a maneira de evitar este risco é ter a certeza absoluta de que, enquanto se está falando em linguagem natural sobre L, estão sendo usados raciocínios que são absolutamente seguros, acima de qualquer suspeita. Hilbert chamou esses raciocínios de "raciocínios finitários".

Nesta época, consideravam a Matemática a ciência das demonstrações rigorosas, ou seja, do ponto de vista formalista, não começamos a fazer realmente matemática antes de enunciar algumas hipóteses e começar uma demonstração. Para um formalista estrito, "fazer matemática" é manipular os símbolos sem sentido, de uma linguagem de primeira ordem, segundo regras sintáticas explícitas. A formalização significava a escolha de um vocabulário básico de termos, o enunciado de leis fundamentais usando estes termos e o desenvolvimento lógico de uma teoria, a partir das leis fundamentais.

Na verdade, os formalistas estritos não trabalham com entidades abstratas, como: séries infinitas, números cardinais, mas somente com seus nomes sem sentido que são as expressões de uma linguagem de primeira ordem. Neste sentido, o formalismo se aproxima do nominalismo. A palavra nominalismo em latin é *nomimalis* que significa "pertencente a um nome". Para a filosofia nominalista as entidades abstratas, simplesmente, não têm nenhuma existência, nem fora da mente humana. São simplesmente ou sons vocais ou linhas escritas – simplesmente nomes. Portanto, quando os formalistas tentam demonstrar que uma certa teoria axiomatizada T está isenta de contradições, não estudam as entidades abstratas que ocorrem em T, mas em vez disso, estudam a linguagem L de primeira ordem que foi usada para formalizar T.

O estilo formalista penetrou gradualmente todos os níveis de ensino. Com a denominação de "Matemática Moderna"[4] chegou até ao pré-escolar (educação infantil) com textos sobre a teoria dos conjuntos. Sua importância para a Matemática atual é naturalmente bem conhecida, pois foi através dessa corrente que a lógica matemática com seus vários ramos, como a teoria dos modelos, das funções recursivas, etc., realmente floresceu.

---

(4) O movimento denominado de Matemática Moderna, no Brasil, ocorreu nas décadas de 60 e 70, motivado pelo justificado desejo de adaptar o ensino da Matemática aos padrões utilizados pelos matemáticos do século XX, ou pelo menos para um grande número deles. Nesta época foi proposta uma reformulação radical dos currículos de Matemática, com ênfase nos métodos abstratos e gerais.

A teoria robinsoniana é uma grande contribuição à evolução da Matemática. Possibilitou reavaliar o papel dos infinitésimos na formalização dos conceitos fundamentais da Análise e do Cálculo, invertendo a primazia da *noção de limite*[5] e enriquecendo o ideário matemático com novos conceitos e métodos demonstrativos. De fato, através dessa teoria é possível explicar com clareza a idéia do infinitamente pequeno ou infinitesimal e do infinitamente grande, conservando o papel da intuição sem deixar de ser, absolutamente rigoroso.

Mas no século XIX, alguns matemáticos a exemplo de Weierstrass, trabalharam no sentido de banir os infinitésimos dos fundamentos do cálculo por falta de rigor. Nessa época, as exigências de rigor tinham levado a que se excluísse a intuição sensível, considerada suspeita, e principalmente a representação de figuras no espaço, confiando-se apenas na evidência dos encadeamentos lógicos.

Pois bem! Parece haver uma verdadeira batalha entre intuição e rigor. Então, existiria uma definição rigorosa de RIGOR? No latim, há o verbo clássico RIGEŌ, - ĒS, - UĪ, -

ERE, que significa SER FLEXÍVEL, RÍGIDO. Esse verbo apresenta uma forma derivada que é o substantivo RIGOR, ŌRIS que significa "dureza, rigidez" e, de maneira figurativa, "severidade, inflexibilidade". Contudo, ser **rigoroso** é ser inflexível, orientado por um padrão, inflexivelmente. O rigor é também uma categoria histórica, e o padrão grego de Rigor era a Lógica de Aristóteles. Euclides que seguiu fielmente esse padrão pode ser considerado um matemático rigoroso, apesar de também ser intuitivo.

Ora, para ilustrar a querela entre intuição e rigor lembremos que o cálculo criado por Newton e Leibniz no séc XVII, foi, durante muito tempo utilizado por muitos matemáticos, sem maiores preocupações com o rigor. Parafraseando Borges (1984), isso nos sugere que na criação científica o rigor tem pouco papel a desempenhar, que cabe à intuição e não à lógica, o impulso verdadeiramente criador; que a fecundidade liga-se muito mais à necessidade e muito menos a lógica. Na verdade, "*a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção*"(POINCARÉ, 1995, p.22-23).

As idas e vindas dos infinitésimos até a sua sistematização final, reforça a tese de que na Matemática acontece períodos de paradas na investigação de certas idéias, mesmo existindo a possibilidade delas renascerem. A idéia dos infinitésimos renasceu nos trabalhos de Robinson revelando novas estruturas e métodos que enriqueceram a Matemática e resolveu o problema da ambigüidade dos infinitésimos. Aliás, com a criação de um novo sistema numérico – denominado por hiper-reais e representado por *R, Robinson realizou um sonho que Leibniz acalentou no séc XVII, que era a adoção de um sistema numérico que contivesse para além dos reais, elementos ideais infinitos e infinitesimais e que neste sistema se verificasse as regras operatórias usuais, o que era contraditório na época. Mas há uma diferença decisiva entre a teoria dos infinitésimos de Leibniz e Robinson. Robinson inventou uma teoria particular que constitui uma extensão da análise real.

Robinson nos oferece, segundo o matemático, filósofo e epistemólogo Lakatos (1983), uma explicação racional e sem ambigüidades da teoria dos infinitésimos que satisfaz aos critérios do rigor matemático moderno, iniciado no séuclo XIX, com Bolzano, Cauchy e, principalmente Weierstrass.

Temos, pois, com esses e outros matemáticos um movimento de retorno aos fundamentos, ou seja, um retorno ao ideal grego do raciocínio claro e rigoroso que parecia ter sido abandonado, para clarificar certas noções nebulosas e assentar os diversos ramos da

(5) Historicamente, o conceito de limite é posterior ao de derivada. Ele surge da necessidade de calcular limites de razões incrementais que definem derivadas. E esses limites são sempre do tipo 0/0.

Matemática em bases sólida. Das noções nebulosas das quais se ocupavam os matemáticos desta época, a de infinitésimos estava nos fundamentos do cálculo diferencial e integral e da análise matemática.

Alguns matemáticos em nome do rigor expurgaram a noção de infinitésimo do cálculo. Porém, outros a usavam em aplicações do cálculo. Estava estabelecido o impasse fundamentação/aplicação, o que faltava fazer? Era preciso uma nova atitude frente ao desafio proposto: procurar estabelecer novas relações. Faltava justamente trabalhar com a lógica e a intuição. Seria possível aproximá-las o suficiente para trabalhá-las conjuntamente?

Robinson que era lógico, matemático e físico percebeu que sim, e mostrou à comunidade matemática esta possibilidade ao criar os hiper-reais, estrutura básica da teoria não-standard. O valor da contribuição robinsoniana pode ser observado pelo alcance das suas idéias ao conseguir uma sistematização rigorosa dos infinitésimos diante das suas diversas interpretações construídas ao longo dos séculos por eminentes matemáticos. A aproximação na medida certa da lógica e da intuição resolveu definitivamente o problema da fundamentação dos infinitésimos.

A aproximação entre lógica e intuição pode ser explicada a partir da percepção dos limites da lógica. Esses limites da lógica foram demonstrados com muita ênfase pelos teoremas de Gödel, destronando assim, a lógica, em especial a clássica, da condição de guardiã das certezas absolutas. É bastante claro que esses teoremas referem-se a sistemas formalizados e, como a formalização é uma singularidade do conhecimento matemático (e por que não dizer do conhecimento humano), devem ser considerados todas as vezes que fizermos uma opção nesta direção de formalização. Esses teoremas de Gödel têm um grande valor epistemológico: são considerados uma grande revelação conceitual de séc. XX; a meu ver, possibilitaram aos matemáticos estabelecer relações antes não tentadas – pelo menos com sucesso.

A teoria robinsoniana não deixa, portanto, espaço para dúvidas quanto ao rigor da fundamentação dos infinitésimos. Formulada com princípios, teoremas e definições, pode-se dizer, de forma plausível, que sua criação representa o coroamento da aproximação intuição/lógica e que os conceitos básicos do cálculo não standard ganharam com o reconhecimento da importância da intuição, ou seja, os aspectos intuitivos fazem a diferença na compreensão e aplicação desses conceitos. Aliás, ela tornou-se imprescindível ao espírito criativo, não só dos matemáticos.

Um dos aspectos que chamam atenção na estrutura dos hiper-reais (*R) de Robinson, é a não conservação da propriedade arquimediana.

Constatamos que toda relação e toda operação em R se estende naturalmente a *R, por um lado, e que todas as propriedades formais exprimíveis em linguagem elementar são conservadas. Exemplo: $\forall xy(x+y = y+x)$. Mas por que a não conservação da propriedade de Arqumedes em *R se formulada em linguagem elementar? Ora, se os hiper-reais são uma extensão dos reais, a propriedade arquimediana sendo elementar e verdadeira em

R, deveria transferir-se para *R como verdadeira. Mas ao contrário do que acontece com a propriedade da adição $\forall xy(x+y = y+x)$, a propriedade arquimediana quando interpretada em *R, já não é mais a propriedade de Arquimdes, embora aparentemente lhe conserve a forma. O fato de *R não ser arquimediano significa que "para todo x positivo em *R existe um elemento n de *N maior que x", ou seja, dado x positivo em *R, um n em *N tal que $n > x$. O número n que deveria ser um natural ordinário, isto é, um elemento de N, poderá ser um natural, infinitamente grande, isto é, um elemento de *N (*N é a extensão de N; $N \subset$ *N – inclusão própria[6]). O problema é que N não permanece o mesmo (não é absoluto) quando se passa de R à extensão *R pela operação de "extensão natural" , só os conjuntos finitos permanecem os mesmos.

Observemos que a interpretação dada ao número natural do qual fala a propriedade

(6) Lembremos que se diz que dois conjuntos são iguais se e somente se eles têm os mesmos elementos. De forma mais pretensiosa: um conjunto é determinado por sua extensão. É importante entender que a extensão não é só uma propriedade logicamente necessária da igualdade, mas uma proposição não trivial sobre pertinência; que a extensão natural entre conjuntos infinitos é a inclusão própria da teoria dos conjuntos. Se A e B são conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq B$.

arquimediana é de caráter epistemológico. Ocorre uma mudança significativa no número n, que deixa de ser um natural ordinário e poderá ser um natural infinitamente grande pertencente a *N, extensão natural de N. Aliás, os infinitesimais não podem existir como números ordinários, eles pertencem a um sistema maior de números – os hiper-reais. De fato, esta interpretação possibilitou a Robinson que observou as extensões não-arquimediana de R consideradas desde final do séc. XIX, para não falar dos pioneiros, definir os números infinitamente pequenos e infinitamente grandes. Cabe lembrar, que o novo sistema numérico criado por Robinson, não apresenta nenhuma inconsistência, e que, portanto, tanto os infinitesimais como também os "novos" números obedecem a princípios que permitem um desenvolvimento rigoroso do cálculo.

É possível afirmar que as técnicas não-standard ou infinitesimais podem ser usadas para fornecer uma compreensão mais clara de uma teoria existente, porque as provas e as construções estão mais próximas das idéias intuitivas subjacentes; para a descoberta de novos resultados. Aliás, a habilidade de qualquer nova teoria em dar tais contribuições é o padrão pelo qual lhe é medida. Exemplificando, Robinson e Bernstein, em 1966, usaram as técnicas não-standard para resolver o problema do sub-espaço invariante para um operador polinomialmente compacto em Espaço de Hilbert Complexo. (OLIVEIRA, 1994).

O ressurgimento de idéias intuitivas na fundamentação do cálculo, porém, com sistematização rigorosa, fez ou faz da criação robinsoniana uma grande contribuição *epistemológica, filosófica* e *histórica* ao desenvolvimento da Matemática, por mostrar que algumas das intuições de Newton, Leibniz e outros não eram inteiramente sem sentido – estúpidas, embora fossem até certo ponto grosseiras. Os físicos, com certeza, sentiram-se aliviados com a teoria de Robinson, pois sempre fizeram uso dos infinitésimos, como por exemplo, ao estabelecer equações diferenciais representando processos físicos.

O físico, na realidade, conhece de modo aproximado os números que mede pela experiência e pode supor que uma função é contínua ou descontínua, que uma função tem derivada ou que não tem, sem receio de ser desmentido – quer pela experiência atual, quer por qualquer experiência futura. Compreendemos que essa liberdade que o físico tem de poder raciocinar sem está preso a certos "princípios" foi fundamental para Robinson na criação da teoria não-standard.

CONTINUIDADE

É fato, temos em certa medida uma noção intuitiva da continuidade. Quando observamos o movimento de um automóvel em uma estrada e o comparamos ao movimento de um canguru nesta mesma estrada; a imagem mental que nos vem é de uma linha reta, sem interrupções, no caso do automóvel, e de marcas separadas, pontos soltos, no caso do canguru. Esta oposição caracteriza bem a idéia que o senso comum tem sobre o contínuo e o descontínuo.

Recordemos alguns fatos referentes à continuidade na Grécia Antiga. Um deles é o que trata da polêmica entre os eleatas e os pitagóricos que levou à concepção de um mundo contínuo e móvel, onde o movimento é apenas uma opinião e não de verdade. Neste caso, a continuidade seria incompatível com o devir. Tal polêmica pode ser ilustrada com os estudos desenvolvidos por Zenão de Eléia. Outro, é referente a crença racional dos gregos sobre o contínuo das grandezas geométricas e a essência descontínua dos números naturais.

Mas então podemos nos perguntar quais eram as idéias filosóficas dessa época que deram suporte à polêmica entre eleáticos e pitagóricos? Sabe-se que além dos pitagóricos que defendiam a tese de *todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem número*, duas outras correntes filosóficas persistiam na Grécia Antiga: uma em afirmar que *a realidade está em perene movimento, nada se encontra parado, pois tudo é mudança* e outra em postular que *a realidade é a permanência, aquilo que não muda, porque o movimento é contraditório e jamais será alcançado pela compreensão*. Como já vimos, Zenão era discípulo da última e o filósofo grego Heráclito de Efeso (576-480 a.C.) defensor da primeira. Heráclito via na transformação permanente, no devir, a essência das coisas. Vale relembrar sua célebre frase: "*Tu não podes banhar-te duas vezes no mesmo rio; visto que novas águas correm sobre ti*".

Na verdade, a concepção eleática sobre a compreensão do movimento se opõe tanto à concepção pitagórica quanto à heracliteana. Os eleatas mostraram através dos argumentos de Zenão que o movimento é incompreensível; já os pitagóricos adeptos da teoria das mónodas[7], consideravam o movimento como uma sucessão de estados – de passagens de mónodas a mónadas sucessivas e os heracliteanos segundo Caraça (1989, p. 67), consideravam "*que é*

(7) Para os pitagóricos "*a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos – mónada – era assimilado à unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por quantidade e arranjo de mónadas como os números por quantidade e arranjo de unidades.*" (CARAÇA, 1989, p. 72-73).

impossível, num dado instante, atingir a permanência, a estabilidade seja do que for; tudo flui, tudo devém, a todo o momento, uma coisa nova."

Então, quando admitimos a dicotomia do espaço - porque não dizer, da reta (para concretizar: basta tomarmos um barbante e cortá-lo ao meio, depois ao meio do pedaço remanescente e assim por sucessivamente) e também do tempo, podemos dizer que: quando vemos uma andorinha em pleno vôo, vemos o movimento como um todo e não como uma sucessão infinita de estados de repouso, como a reunião dialética entre o descontínuo e o contínuo no espaço e no tempo. E também, quando eu me movo, encontro-me num determinado lugar e, simultaneamente, não me encontro nele; é a interação entre descontínuo e o contínuo que torna possível o movimento.

Há filosoficamente uma importante diversidade entre contínuo e descontínuo. Segundo Selvaggi, professor emérito da Universidade Gregoriana de Roma, autor do livro *Filosofia do Mundo: cosmologia filosófica*,

> *O contínuo é indiviso e, portanto, uno em si, um ente quanto, a unidade no gênero da quantidade; o descontínuo é diviso, e portanto múltiplo, muitos entes quantos, muitos contínuos. Sobre esta distinção entre contínuo e descontínuo se fundam os conceitos de unidade e multidão, que por sua vez dão origem ao conceito de número*. (SELVAGGI,1988. p. 175).

Na realidade, a importância filosófica dessa distinção entre contínuo e descontínuo, ainda segundo Selvaggi (1988, p. 175), "*deriva do fato que a divisão e indivisão, unidade e multiplicidade são noções que transcendem o gênero da quantidade e podem ser aplicadas, de modo análogo, ao ser em geral; são noções não só físicas e matemáticas como também metafísicas.*"

O que acabamos de dizer sobre continuidade nos mostra em parte a fecundidade desse conceito. Porém, faz-se necessário observar de modo particular, o seu valor epistemológico dentro da Matemática por ter provocado rupturas e conseqüentemente, avanços.

Para alguns matemáticos, o número inteiro é o único objeto natural de pensamento matemático[8]. Defensor da concepção intuicionista, Leopold Kronecker (1823-1891) foi um matemático que acreditava que toda a Matemática deve se basear em métodos finitos, desenvolvidos a partir dos números naturais. Especialista em teoria das equações, funções elípticas e teoria dos números algébricos, disse: "*Deus fez os números inteiros, todo o resto é criação do homem*". Também criticou os trabalhos de Cantor cujo objeto de estudo foram os

(8). Os intuicionistas defendem a tese de que "a existência de um *objeto matemático* está associada a um método que permita a construção desse objeto".

conjuntos infinitos[9] com sua concepção finitista e a controvérsia estabelecida entre os formalistas e intuicionistas do séc. XX, é essencialmente, uma continuação da controvérsia entre Cantor e Kronecker.

Desse modo, o que dizer do contínuo? Segundo Poincaré (1995, p. 95), "*foi o mundo exterior que nos impôs o contínuo; sem dúvida o inventamos, mas esse mundo nos forçou a inventá-lo*." Mas nem por isso deixa de ser um dos mais importantes objetos da Matemática. Aliás, sem o contínuo a Matemática se reduziria à Aritmética e não haveria análise infinitesimal.

Sobre o objeto matemático vale ressaltar que alguns filósofos da ciência rejeitam a concepção empirista da matemática segundo a qual o objeto matemático é uma simples abstração da experiência, apontando a imensa abstração de alguns dos conceitos mais modernos dessa ciência. Realmente, nos ramos mais modernos da matemática surgem conceitos altamente abstratos, aparentemente bem longe de qualquer intuição. Mas essa concepção é enganosa, pois os conceitos matemáticos, a exemplo do conceito de função, formam uma seqüência de sucessivas abstrações e generalizações, "*cada uma das quais repousa na combinação de experiências com conceitos abstratos prévios*". Pode-se afirmar que é na vivência das *experiências perceptivas sensoriais* de onde surgem as primeiras abstrações da matemática. Por exemplo: da necessidade de contagem – aritmética (os números naturais); da necessidade de medir terras – a geometria. Construídas estas, surgem as chamadas *experiências mentais*, com esses primeiros conceitos – a construção dos números reais a partir dos números naturais. A natureza generalizadora da ciência na qual repousa a sua imensa fecundidade é responsável por novas abstrações, fruto das experiências mentais com as abstrações que lhe são anteriores.

Observemos que apesar de ser um intuicionista, Poincaré reconhece que a natureza é bem mais rica que a imaginação, e que, portanto, é necessário às vezes tomarmos caminhos até então negligenciados, pois esses caminhos muitas vezes nos conduzirá a criações importantes, como a do contínuo. "*Dedicamos quase todo o nosso tempo e todas as nossas forças ao estudo do contínuo. Quem será capaz de lamentá-lo, quem julgará que esse tempo e essas forças foram perdidos*?"(POINCARÉ, 1995, p.95).

Houve um movimento denominado aritmetização[10] da Análise, comandado principalmente por Weierstrass, Dedeking e Cantor. Foi uma tentativa de fundamentação do contínuo (números reais) em termos puramente algébricos ou analíticos, despidos da veste geométrica, mas (in)vestido de outra: a intuição geométrica dá lugar a outra intuição, bem mais abstrata e poderosa, a dos conjuntos ou coleções cantorianas. Mas, "*a análise nos abre perspectivas infinitas, que a aritmética não suspeita; num breve olhar mostra-nos um conjunto grandioso, cuja ordem é simples e simétrica; ao contrário, na teoria dos números, onde reina o imprevisto, a visão é, por assim dizer, tolhida a cada passo*."(POINCARÉ, 1995, p. 96).

Sem dúvida, teremos necessidade de relembrar que é possível encontrar aspectos intuitivos sobre os números reais nos trabalhos do grande matemático Gauss[11] (1777-1855), por apoiar-se na intuição geométrica. Porém esses aspectos intuitivos foram, digamos, eliminados, quando a propriedade fundamental dos reais, a continuidade, foi rigorosamente esclarecida através daquilo que hoje denominamos de **Princípio de Continuidade e suas equivalências**:

I) Princípio de Dedekind: se o conjunto dos reais é dividido em duas classes não vazias X e Y disjuntas, de maneira que para $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários se cumpra $x < y$, existe, então um único número a para o qual $x \leq a \leq y$, quaisquer que sejam $x \in X$ e $y \in Y$.

(9)Para os matemáticos um conjunto é infinito sempre que for equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo. Caso contrário, o conjunto será finito. E quando é que um conjunto é equivalente a um outro conjunto? O conjunto A, dizem os matemáticos, é equivalente ao conjunto B, quando a cada elemento de A corresponder um único elemento de B e a cada elemento de B corresponder um único elemento de A.

(10) O termo aritmetização significa construir os números reais a partir dos números naturais.

II) Princípio de Cantor: dado um sistema de intervalos encaixantes (isto é, um sistema de intervalos com duas propriedades: a) cada qual está contido em todos os seus predecessores e b) suas amplitudes, 0,1, 0,01, 0,001, ... vão decrescendo e tendendo para zero), existe um único número real que pertence a cada um dos intervalos.

III) Princípio de Weierstrass: se uma sucessão não decrescente de números reais está cotada superiormente, então é convergente.

IV) Princípio de Cauchy: toda sucessão fundamental de números reais converge.

O conceito de continuidade é, na verdade, a propriedade natural dos números reais. Ela impede que os reais sejam enumeráveis. Diz-se enumerável, qualquer, conjunto que possa ser colocado em correspondência biunívoca com os números naturais; logo de mesma potência (cardinalidade) do conjunto dos naturais. Enumerar, significar contar, isto é, colocar os objetos em correspondência um-a-um com o conjunto N dos naturais ou com parte dele. Exemplos de conjuntos enumeráveis: o conjunto de todos os números pares, o conjunto de todos os números ímpares, o conjunto de todos os números racionais e muitos outros.

De fato, um conjunto cujos elementos não podem ser enumerados é o conjunto dos

~~(11) As preocupações de G~~auss com os fundamentos da Análise, e com o rigor na Matemática, revelam, de um modo geral, uma sensibilidade bem apurada. Gauss só publicava trabalhos bem acabados.

números reais. Mas o que impede a correspondência biunívoca entre seus elementos e os números naturais? A continuidade, propriedade inexistente tanto nos naturais como nos racionais.

Procuremos esclarecer melhor. Para tanto comparemos as propriedades dos números racionais com as propriedades dos números reais.

i) O conjunto dos pontos de uma reta é infinito - o que é o mesmo, em certo sentido, o conjunto dos números reais; o conjunto dos racionais também o é.

ii) Ambos os conjuntos são ordenados: dado um ponto P da reta e outro ponto A, este precede àquele se estiver a sua esquerda; dados dois racionais x e y, x precede y quando x for menor que y.

iii) Dados dois racionais distintos quaisquer entre eles há uma infinidade de outros racionais; o mesmo acontece com dois reais distintos quaisquer. Conjuntos com essa propriedade são chamados de densos. Mais formalmente um conjunto **C** é denso se nele existe uma relação de ordem $\Re$ com a seguinte característica: sempre que $x \Re z$ (supondo $x \neq z$), existe um y tal que $x \Re y$ e $y \Re z$, ou seja, dados dois elementos distintos, x e z, de **C**, há um elemento y entre eles.

Apesar de ambos possuírem essas três propriedades, seus elementos não podem ser postos em correspondência biunívoca. O conjunto dos pontos da reta ou o conjunto dos reais, não é enumerável. A potência dos reais é de outro tipo. A cardinalidade dos reais (podemos chamá-la de c) é maior que a cardinalidade dos naturais ($\aleph_0$). Demonstra-se que $c = 2^{\aleph_0}$. Porém pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os pontos de um segmento (Fig. 2.1). Seja AB um segmento e r uma reta qualquer paralela à AB.

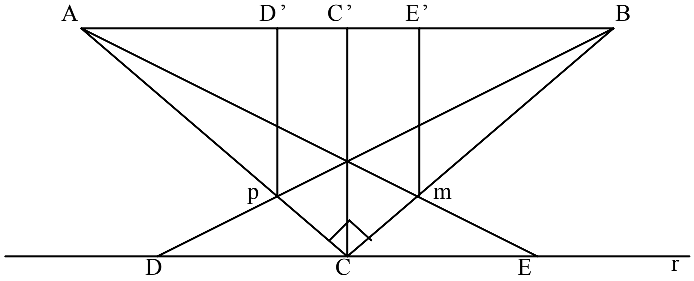


Fig.2.1

Liguemos A e B ao ponto C, da reta r, de tal maneira que o ângulo ACB seja reto. A projeção C sobre AB é C'. Seja D um ponto qualquer de r à esquerda de C e o liguemos ao ponto B. Sobre o segmento AC, temos o ponto p, cuja projeção sobre AB, será D'. Do que foi dito, conclui-se: a qualquer ponto D (à esquerda de C) corresponde outro ponto D' à esquerda de C'. De forma análoga, seja um ponto qualquer E em r à direita de C e o liguemos ao ponto A. Sobre o segmento BC determinemos o ponto m cuja projeção sobre AB é E'. Logo: a qualquer ponto (à direita de C) corresponde o ponto E' à direita de C'. Desse modo, o que acabamos de fazer pode ser estendido para todos os pontos da reta r, ficando, desta forma, estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta r e o segmento AB.

Mostramos que há uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta r e um certo segmento. Portanto, se o conjunto dos reais, em certo sentido, é o mesmo que o conjunto de pontos de uma reta, pode-se afirmar que de fato a correspondência é biunívoca entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta, ou seja, a todo número real corresponde um ponto da reta; a todo ponto da reta corresponde um número real (postulado básico da Geometria Analítica).

Para Caraça (1989), a linha reta é a imagem ideal da continuidade.

Concentremo-nos na imagem da reta quanto à continuidade. A riqueza da estrutura da reta vai além "*da simples variação por gradações insensíveis*" segundo Caraça (1989). É preciso, portanto, para perceber a continuidade; ter clareza da noção da reta e procurar estabelecer critérios distintivos e simples que permitam observar qualquer conjunto e verificar se ele tem ou não a mesma estrutura da reta e, claro, se podemos atribuir-lhe ou não a continuidade.

Um critério importante para verificar a continuidade de um dado conjunto é o conceito de corte que está no princípio da continuidade desenvolvido por Dedekind (1831-1916):

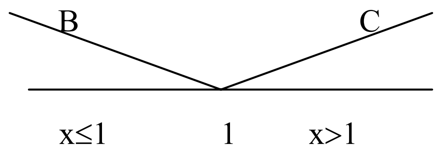
> *Se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes.* (CARAÇA, 1989, p. 60).

Em outros termos: Verifica-se um corte num dado conjunto A não-vazio, quando ele é separado em dois outros B e C, tal que:

i) todo elemento $b \in B$ é menor do que todo elemento $c \in C$.

ii) $A = B \cup C$.

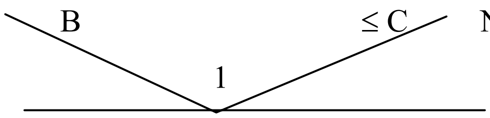
Ex_1:



Neste caso, 1 é: i) elemento separador do corte, e,

ii) elemento máximo da classe B.

Ex_2:



Neste caso, 1 é elemento mínimo de C.

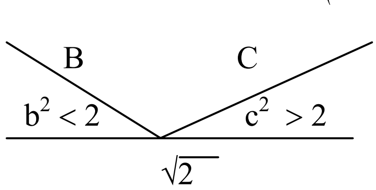
Do que foi dito, conclui-se: i) 1 é o supremo de B no exemplo 1.

ii) 1 é o ínfimo de C no exemplo 2.

Mas, além desses "cortes", há outros. Vejamos outro exemplo mostrando que no conjunto dos números racionais há cortes que não tem elementos de separação, para não pensarmos que para todo corte no conjunto dos racionais, existe um número racional a separar B e C. Antes, porém, consideremos a definição:

> C*hamamos número real ao elemento de separação dos dois conjuntos dum certo corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar os dois conjuntos, o número real coincidirá com esse número racional, se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional. (CARAÇA, 1989, p. 62).*

Ex_3 :



Neste caso, consideremos: i) B o conjunto formado por todo racional b cujo quadrado seja menor que 2, isto é, $b^2 < 2$; ii) C o conjunto formado por todo racional c cujo quadrado seja maior que 2, isto é, $c^2 > 2$.

Nota-se que o critério de repartição abrange todos os racionais, mas lhe escapa o número cujo quadrado seja igual a 2. Então, qual seria o elemento de separação dos conjuntos B e C? – não existe! ele seria o número de quadrado igual a 2.

O número cujo quadrado é igual a 2 é o número real irracional $\sqrt{2}$. Portanto, $\sqrt{2}$ é o número real irracional que separa o conjunto B dos racionais b, tais que $b^2 < 2$ do conjunto C dos racionais, tais que $c^2 > 2$. Isso significa que todo corte tem elemento de separação, estando este elemento no conjunto dos reais, como é o caso de $\sqrt{2}$.

Pelo que vimos, podemos afirmar que:

i) todo corte é produzido por um ponto da reta.

ii) todo ponto da reta pode produzir um corte.

Dessa afirmação, conclui-se que: todo racional produz um corte nos racionais, porém, não se verifica a recíproca, isto é, pode existir um corte nos racionais positivos que não seja produzido por um racional. Na verdade, encontramos a razão da não correspondência biunívoca entre os reais e os racionais.

O conceito de continuidade evoluiu gradualmente, assim como o conceito de função[12]. Inicialmente se confundia a função com sua correspondência analítica[13] e a continuidade significava a permanência da mesma fórmula que define a função, ao passo que "descontinuidade" significava, não a ruptura do gráfico da função, mas da expressão analítica
ou lei que definisse a correspondência entre variável dependente e a variável independente (ou variáveis independentes).

Somos portanto levados a enunciar, em linguagem, digamos, contemporânea, algumas definições. Bolzano, em um trabalho publicado em 1817 escrevera: "*uma função f(x) varia segundo a lei da continuidade para todos os valores de x situados num intervalo se a diferença $f(x + \omega) - f(x)$ pode tornar-se menor que qualquer valor dado, se se pode sempre tomar ω tão pequeno quanto se queira.*" (ÁVILA, 2001, p.128). Essa definição é praticamente a mesma definição de continuidade de Cauchy:

> *A função f(x) será contínua em x num intervalo de valores dessa variável se, para cada valor de x nesse intervalo, o valor numérico da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com α. Em outras palavras, f(x) é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno de x produz um acréscimo infinitamente pequeno de f(x). (*ÁVILA, 2001, p.128).

Essa definição apresentada por Cauchy está muito próxima da que usamos hoje em dia, em termos de ξ e δ: *uma função dada por y = f(x), chama-se contínua, se existe para cada $\xi > 0$, um $\delta > 0$, de modo que para todo x_1, x_2 com $|x_1 - x_2| < \delta$, vale $|f(x_1) - f(x_2)| < \xi$*. Aliás, essa simbologia também é devida a Cauchy, que a usa em várias demonstrações, embora ela só tenha se universalizado devido as preleções de Weierstrass em Berlim, por volta da década de 70 do séc XIX. Weierstrass também apresentou em notas dos cursos que ministrava a definição de continuidade em termos de desigualdade envolvendo ξ e δ.

Na verdade, Weierstrass deu uma definição um tanto equivalente às definições de Bolzano e Cauchy para uma função contínua, porém com maior clareza e precisão. Para ele, dizer que $f(x + \Delta x) - f(x)$ é um infinitésimo, ou que, torna-se e permanece menor que

(12) Segundo Eves (1995, p. 660-661), "*a palavra função parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como , por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.*" Hoje utilizamos uma definição mais geral de função, que evoluiu principalmente nos trabalhos de Joseph Fourier (1768-1830) que foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas e Lejeune Direchlet (1805-1859). "*Uma função $f: D \rightarrow Y$ é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função." (ÁVILA, 2001, p. 100).*
(13) A fórmula ou lei expressa em simbologia matemática que define a função.

qualquer quantidade dada, à medida que Δx se aproxima de zero traz à mente ou o infinitamente pequeno ou noções vagas de mobilidade. Weierstrass definiu f(x) como contínua, dentro de certos limites de x: *se para qualquer valor x_0 desse intervalo e para um número positivo arbitrariamente pequeno ξ, é possível achar um intervalo em torno de x_0, tal que para todos os valores deste intervalo a diferença $f(x) - f(x_0)$ é, em valor absoluto, menor que ξ.*

Cauchy é considerado comumente por muitos historiadores da matemática como a pessoa que pôs o cálculo em terreno firme, apesar dos equívocos encontrados posteriormente na demonstração que apresentara para o princípio da convergência[14]. Esses equívocos levaram muitos matemáticos a procurar uma solução para a demonstração. A procura por uma solução satisfatória aconteceu entre os contemporâneos de Cauchy, como também por outros matemáticos um pouco mais tarde.

Abrahan Robinson, por exemplo, considerava em certa medida, a definição dada por Cauchy sobre continuidade, misteriosa e propôs com sua teoria não-standard uma nova solução ao problema da continuidade.

Robinson observou que a história do cálculo admitia duas teorias sobre o contínuo: teoria leibniziana e teoria weierstrassina. Essas teorias, na verdade, eram rivais. O contínuo de que trata a teoria leibniziana vai de Arquimedes até o contínuo não-arquimediano mediante a adição dos infinitésimos e dos números infinitamente grandes. Segundo Robinson, Cauchy era adepto da teoria leibniziana (LAKATOS, 1983). Já para a teoria weierstrassiana, o aspecto revolucionário era a possibilidade de explicar todo o cálculo conhecido e também desenvolvimentos posteriores que incluíssem os números reais.

É possível mostrar, segundo Robinson que os argumentos de Cauchy não devem ser interpretados como weierstrassiano e sim como um genuíno leibniziano.

Vejamos a interpretação apresentada por Robinson.

Seja lim s_n (x) = s_n (x) donde s_n(x) são contínuas. Então a fim da provar que s_n(x) é contínua em algum x_1, temos de mostrar que $s(x_1 + \alpha) - s(x_1)$ é infinitesimal para todo

(14) Lembremos que o objetivo de Cauchy era provar que: *seja f uma função contínua num intervalo I = [a,b], com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer número d compreendido entre f(a) e f(b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$. Em outras palavras, f(x) assume os valores compreendidos entre f(a) e f(b), com x variando em (a,b),* por meios analíticos, sem recorrer à intuição geométrica. Desse objetivo é que surgiu o seu critério de convergência, formulado aqui, para o caso de uma seqüência de funções: " *Se uma seqüência de grandezas $F_1(x)$, $F_2(x)$,..., $F_n(x)$,..., $F_{n+r}(x)$,... está sujeita à condição de que a diferença entre seu n-ésimo $F_n(x)$ e cada membro seguinte $F_{n+r}(x)$, não importa quão distante do n-ésimo termo este último possa estar, seja menor do que qualquer quantidade dada, desde que n seja tomado bastante grande; então, existe uma e somente uma determinada grandeza, da qual se aproximam mais e mais os membros da seqüência, e da qual eles podem se tornar tão próximos quanto se deseje, desde que a seqüência seja bastante longa." (ÁVILA, 2001, p. 74).*

infinitesimal α.

Nessa formulação está sendo empregado o conceito de continuidade de Cauchy, que será equivalente ao conceito de Weierstrass, somente se para qualquer proposição que seja verdadeira para todas as quantidades infinitesimais também seja verdadeira para quantidades finitas suficientemente pequena e vice-versa.

Então: $|s(x_1 + \alpha) - s(x1)| = |s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1) + r_n(x_1 + \alpha) - r_n(x_1)|$

$\leq |s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)| + |r_n(x_1 + \alpha)| + |r_n(x_1)|$ donde r_n são os restos.

Cauchy acreditava que a parte esquerda era infinitesimal para todo infinitesimal α, posto que $|s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)|$ é infinitesimal para todo n, devido a sua definição de continuidade; e $|r_n(x_1 + \alpha)|$ e $|r_n(x_1)|$ seria por sua vez infinitésimos para todos os n infinitamente grandes devido a definição apresentada por Cauchy: $a_n \to 0$ se a_n é infinitesimal para n infinitamente grandes.

Para Robinson, este argumento implica que $s_n(x)$ deveria está definida e ser contínua, e convergir não só para os pontos standard weierstrassianos, mas para todos os pontos do contínuo mais denso de Cauchy, e a seqüência $s_n(x)$ deveria está definida para índices n infinitamente grandes e representar funções contínuas de tais índices.

Observa-se que a noção de convergência[15] de Cauchy pode ser interpretada pela teoria robinsoniana da seguinte maneira: Seja *R uma extensão elementar dos números reais R e *N a extensão correspondente dos números naturais N. A prova de Cauchy de seu teorema da continuidade exige a convergência de uma seqüência transfinita.

Simbolicamente: $\{ s(n) / n \in N\}$, donde $s(n) \in {}^*R$.

Assim, a seqüência $\{ s(n) / n \in N\}$, donde $s(n) \in {}^*R$, converge (segundo Cauchy) para o limite $t \in {}^*R$ se existe uma função M(n) em R tal que para todo m em N e para todo n em *N: $n > M(n) \to | s(x) - t | < m^{-1}$.

Segundo Robinson, com esta definição, o teorema de Cauchy é correto no sistema dos hiper-reais, mas não o é para o sistema dos números reais R. (LAKATOS, 1983).

(15) Para Cauchy, *toda seqüência monótona e limitada é convergente*. Diz-se que uma seqüência (a_n) é limitada inferiormente, se existe um número A tal que $A \leq a_n$ para todo n; e limitada à direita, ou limitada superiormente, se existe um número B tal que $a_n \leq B$ para todo n. Quando a seqüência é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, dizemos simplesmente que ela é limitada e, monótona quando satisfaz a qualquer uma dessas condições: crescente, decrescente, não decrescente e não crescente. "*Diz-seque uma seqüência* (a_n) *é crescente se* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ *e decrescente se* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ *Diz-se que a seqüência é não decrescente se* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ *na* $\leq \ldots$ *e não crescente se* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$." (ÁVILA, 2001, p. 56-57). Esse critério de convergência permite saber se uma dada seqüência é convergente, sem conhecer seu limite de antemão se ela for monótona. Em contrate a esse critério de convergência, veja outro de caráter geral que se aplica a qualquer seqüência. "*Uma condição necessária e suficiente para que uma seqüência* (a_n) *seja convergente é que, qualquer que seja* $\xi > 0$, *existe N tal que* $n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \xi$.*"(ÁVILA, 2001, p. 67). Em outros termos "dado* $\xi > 0$, *existe um índice N tal que, para todo inteiro positivo p,* $n > N \Rightarrow |a_n - na + p| < \xi$.*"(ÁVILA, 2001, P. 67).*

Isso nos mostra que a teoria de Robinson proporciona explicações precisas sobre as noções de Cauchy, como também se propõe a explicar as idéias de Leibniz. Observa-se que ao dar muita ênfase a idéia de continuidade de Leibniz e Cauchy, o levou a uma falsa reconstrução da prova de Cauchy de 1821. Segundo Lakatos (1983), as definições dadas por Cauchy e Robinson sobre continuidade apresentam menos similaridades do que as definições dadas por Cauchy e Weierstrass.

Robinson tem razão em sinalizar que Cauchy fazia um esforço para escapar dos infinitésimos, cuja debilidade lógica havia sido mostrada por Berkeley. Porém, uma análise do termo variável usado por Cauchy, vai mostrar que não se trata só de uma maneira de falar, pelo contrário, suas variáveis reais recorriam aos números reais weierstrassianos e infinitésimos. Os infinitésimos diferem dos números weierstrassianos. Portanto, qual seria a interpretação do contínuo de Cauchy dada por Robinson? Que o contínuo de Cauchy (talvez se diferencie de Leibniz) não é um conjunto de pontos atuais, mas um conjunto de pontos que se movem. Suas variáveis não são variáveis weierstrassianas; estas últimas podem ser eliminadas sem nenhuma perda, já que a teoria do movimento de Weierstrass explica o movimento e troca das variáveis em termos de uma álgebra infinitista de quantidades atuais.

Mas afinal, como Robinson define a continuidade no cálculo não-standard?

Seja uma função de valor real e variável real x em R, definida no intervalo (a,b) com a e b standard, a < b. Na passagem para *R, $f(x)$ é estendida para a função definida para todo número x em *R, com a < x < b. Em outros termos: A função f: R $\rightarrow$ R é contínua no ponto a $\in$ R, se e somente se $*f(x) \approx f(a)$ para todo $x \approx a$.

Essa caracterização da continuidade tem certas vantagens, inclusive pedagógica. Em um nível bem elementar, notemos que a continuidade da função composta "$f$og" de duas funções f e g é agora óbvia: se $x \approx a$, então $*g(x) \approx g(a)$ e, portanto, $*f(*g(x)) \approx f(g(x))$.

Intuitivamente, uma curva $y = f(x)$ é contínua se sua forma é contínua (seu gráfico), isto é, quando x_1 está próximo de x_2, $f(x_1)$ está próximo de $f(x_2)$.

Graças a essas definições, saberemos reconhecer a idéia da continuidade em diferentes contextos. Resta chamar a atenção para o fato de que procuramos enfatizar mais a compreensão dos conceitos, com o objetivo de compreendê-la epistemologicamente e filosoficamente, sem deixar, contudo, de apresentá-la em linguagem matemática. Porém, apesar da linguagem matemática não ser o ponto de partida para a compreensão dos conceitos – por isso não deve ser imposta desde o início no ensino, constitui-se num dos objetivos visados pelo ensino. Portanto, é fundamental na comunicação e argumentação sobre os resultados que aprofundam os conceitos uma linguagem correta – sem excessos simbólicos, mas rigorosa com as idéias dos conceitos, principalmente na educação básica, em especial, no ensino médio.

DERIVADA

O conceito de derivada é uma das idéias fundamentais do cálculo e carecia, desde o início, de uma fundamentação mais adequada. Os matemáticos sabiam disso, mas nesta época, séc. XVII – para não falar desde Arquimedes, ainda não havia muita motivação para o trato de questões de fundamentos. Os matemáticos desse século tinham muito mais do que se ocupar em termos de explorar as idéias do cálculo, desenvolver novas técnicas e usá-las na formulação e solução de problemas aplicados.

Na realidade, as ambigüidades dos fundamentos do cálculo dessa época, proporcionaram críticas aos trabalhos dos matemáticos. A mais contundente e bem fundamentada dessas críticas partiu do conhecido bispo e filósofo George Berkeley, numa publicação de 1934 ao método dos fluxões de Newton. Não menos contundente, a de Bernard Neeuwentijt a Leibniz (STRUIK, 1989). Houve também respostas a essas críticas, bem como, durante o século XVIII, tentativas de encontrar uma fundamentação adequada para o cálculo, embora sem maiores conseqüências.

Observa-se que nessa época não havia uma separação nítida entre o cálculo e suas aplicações; o que diminuía, pelo menos em parte, a importância do rigor na formulação dos métodos, pois muitas vezes os resultados empíricos já era um teste do valor desses métodos. Assim, por exemplo, um problema físico que se traduzia numa equação diferencial, como o movimento de um pêndulo ou as vibrações de uma corda esticada, já tinha garantido, por razões físicas, a existência e a unicidade da solução. No entanto, em meados do séc. XVIII começou a reaparecer a preocupação pelo rigor, visto que, desde os gregos ele já era buscado.

Lembremos que as idéias básicas do cálculo não eram muito claras, nem pareciam bem fundamentadas (nessa época), sendo recebidas com um certa desconfiança pela grande maioria dos matemáticos. Newtom lidava com as noções de fluentes e fluxões; Leibniz chamava de infinitésimos as pequenas parcelas a serem somadas no processo de integração, ao tempo que imaginava as curvas sendo constituídas de partes infinitesimais, como se fossem pequenos segmentos da reta. Mas apesar da falta de coerência nas justificativas, essas noções continuaram a ser utilizadas por mais de cem anos.

Newton aplicou seu método a numerosas curvas encontrando suas inclinações, seus pontos mais altos e mais baixos (ponto de máximos e de mínimo), suas curvaturas (a taxa pela qual a curva muda de direção) e seus pontos de inflexão (onde a curva muda de côncava para convexa e vice-versa) – todas propriedades geométricas relacionadas com a linha tangente. Devido a esta associação com a tangente, o processo de encontrar a fluxão de um determinado fluente era conhecido, na época de Newton, como *problema da tangente*. Hoje chamamos esse processo de *diferenciação* e a fluxão de uma função chamamos de derivada. Não obstante, a importância da invenção de Newton é que ela forneceu um procedimento geral – algoritmo – para se encontrar a taxa de mudança de praticamente qualquer função. A maioria das regras da diferenciação, que agora são parte dos cursos padrão de cálculo, foram descobertas por Newton. Por exemplo, se $y = x^n$, então $y^{\bullet} = nx^{n-1}x^{\bullet}$ (onde n pode ter qualquer valor, positivo ou negativo, inteiro ou fracionário e até mesmo irracional). A notação do ponto de Newton também não sobreviveu, e atualmente usamos a notação diferencial muito mais eficaz de Leibniz. Se $y = x^n$ (onde n pode ser qualquer número), então $dy/dx = nx^{n-1}$. Observa-se que tal resultado é idêntico ao que Newton obteve usando o seu método de fluxões.

A partir dos trabalhos de D'Alembert e Cauchy, iniciou-se uma fundamentação mais rigorosa.

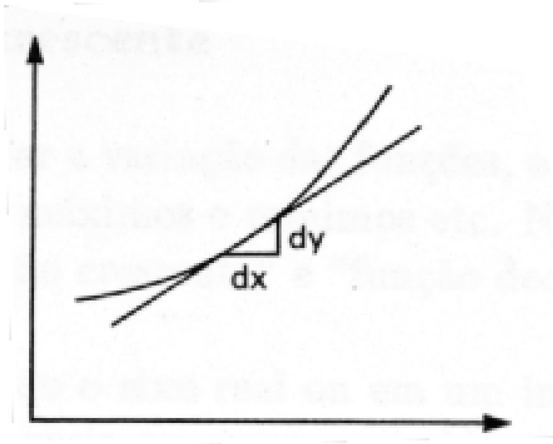
Weierstrass, prosseguiu na intenção de tornar as noções do cálculo cada vez mais rigorosa, fazendo uso de ξ e δ. Atribui-se a ele a tentativa de banir do cálculo os fluxões e os infinitésimos, com suas vaguezas ou obscuridades. Esse fato é de grande importância epistemológica. Afinal, a substituição dos infinitésimos pela noção de limite constitui uma ruptura. E, o rigor dos fundamentos é estabelecido.

Na prática, porém, matemáticos continuavam a recorrer às noções antigas. Isso levou a busca de abordagens alternativas para as noções do cálculo ou a reabilitação das idéias originais, livrando-as de suas inconsistências.

Robinson deu uma contribuição para a epistemologia da Matemática, ao mostrar que algumas modificações nessas idéias, conduz a uma teoria consistente matematicamente (LAKATOS, 1983).

Mas do que trata o conceito de derivada?

No entender de Leibniz, um dos inventores da derivada, esta deveria ser vista como o quociente de quantidades infinitesimais ou infinitamente pequenas, dy e dx; por isso, ele adotou para a derivada o símbolo dy/dx. Considerava, corretamente, que $\Delta y/\Delta x$ era um valor aproximado da derivada, tanto melhor quanto menor fosse Δx. Para Δx suficientemente pequeno, ele denotava Δy e Δx por dy e dx, respectivamente, considerando estas quantidades como infinitamente pequenas, os chamados infinitésimos (KEISLER, 1986). Ele concebia uma curva como constituída de um aglomerado infinito de segmentos retilíneos infinitamente pequenos. A tangente e a curva coincidiam num desses segmentos (Fig. 2.2). Sem dúvida, essas idéias são vagas e nebulosas, mas são muito sugestivas e ligadas à visualização geométrica; e, por isso mesmo, têm sido muito úteis, até os dias de hoje.



Sabe-se que houve uma ruptura no tratamento das noções básicas do cálculo com a ênfase no rigor. O conceito de derivada passou a ser tratado como um caso particular do limite, "*abdicando-se da possibilidade de apreensão direta de seu significado*" (MACHADO, 1993, p. 152).

O conceito de derivada trata do problema de traçar a reta tangente a uma curva e da idéia da taxa de variação. Também, pode-se afirmar que é uma generalização da noção de velocidade, com a qual familiarizamo-nos desde muito cedo. Embora seja fácil definir velocidade de maneira geral e precisa, todos parecem capazes de entender e utilizar intuitivamente informações envolvendo tal noção, pouco ou nada contribuindo para isso afirmações que a caracterizam como "o limite de $\Delta s/\Delta t$ quando Δt tende a zero".

Segundo Keisler (1986), autor do livro *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach*, a derivada pode ser descrita na linguagem cotidiana em termos de uma viagem de automóvel. A velocidade que o velocímetro mostra indica o índice de mudança ou a derivada da distância, pois a velocidade é encontrada pela razão entre uma certa distância, tomando-se um certo intervalo de tempo.

É costume indicar a derivada de uma função y = f(x) por y' ou f'(x). Mas se usarmos outras letras para indicar as variáveis, a notação da derivada deve adaptar-se de acordo com essa notação.

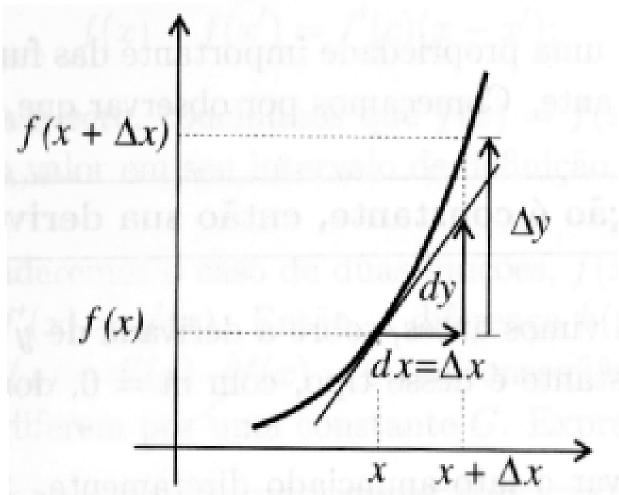
Em Mecânica, é comum o uso do símbolo $y^{\bullet}$ para indicar a derivada de uma função y da variável tempo t. Outra notação freqüente, devida a Leibniz, é dy/dx ou df/dx. Assim, é
costume escrever expressões como:

$\frac{dx^2}{dx} = 2x$; $\frac{d(x^2 - 3x)}{dx} = 2x - 3$ ou $\frac{d}{dx}(x^2 - 3x) = 2x - 3$

Para entender a lógica da notação de Leibniz, observe que o número h = x'- x é o incremento dado a x para se obter x'= x + h. É costume indicar esse incremento com o símbolo Δx (delta x, acréscimo, incremento ou variação de x):

$\Delta x = x' - x$, donde $x' = x + \Delta x$.

Se variarmos x de uma quantidade Δx, a variável dependente y também sofrerá uma variação: observemos a Fig. 2.3.



$\Delta y = \Delta f(x) = f$ (x

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Quando fazemos $\Delta x \to 0$, a variação $\Delta f(x) = \Delta y$ também tende a zero, de maneira que a razão incremental se aproxima da derivada.

Consideremos, para melhor esclarecermos essa questão, a definição dy = f'(x) Δx como a *diferencial dy* da função y = f(x), no ponto x.

Assim, quando a função é f(x) = x, sua *diferencial dx* é simplesmente Δx, pois a derivada é 1.

$dx = 1.\ \Delta x = \Delta x$

Portanto, dy = f'(x) Δx , donde f'(x) = dy/dx.

Diante do exposto, observemos que a derivada f'(x) é *realmente* o quociente dos diferenciais dy e dx.

A derivada é muito útil para estudar a variação das funções, achar os pontos onde elas assumem valores máximos e mínimos, etc. A derivada de uma função em um ponto P, mede a *inclinação* da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto.

Para caracterizar a direção de uma reta no plano *x, y,* costuma-se dar sua inclinação, que é a tangente trigonométrica do ângulo α entre a direção do eixo dos x positivo e a reta. Pela inclinação de uma curva em um ponto P exprimimos a inclinação da tangente à curva em P. Desde que aceitemos a tangente de uma curva como um conceito matemático intuitivamente dado, permanece apenas o problema de encontrar um procedimento para calcular a inclinação.

Vejamos então, a questão da inclinação na perspectiva de Keisler (1986) usando o instrumental de Robinson.

Considere uma função f real e um número real a, pertencente ao domínio de f. Quando x tem valor a, f(x) tem valor $f(a)$. Suponhamos agora que o valor de x tenha mudado de a para o número hiper-real $a + \Delta x$ que é um infinitesimal próximo de a, mas não é igual a a. Então o novo valor de f(x) será $f(a + \Delta x)$.Esse processo mudou o valor de x para uma quantidade infinitesimal Δx diferente de zero, ao mesmo tempo, que o valor de f(x) foi mudado de quantidade: $f(a + \Delta x) - f(a)$.

A razão para mudar o valor de f(x), para o valor de x é: $\dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Essa razão é usada na definição da inclinação de f. Vejamos:

S é dito a inclinação de f para a se $S = st\left(\dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right)$ para todo infinitesimal Δx diferente de zero.

A inclinação então existe, a razão é infinitamente próxima ao mudar f(x) para uma infinitamente pequena mudança em *x.* Dada a curva y = f(x), a inclinação de f para a é também chamada a inclinação da curva y = f(x) para x = a. A figura (2.4) demonstra que o infinitesimal Δx é diferente de zero e a reta hiper real passa através de dois pontos na curva, para a e $a + \Delta x$. A quantidade : $\dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ é a inclinação dessa reta, e a parte standard é a inclinação da curva.

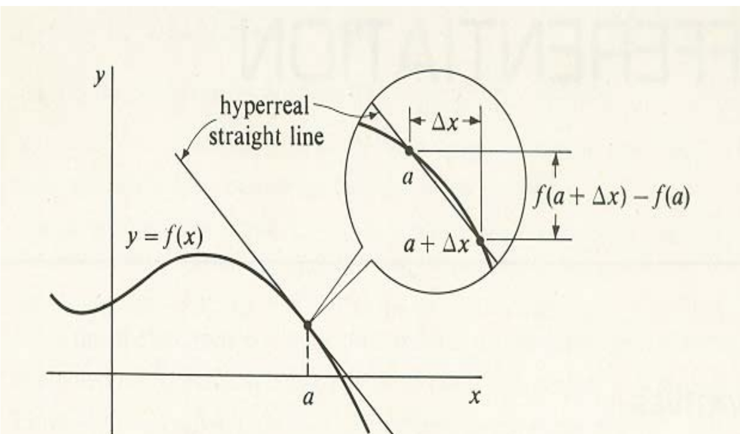


Fig. 2.4

A inclinação de f para a não existe sempre. Aqui está uma lista de todas as possibilidades.

i) A inclinação de f para a existe se a razão $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ é finita e tem a mesma parte standard para todo infinitesimal $\Delta x \neq 0$.

ii) A inclinação de f para a poderia falhar em algum desses quatro casos:

a) $f(a)$ é indefinida.

b) $f(a+\Delta x)$ é indefinida para algum infinitesimal $\Delta x \neq 0$.

c) O termo $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ é infinito para algum infinitesimal $\Delta x \neq 0$.

d) O termo $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ tem diferentes partes standard para diferentes infinitesimais $\Delta x \neq 0$.

Nós podemos considerar a inclinação de f para qualquer ponto x, que daríamos a nova função de x.

Vejamos outra definição: Seja f a função de uma variável. A derivada de f é a nova função f'cujo valor para x é a inclinação de f para x. Em símbolos: $f'(x) = st \left(\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$ quando a inclinação existir.

A derivada $f'(x)$ é indefinida se a inclinação de f não existir para x.

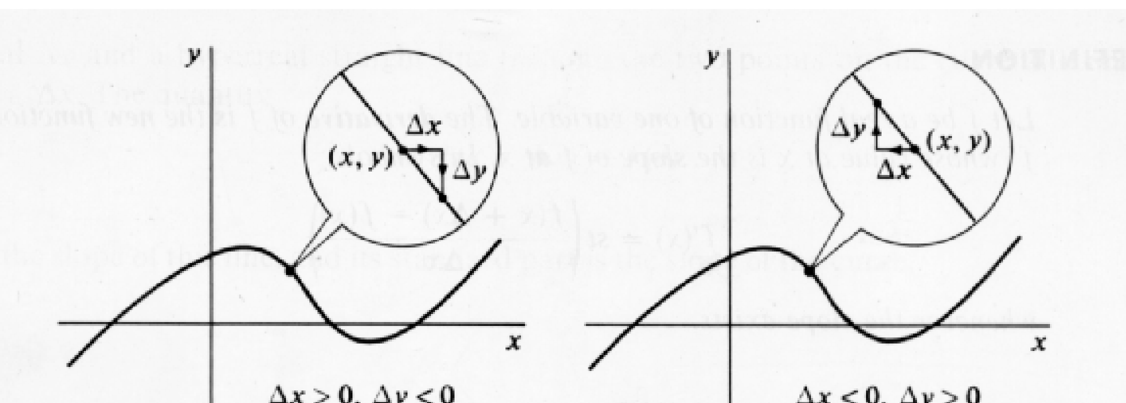
Dado um ponto a, a inclinação de f para a e a derivada de f para a são a mesma coisa. Nós usamos usualmente o termo “inclinação para a ênfase geométrica e “derivada” para
enfatizar o fato de $f'(x)$ ser uma função.

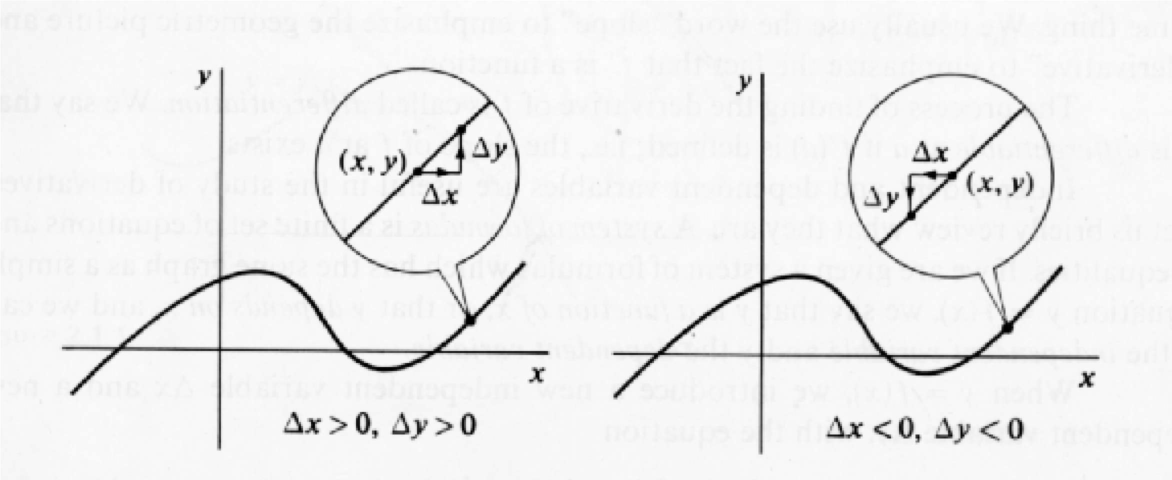
Também usamos variáveis dependentes e independentes no estudo da derivada.

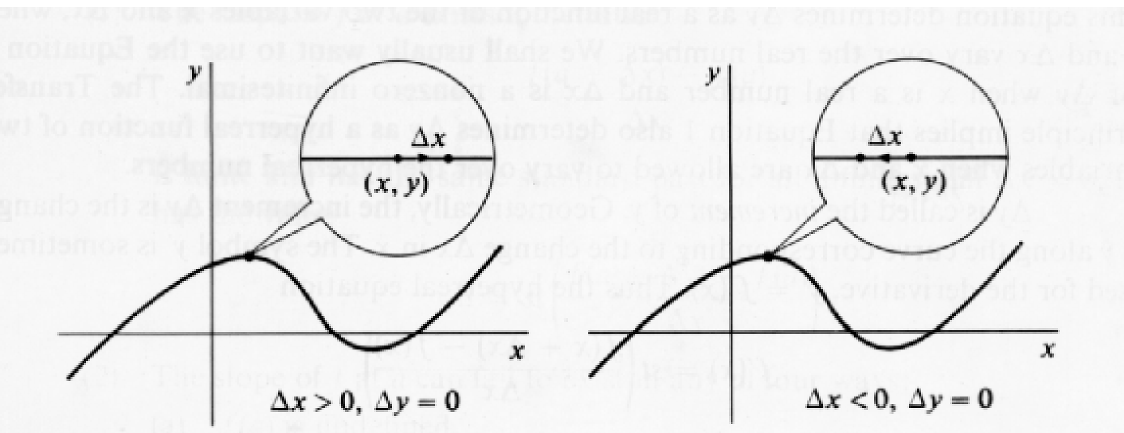
Quando $y = f(x)$, nos introduzimos uma nova variável independente Δx e uma nova variável dependente Δy, com a equação: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

Δy é chamado o incremento de y. Geometricamente, o incremento Δy é a mudança de y ao longo da curva correspondente para uma mudança Δx em x O símbolo y’ é somente utilizado para a derivada, $y'= f'(x)$. Assim, a equação hiper-real : $f'(x) = st \left(\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$ toma uma pequena forma agora. $y'= st \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \right)$. Na verdade, o infinitesimal Δx pode assumir oito variações positivo ou negativa, mas não pode ser zero.

Vejamos isso nos seguintes gráficos abaixo (Fig. 2.5):







Nossa regra da parte standard poderia ser usada em muitos casos para encontrar a derivada de uma função. Há dois problemas para encontrar a derivada *f*' de uma função *f*.

i) Encontrar o domínio de *f*'.

ii) Encontrar o valor de *f*'(x) quando esta é definida.

Para ilustrar, encontrar a derivada da função $f(x) = x^3$ utilizando-se das idéias Robinson.

Nesse exemplo, nós vamos variar o número real x e o infinitesimal Δx diferente de zero. Vamos introduzir uma nova variável y na equação $y = x^3$. Porém, nós encontraremos primeiro $\Delta y/\Delta x$.

$$y = x^3 ,$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 ,$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 ,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} .$$

No próximo passo nós simplificaremos a expressão para $\Delta y/\Delta x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - x^3}{\Delta x}$$

$$= \underline{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}$$

$$\Delta x$$

$$= \quad 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

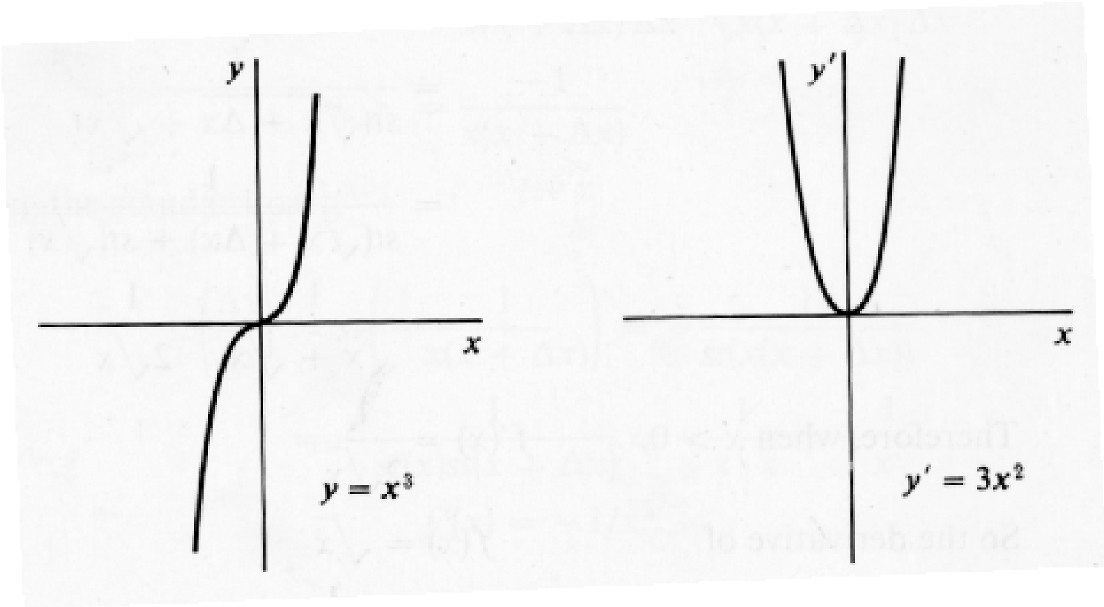
Então tomemos a parte standard,

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\,(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$= st(3x^2) + st\,(3x\Delta x) + st((\Delta x)^2)$$

$$= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2 .$$

Nós demonstramos que a derivada da função $f(x) = x^3$ é a função $f(x) = 3x^2$, com todo o domínio real. Vejamos os seus gráficos (Fig. 2.6 e Fig. 2.7).



1º Caso: x = 0. Então 1/x é indefinida de modo que $f'(x)$ é indefinida.

2º Caso: $x \neq 0$.

$$y = 1/x,$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/(x + \Delta x) - 1/x}{\Delta x}$$

Simplificando,

$$\frac{1/(x + \Delta x) - 1/x}{\Delta x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x\,(x + \Delta x)\,\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x\,(x + \Delta x)\,\Delta x}$$

$$= \frac{-1}{x\,(x + \Delta x)}$$

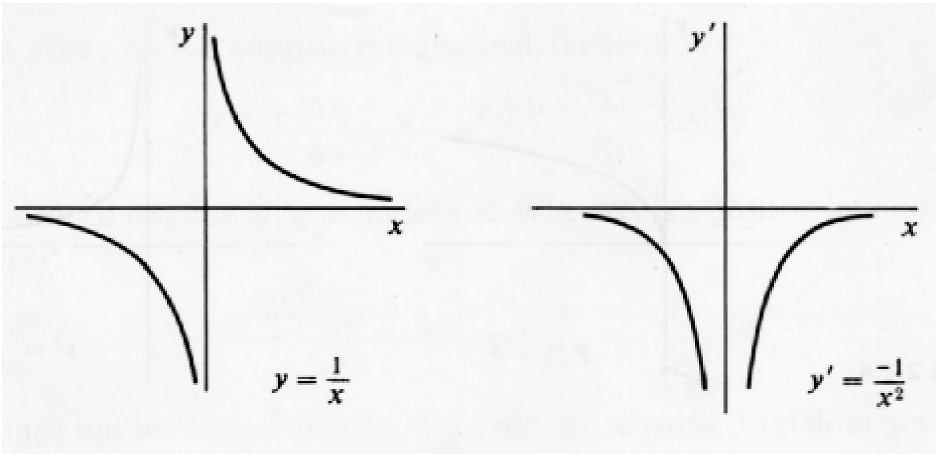
Tomando a parte standard,

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{-1}{x\,(x + \Delta x)}\right) = \frac{-1}{st\,(x\,(x + \Delta x))}$$

$$= \frac{-1}{st(x)\,st(x + \Delta x)} = \frac{-1}{x.x} = \frac{-1}{x^2}$$

Assim, $f'(x) = -1/x^2$.

A derivada da função $f(x) = 1/x$ é a função $f'(x) = - 1/x^2$ cujo o domínio é o conjunto de todo $x \neq 0$. Vejamos seus gráficos.



Segu e para a ciência social. Vejamos uma aplicação no contexto da "taxa de crescimento" de uma certa população: a população y (de pessoas, bactérias, moléculas, etc.) cresce segundo a equação $y = f(t)$ onde t é o tempo. Então a derivada $y' = f'(t)$ é a "taxa de crescimento" da população y no tempo t.

Suponha a população de uma cidade crescendo segundo a equação $y = 100t + t^2$. Encontrar a taxa de crescimento para t = 100 anos.

Seja $\Delta t \neq 0$, infinitesimal.

$$y = 100t + t^2$$

$$y + \Delta y = 100(t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2$$

$$\Delta y = [100(t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2] - [100t + t^2]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{[100(t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2] - [100t + t^2]}{\Delta t}$$

$$= \frac{100\Delta t + 2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= 100 + 2t + \Delta t$$

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = st\,(100 + 2t + \Delta t)$$

$$= st(100) + st(2t) + st(\Delta t)$$

$$= 100 + 2t + 0 = 100 + 2t$$

$$y' = 100 + 2t$$

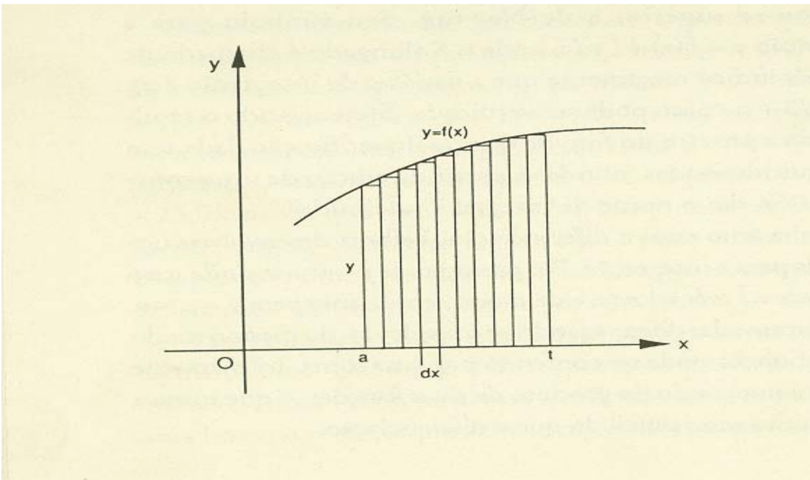
Para t = 100 anos, $y' = 100 + 2.100 = 100 + 200 = 300$ pes/ano.

Contudo, é interessante ver que apesar da necessidade do rigor para fundamentar a derivada, muitos matemáticos não desistiram de tratá-la de forma intuitiva e, conseqüentemente, reconhecê-la em atividades até certo ponto triviais, do cotidiano. Com a devida reserva, pode-se dizer que a maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento (já citada), as leituras de temperatura de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito, entre outros. Na realidade, o cálculo diferencial trata de estudar as mudanças ou, mais especificamente, das taxas de mudança de uma quantidade variável.

INTEGRAL

O conceito de integral é uma noção fundamental do cálculo, assim como o da derivada. Trata de questões que envolvem a interpretação de grandezas que variam continuamente como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com um número cada vez maior de parcelas cada vez menores. Em outros termos, trata do problema de determinar a área de uma figura plana qualquer.

O cálculo de áreas de figuras com contorno curvo através da aproximação pela soma de pequenas parcelas correspondentes a regiões de contorno reto têm origem em Arquimedes, a quem grande parte dos historiadores atribui a antecipação dos métodos de integração. Os rudimentos do cálculo diferencial são atribuídos a Arquimedes, por esse ter achado a tangente a uma curva que não era um círculo – a curva é hoje conhecida por espiral[16] de Arquimedes. Nos séculos XVI e XVII, Kepler, Galileu e Cavaliere, entre outros, empregaram métodos semelhantes para calcular volumes. Problemas sobre curvas e tangentes foram estudados no início do século XVII por Descartes, Fermat e outros. Os conceitos de integral e derivada, foram estudados separadamente até Newton e Leibniz. Nos trabalhos desses matemáticos brilhantes, ficaram estabelecidas as relações de interdependência entre esses dois conceitos.



O conceito de integração de Leibniz diferia do de Newton não somente na notação. Onde Newton via a integração como o inverso da diferenciação (conhecida uma fluxão,

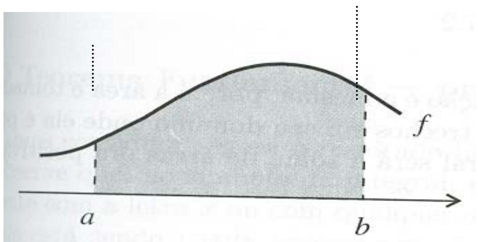
(16) Para Boyer, "*a espiral é definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio ou semi-reta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse por sua vez gira uniformemente em torno de sua origem. Em coordenadas polares a equação é $r = a\theta$*", (1974, p. 93).

encontrar o fluente), Leibniz começou com o problema da área: conhecida uma função $y = f(x)$, encontre a área sob o gráfico de $f(x)$ a partir de algum valor fixo de x, digamos $x = a$ até uma valor variável $x = t$ (Fig. 2. 10). Ele imaginou esta área como a soma de muitas faixas estreitas, de largura dx e alturas y, que variam com x, de acordo com a equação $y = f(x)$. Somando as áreas dessas tiras ele conseguia a área total sob o gráfico: $A = \int y dy$. Seu símbolo para a integração lembra um S alongado (de "soma"), exatamente como seu símbolo da diferenciação (*d*), simboliza "diferença".

Na verdade, Leibniz definiu a integral como uma soma de diferenciais, embora considerasse também como a inversa da diferencial. Estes inversos dos fluxões e da diferencial são equivalentes ao que chamamos hoje de antiderivada, ou a primitiva, ou algumas vezes, simplesmente, a integral. Já Euler usou o conceito de soma para encontrar os valores aproximados de integrais definidas, mas rejeitava a visão leibniziana de integração como um processo de somação, em virtude da interpretação da diferencial como zero. Euler definiu a integral como o inverso da diferencial seguindo a posição adotada por John Bernoulli, no desenvolvimento formal do *Calculus Summatorius de Leibniz*, quando desistiu da definição da integral como uma soma e chamou-a definitivamente o inverso da diferencial.

A teoria da integração "moderna" começou com Cauchy, que no início do século XIX desenvolveu a integral como um "limite", para uma função $y = f(x)$, contínua no intervalo [a,b].

Seja f uma função contínua e positiva num intervalo [a,b]. Sua integral entre os extremos a e b – chamados "limite inferior" e "limite superior" de integração, respectivamente – é definida com sendo a área da figura formada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais x = a e x = b.



Intuitivamente, imaginamos essa área como a soma das áreas de uma infinidade de retângulos de base infinitamente pequena dx e altura correspondente f(x).

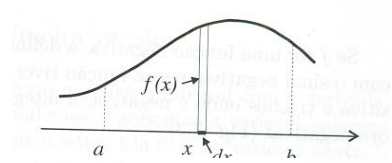


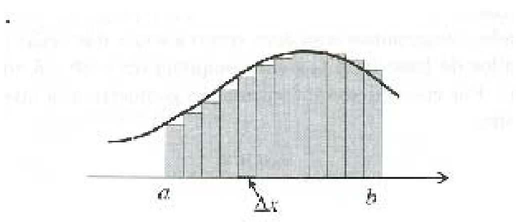
Fig. 2. 12

Por causa dessa interpretação geométrica, a integral costuma ser indicada assim: $\int_a^b f(x)\ dx$,
onde o símbolo "$\int$"é um letra "s" alongada, significando "soma" (conforme já mencionamos); e as letras a e b colocadas nas extremidades desse "s" são chamadas limites de integração , já que são os extremos do intervalo no qual estamos integrando.

Essa interpretação da integral como soma de uma infinidade de áreas infinitamente pequenas pode ser formalizada como o limite de uma soma finita ($A = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\ dx$), da seguinte maneira: dividindo o intervalo [a,b] em um certo número m de subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = (b - a)/n$, pelos pontos $x_0 = a$; $x_1 = x_0 + \Delta x$; $x_2 = x_1 + \Delta x$; $x_3 = x_2 + \Delta x$; ... ; $x_n = b$ e formamos a soma infinita

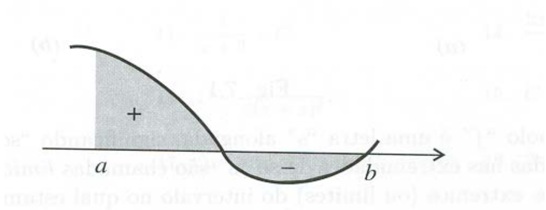
$f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x$.

O termo genérico dessa soma, $f(x_i)\Delta x$ (onde o índice i varia de zero até n - 1), representa a área de um retângulo de base Δx e altura $f(x_i)$.



Ao fazermos $n \to \infty$, essa soma tende a um limite, que é a referida área que define a integral. Nesse processo de passagem ao limite Δx vai-se tornando infinitamente pequeno, daí ser denotado, no limite, pelo símbolo "dx".

Se f for uma função negativa, a definição é a mesma, porém a área é tomada com o sinal negativo: e se a função tiver trechos em seu domínio onde ela é positiva e trechos onde é negativa, será a soma de áreas ora positiva ora negativa (Fig. 2. 14).



De fato, a palavra integral foi feita para indicar que o todo ou a área integral A é composta das partes "infinitesimais" $f(x)$.dx. De qualquer forma, passaram-se quase cem anos depois de Newton e Leibniz para que ficasse claramente reconhecido que o conceito de limite é nada mais que a verdadeira base para a definição de integral (COURANT; ROBBINS, 2000). Lembremos que Courant considerava os infinitésimos como "*nefastas quantidades*", responsáveis pelas ambigüidades da fundamentação do cálculo. Adepto do rigor desenvolvido pelos matemáticos do séc. XIX, disse: "*permanecendo firmemente sobre esta base, podemos evitar o obscurecimento, todas as dificuldades, e todos os absurdos que tanto perturbaram o início do desenvolvimento do cálculo",* (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 488).

O limite é um conceito importantíssimo em Matemática, está intimamente ligado a outro conceito igualmente importante – o infinito. Imaginemos então um polígono com muitos lados inscritos numa circunferência, e imaginemos que o número de lados do polígono aumenta sistematicamente – é daí que veio a idéia da quadratura do círculo. Considerando que este processo seja interminável, torna-se óbvio que o polígono tende para uma circunferência, a qual será seu limite. De modo semelhante, parece claro que o limite da sucessão numérica 0,9, 0,99, 0,999, ... , é o número 1. Porém é pertinente perguntar: 0,999... é igual a 1? Se lembrarmos de Leibniz diria que "*falta um infinitésimo*". Mas da perspectiva do cálculo standard, quando dois números são iguais? Dois números são iguais quando a diferença entre eles for tão pequena quanto se queira. Vejamos:

Seja x = 0,999... (I). Multipliquemos (I) por 10.

10x = 9,999... (II)

Fazendo (II) – (I) temos: $9x = 9$, logo $x = 1$.

Ou, $0,999... = 9/10 + 9/100 + 9/1000 + ... = \dfrac{9/10}{1 - 9/10} = \dfrac{9/10}{9/10} = 1$.

Os matemáticos, ao longo dos tempos, desenvolveram processos para determinar o limite. Muitos destes processos baseiam-se na capacidade de "somar" um número infinito de parcelas, coisa que pode parecer impossível, mas com a qual os matemáticos se familiarizaram nos últimos séculos. Utilizando essa habilidade, sabemos, por exemplo, que 1 mais ½ mais ¼ mais 1/8 mais 1/16 mais 1/32 e assim por diante, *ad infinitum*, dá no limite o resultado 2. Pensar em somas infinitas da perspectiva do cálculo não-standard é matematicamente legítimo. Aliás, pode-se afirmar que do ponto de vista matemático, tanto a teoria dos números reais com os conceitos de limites quanto a dos números hiper-reais, com os infinitésimos, são válidas.

Para Baldino (1995), com a criação dos números hiper reais por Robinson, "*pode-se formalizar o que se entende por uma soma de infinitas parcelas, legitimando o modo pelo qual os alunos gostam de se referir às séries*". (BALDINO, 1995, p.14).

Como sabemos, o tão festejado rigor alcançado pelos matemáticos através da idéia de limite para a fundamentação do cálculo, também foi alcançado por Robinson através dos infinitésimos. A teoria robinsoniana é extremamente rigorosa na sua fundamentação, mas resgata as idéias antigas do cálculo tão fecundas e intuitivas.

De fato, o conceito de integral pode ser compreendido a partir da noção de área, presente na escola básica desde o ensino fundamental. É possível traduzir o seu significado utilizando-se apenas termos não-técnicos, da linguagem cotidiana, através de uma simples contraposição entre grandezas variáveis e constantes. Para Keisler (1986) o conceito de integral pode ser descrito em termos de uma viagem de automóvel. A distância que o hodômetro mostra é a integral da velocidade do tempo zero até o presente, ou seja, a distância encontrada adicionando-se a distância percorrida desde o primeiro uso do carro até o presente.

Com a teoria de Robinson, a idéia de limite perde força como a única capaz de fundamentar dentro dos atuais padrões do rigor, o conceito de integral. A mudança é significativa, epistemologicamente rica por mostrar aos matemáticos que é possível tratar esse conceito de forma intuitiva e com rigor.

Na verdade, Robinson resolveu um importante problema filosófico: mostrou que os infinitésimos não são uma idéia bolorenta nos fundamentos da Matemática, como achava Berkeley. E, embora tenha apresentado novas contribuições para a fundamentação do Cálculo, considerou inúmeras idéias já trabalhadas por outros matemáticos na sua teoria, como por exemplo, as idéias desenvolvidas por Cauchy ao tratar de definição de integral.

Seja $f(x)$ uma função standard que é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$, onde a e b são standard e $a < b$. Com uma partição fina do intervalo (a,b) temos uma seqüência $\{ x_0, x_1, \ldots, x_\omega \}$, onde ω é um número natural de *N , tal que $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_\omega = b$ e $x_j - x_{j-1}$ é um infinitesimal para i = 1, 2, ... , ω. Há partições finas que são internas, por exemplo, a seqüência $\{ x_0 = a , x_1 , x_2, ... < x_\omega = b\}$ que está definida para $x_j = a + (j/\omega)(b-a)$ onde ω é um número natural infinito, é uma seqüência interna nos hiper reais (*R).

Seja $\pi = \{ x_0 , x_1, ... ,x_\omega\}$ uma partição fina interna e seja $\xi = \{ \xi_1 , \xi_2 , ... , \xi_\omega \}$ uma seqüência interna semelhante tal que $x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+1}$, $j = 0, 1, ... , \omega - 1$. Há seqüências internas semelhantes, por exemplo, a seqüência que é dada por $\xi_j = x_{j-1}$, j = 1, 2, ... , ω e também a seqüência dada por $\xi_j = x_j$, j = 1, 2, ... , ω.

Segundo Robinson, defini-se: $S(\pi, \xi) = \sum_{j=1}^{\omega} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$.

S (π, ξ) tem um significado dado no sentido funcional que é a extensão em *R da soma $\sum_{j=1}^{\omega} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ para seqüências $\{ x_0 , x_1, ... ,x_n\}$ e $\{ \xi_1 , \xi_2 , ... , \xi_n\}$ satisfazendo as condições apropriadas, isto é, $x_0 < x_1 < ... < x_n$ e $x_j \leq x_{j+1}$, j = 0, 1, ... , n – 1 em R.

Para qualquer partição fina do intervalo, e para qualquer ξ satisfazendo as condições detalhadas apropriada, $\int_a^b f(x)\,dx = S(\pi, \xi)$.

Segundo Robinson, temos para mostrar essa $\int_a^b f(x)\,dx \cong S(\pi, \xi)$, isto é, para qualquer $\xi > 0$, ou seja $\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(\pi, \xi)\right| < \xi$.

Mas a seguinte declaração é conhecida e verdadeira em R.

"Para todo $\xi > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{\omega} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \xi$ para qualquer $\{x_0 , x_1, ... ,x_n\}$, $\{\xi_1, \xi_2 ,...,\xi_n\}$, tal que $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, $x_j \leq \xi_{j+1} \leq x_{j+1}$, $j = 0, 1, ... , n - 1$, e tal que $|x_j - x_{j-1}| < \delta$ para $j = 1, 2, ..., n$".

Para Robinson, essa declaração poderia ser formulada no vocabulário de K e por conseguinte, pertencer a K e também conter em *R. Mas as condições $|x_j - x_{j-1}| < \delta$, $j = 1, 2, ..., \omega$ é certamente satisfeita para qualquer partição fina desde que nestes casos as diferenças $x_j - x_{j-1}$ sejam realmente infinitesimal. Portanto

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{\omega} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \xi .$$

Passemos a tratar o conceito de integral da perspectiva de Keisler que tão bem compreendeu as idéias de Robinson e as apresenta de forma consistente, porém com uma linguagem mais clara e procedimentos mais acessíveis.

Pode-se dizer que ele começa o estudo da integral como os demais matemáticos, por determinar a área da região delimitada por uma curva y = f(x). Primeiro a região delimitada pela curva é dividida infinitamente em faixas verticais de largura infinitesimal dx. Depois, cada faixa vertical é substituída por um retângulo vertical de altura f(x), base dx e área

f(x).dx. O próximo passo é determinar a soma das áreas de todos estes retângulos. Para isto, faz uso das idéias sobre "somas infinitas" estudadas por George F. G. Reimann (1826-1866).

Vejamos de forma resumida as idéias sobre as somas de Reimann, segundo Robert T. Seeley, professor de Matemática e autor de trabalhos a respeito de integrais singulares, operadores pseudodiferenciais e equações diferenciais parciais.

> *Seja f definida em um intervalo [a,b]. Então, intuitivamente a integral $\int_a^b f$ é a área acima do eixo dos x e sob o gráfico de f, menos a área sob o eixo mas acima do gráfico de f. Pode ser aproximada por somas de Riemann.*
>
> $$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j,$$
>
> *onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ é uma partição do intervalo [a,b] em n subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ e cada ponto de avaliação ξ_j é escolhido no subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$. A soma de Riemann S_n é chamada uma soma superior se $f(\xi_j) = \underset{[x_{j-1}, x_j]}{\text{máx.}} f$, e é chamada uma soma inferior se $f(\xi_j) = \underset{[x_{j-1}, x_j]}{\text{mín.}} f$. Cada soma superior é maior ou igual a $\int_a^b f$, e cada soma inferior é menor do que ou igual a $\int_a^b f$.* (SEELEY, 1973, p. 236).

Para Keisler, a integral $\int_a^b f(x)$ é definida para a parte standard da soma de Riemann, embora exista na soma dos retângulos um erro infinitesimal. Esse erro é removido tomando a parte standard da soma infinita de Riemann para a integral.

Consideremos agora a definição dada por Keisler para a integral.

Seja f uma função contínua no intervalo I e seja a < b dois pontos em I. Seja dx um positivo infinitesimal. Então a integral definida de f de a até b, com relação a dx é definida para a parte standard da soma infinita de Reimann. Em símbolos com relação a dx

$$\int_a^b f(x)\, dx = st(\Sigma_a^b\ f(x)dx\ )$$

Keisler, ainda define: $\int_a^a f(x)\, dx = 0,$

$$\int_a^a f(x)\, dx = - \int_a^b f(x)\, dx$$

Nesta definição, para cada positivo infinitesimal dx a integral definida $\int_u^w f(x)\, dx$ é uma função real de duas variáveis definida para todos os pares (u, w) de elementos em I. O símbolo x é um modelo variável visto que o valor de $\int_u^w f(x)\, dx$ não depende do x.

Na notação $\Sigma_a^b f(x)\, dx$ para a soma de Reimann e $\int_a^b f(x)\, dx$ para a integral usa-se combinação de símbolos para o infinitesimal dx e para o modelo da variável x. Assim quando há duas ou mais variáveis nós podemos dizer que uma é o modelo variável na integral. Por exemplo, x^2t poderia ser integrada de 0 até 1 tanto para x como para t. Com relação a x, $\Sigma_0^1\, x^2t\, dx = x_0^2\, t\, dx + x_1^2\, t\, dx + \ldots + x_{H-1}^2\, t\, dx$ (onde dx = 1/H), e posteriormente nos iremos ver essa integral: $\int_0^1 x^2t\, dx = st\,(x^2\ t\, dx + x^2\ t\, dx + \ldots + x^2\ \ t\, dx) = 1/3t.$

Com relação a t, $\Sigma_0^1 x^2 t\, dt = x_0^2 \overset{0}{t}\, dt + x_1^2 \overset{1}{t}\, dt + \ldots + x_{K-1}^2 \overset{H-1}{t}\quad dt$, e iremos ver posteriormente $\int_0^1 x^2 t\, dt = 1/2x^2$.

Existem vários teoremas e definições a respeito da integral, mas um é considerado como o Teorema Fundamental do Cálculo. Este resultado foi identificado e explorado pela primeira vez por Newton e Leibniz. Eles reconheceram que os processos de integração e diferenciação estavam intimamente relacionados. Esta relação desencadeou uma tremenda evolução no desenvolvimento do cálculo. Vejamos:

Suponha f uma função contínua no seu domínio que é o intervalo aberto I.

(i) Para cada ponto a em I, a integral definida de f para a até x considerada como uma função de x é uma antiderivada de f. Essa é,

$$d\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x)dx.$$

(ii) Se F é qualquer antiderivada de f, então para qualquer dois pontos (a,b) em I a integral definida para f de a até b é igual a diferença de F(b) – F(a),

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Segundo Keisler (1986), o Teorema Fundamental do Cálculo é importante por duas razões. Primeiro por mostrar a relação entre duas noções principais do cálculo: a derivada que corresponde à velocidade; e a integral que corresponde a área. Mostra também que os processos de diferenciação e integração são inversos. De fato, inversos um do outro, como as operações de adição e subtração, ou de multiplicação e divisão.

Exemplos: (1) Encontrar $\int_a^b x\, dx$. $1/2\, x^2$ é uma antiderivada de x. Assim

$$\int_a^b x\, dx = 1/2b^2 - 1/2a^2 = ½(b^2 - a^2).$$

(2) Encontrar $\int_a^b x^2\, dx$. $x^3/3$ é uma antiderivada de x^2 porque

$$\frac{d(x^3/3)}{dx} = \frac{3\, x^2}{3} = x^2.$$

Portanto, $\int_a^b x^2\, dx = 1/3b^3 - 1/3a^3 = 1/3(b^3 - a^3)$.

Vejamos esta região delimitada pela curva $y = x^2$ entre a e b.

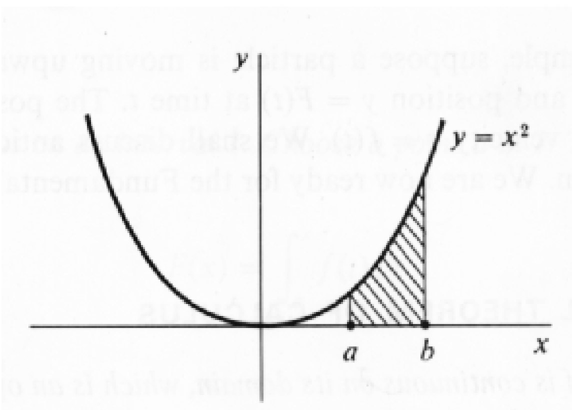


Fig. 2.15

Se uma partícula se move ao longo do eixo x com velocidade contínua v = f(t), a posição y = F(t) é uma antiderivada da velocidade, porque v = dy/dt. O Teorema Fundamental do Cálculo mostra que o movimento dessa distância (a mudança em y) entre tempo t = a e t = b é igual para a integral definida da velocidade.

Distância percorrida = F(b) – F(a) = $\int_a^b f(t)\, dt.$

Exemplo: uma partícula move-se ao longo do eixo x com velocidade v = $8t^3$ cm/s. Qual a distância percorrida entre o tempo t = -1 e t = 2 segundos? A função G(t) = $2t^4$ é uma antiderivada da velocidade v = $8t^3$. Dessa maneira a integral definida é.

Distância percorrida = $\int_{-1}^{2} 8t^3\, dt = 2.2^4 – 2.(-1)^4 = 30$ *cm.*

O Teorema Fundamental do Cálculo também mostra que toda função contínua f tem pelo menos uma antiderivada, isto é, F(x) = $\int_a^x f(t)\, dt.$ F(x) é a área embaixo da curva y = f(t) de *a* para *x*. Realmente, f tem infinitamente muitas antiderivadas, mas qualquer duas antiderivadas de f difere-se somente por uma constante. Esse é um importante fato a cerca de antiderivadas, o qual aparece no teorema seguinte.

Seja f uma função real cujo domínio é aberto no intervalo I.

(i) Se F(x) é uma antiderivada de f(x), então F(x) + C é uma antiderivada de f(x) para todo número real C.

(ii) Se F(x) e G(x) são duas antiderivadas de F(x), então F(x) – G(x) é constante para todo x em I. Isto é, G(X) = F(x) + C para algum número real C.

Comentando.

(i) e (ii) juntas nos mostra que: se podemos achar uma antiderivada F(x) de f(x), então a família de funções F(x) + C, (sendo C um número real) dão todas as antiderivadas de f(x).

Segundo Keisler (1986), podemos ver que o gráfico de F(x) + C é justamente o gráfico de F(x) e F(x) + C, e têm a mesma inclinação para todo ponto x. Por exemplo, seja $f(x) = 3x^2$.

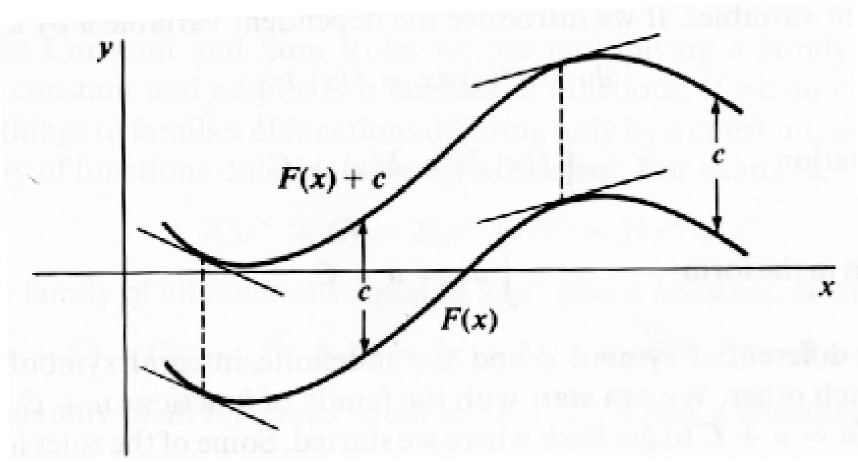


Fig. 2.16

Então $F(x) = x^3$ é uma antiderivada de $3x^2$ porque $d(x^3)/dx = 3x^2$. Mas $x^3 + C$ e $x^3 - \sqrt{2}$ são também antiderivadas de $3x^2$ para todo número real C.

Em suma, pode-se dizer que a prova de (i) é dada pelo processo de diferenciação, ou seja, $\frac{d\,(F(x) + C)}{dx} = \frac{d\,(F(x))}{dx} + \frac{dC}{dx} = f\,(x) + 0 = f(x)$.

De (ii). Se a função tem derivada zero em I, então a função é constante em I. A diferença $F(x) - G(x)$ tem derivada $f(x) - f(x)$ e é portanto constante.

Para calcular a integral de f, usualmente trabalha-se com a família de todas antiderivadas de f. O símbolo para a integral indefinida é $\int f(x)\, dx$. Se F(x) é uma antiderivada de f, a integral indefinida é o conjunto de todas as funções da forma $F(x) + C_0$, C_0 constante. Simbolicamente:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

É uma equação entre duas famílias de funções, até certo ponto, entre duas simples funções. C é chamada a constante de integração. Para ilustrar, $\int 3x^2\, dx = x^3 + C$.

A integral indefinida pode ser usada para resolver problemas do tipo. Dada uma partícula que se move ao longo do eixo x com velocidade $v = f(t)$, e essa em um certo tempo $t = t_o$ sua posição é $y = y_0$. Achar a posição y como uma função de t.

Exemplo. A partícula se move com velocidade $v = 1/t^2$, $t > 0$. Em um tempo $t = 2$ sua posição $y = 1$. Achar a posição y como uma função de t.

Calculando: $\int v\, dt = \int 1/t^2\, dt = -1/t + C$.

Visto que $dy/dt = v$, y é uma das funções na família $-1/t + C$. Podemos encontrar a Constante C, fazendo $t = 2$ e $y = 1$.

$y = -1/t + C$; $1 = -1/2 + C$; $C = 3/2$

Então a resposta é: $y = -1/t + 3/2$.

O que acabamos de dizer da integral é na verdade uma síntese, pois deixamos de apresentar alguns teoremas, definições e regras. Enfatizamos os aspectos que julgamos mais pertinentes à compreensão do conceito de integral, tendo por base as idéias do cálculo não-standard. Sabemos, porém, que apesar de termos limitado nossos olhares, fizemos um recorte significativo. A intenção é suscitar discussões que possibilite discutir tais conceitos no ensino do nível médio, daí nossa escolha por não apresentar os aspectos mais relacionados com as técnicas do cálculo, a exemplos das diversas regras existentes.

Ainda sobre as noções do cálculo é fundamental perceber que os conceitos de derivada e integral tiveram sua origem nos conceitos de reta tangente e área e, que por muito tempo foram fundamentados pela geometria, embora ocorressem idéias nebulosas. Pode-se dizer que a geometria euclidiana é o resultado das generalizações feitas pelo homem durante alguns milhares de anos. Mas por uma curiosa coincidência, foi justamente quando a geometria euclidiana começou a revelar suas falhas de fundamentos, nas primeiras décadas do século XIX, que começaram os esforços bem-sucedidos para fundamentar o Cálculo fora da Geometria. A negação do famoso quinto postulado da geometria de Euclides: "*por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única paralela a essa reta*" por exemplo, levou à criação de outras geometrias: as geometrias não-euclidianas, cujo maiores expoentes foram Nicolai Lobachevsky (1793-1856) – aluno e professor da Universidade de Kazan, que publicou seu primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana "*On the Principles of Geometry*" em 1829 no *Kasan Bulletin*, tornando-se um dos primeiros matemáticos a construir uma geometria cuja base era uma hipótese em conflito direto com o quinto postulado euclidiano: "*por uma ponto C fora de uma reta m pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra m*", e Riemann que em 1854 mostrou que, ao descartar a infinitude da reta era possível criar outras geometrias também consistentes. Nas geometrias não-euclidianas há triângulos e triângulos ..., isto é, há triângulos nos quais a soma de seus ângulos internos pode medir mais ou menos que 180º graus.

Na realidade, as geometrias não-euclidianas provocaram rupturas epistemológicas importantíssimas. O conceito de verdade foi mudado – acabaram com verdades eternas absolutas. Os matemáticos começaram a rever idéias que foram repetidas durante séculos, em escolas do mundo inteiro, como uma verdade "*evidente por si mesma*", a exemplo do famoso postulado de Euclides, que estava acima de qualquer discussão: "*O todo é maior que qualquer uma de suas partes*". A preocupação nesta época era buscar novos fundamentos para os conceitos matemáticos e foi exatamente o que aconteceu com o cálculo, abandonou-se o enfoque geométrico em busca de uma fundamentação baseada nos números. Mas o que Robinson constatou na sua teoria não-standard foi a possibilidade concreta de tratar os conceitos do cálculo considerando tantos os aspectos geométricos (mais intuitivos) quanto os numéricos – uma intuição mais elaborada. Desse modo, pode-se dizer que é a interação entre o geométrico e o numérico que faz com que os conceitos do cálculo não-standard possam de fato, serem compreendidos, inclusive no ensino médio.

CAPÍTULO III
A CIÊNCIA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Em meio a tantas definições sobre ciência, diremos que a ciência possui dimensões tais como: descobrir e descrever através de uma linguagem rigorosa e apropriada os aspectos factuais do mundo empírico, as relações do mundo das idéias e propor e testar explicações sobre o por quê o mundo funciona e como funciona. O compromisso maior da ciência é com o conhecimento através da verdade. A verdade é a idéia nuclear do conhecimento. Há diferentes tipos de verdade (citaremos os mais conhecidos): *coerencial, correspondencial e consensual.* Pode-se dizer que a verdade por consistência ou coerencial é característica da ciência matemática; já a verdade por correspondência é característica da ciência física e a verdade consensual ou pragmática é característica das ciências humanas. É importante ressaltar a necessidade da existência de um permanente diálogo entre as diferentes verdades.

Sobre a Matemática, através de Keith Devlin, autor do interessante livro "*O Gene da Matemática*", diremos que a "*matemática é a ciência da ordem, padrões, estruturas e suas relações lógicas.*"(DEVLIN, 2004, p. 95-96). Essa definição, embora expressa de forma sucinta tem um caráter amplo. Aliás, é justamente por ser sucinta e ampla que a consideramos pertinente ao nosso propósito de apresentar uma definição da ciência matemática para alunos do ensino médio.

Desde a Grécia Antiga, que a Matemática é considerada uma ciência. O conhecimento matemático foi um dos primeiros – se não o primeiro, a estruturar-se num corpo ordenado de conhecimentos, com seu objeto bem definido e a sua metodologia própria. A geometria euclidiana é um dos mais belos exemplos desta estruturação, cuja metodologia foi instituída pelo matemático grego Euclides (séc. III a.C). De qualquer modo, o conhecimento matemático ao desenvolver-se, tornou-se parte essencial da cultura contemporânea por fornecer instrumentos (conceitos, analogias, modelos, etc.) para o estudo da natureza, além de inquietações filosóficas e também estéticas. Portanto, sua presença na educação básica e, conseqüentemente, no ensino médio é indiscutível.

> *A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.* (BRASIL:PCNEM, 1999, p.251).

Voltemos à definição acima. O que quer dizer "padrões", "ordem", "relações"... ?

Faz-se necessário, algumas, explicações. Usada numa acepção ampla pelos matemáticos, a palavra "padrão", nessa definição não se restringe a padrões visuais, como os de papel de parede, os das pedras de uma certa calçada, ou os de azulejos no chão do banheiro; embora possam ser estudados matematicamente Segundo W.W. Sawyer, apud Devlin (2004, p. 95), deve ser entendida como "*cobrindo quase qualquer tipo de regularidade que se pode imaginar na mente.*" E,

> Os padrões e relações estudadas pelos matemáticos ocorrem por toda parte na natureza: os padrões simétricos das flores, os padrões – muitas vezes complicados – dos nós, das órbitas descritas pelos planetas à medida que se deslocam nos céus, os padrões da pelagem de um leopardo, o padrão de votação de uma população, o padrão produzido pelos resultados aleatórios num jogo de dados ou na roleta, a relação entre as palavras que formam uma

> frase, os padrões de som que reconhecemos como música. Às vezes os padrões são numéricos e podem ser descritos usando-se a aritmética – os padrões de votação, por exemplo. Mas, com freqüência, eles não são numéricos – por exemplo, os padrões de nós e os padrões simétricos das flores pouco têm a ver com números.(DEVLIN, 2004 p.96).

Para alguns matemáticos, a Matemática pode ser definida sucintamente como "*a ciência dos padrões*" (DEVLIN, 2004)[1]. Nesta mesma perspectiva, embora considere ser impossível definir rigorosamente a Matemática (até agora), Borges (2001) nos diz que há uma definição que poderia servir de guia ao professor de Matemática: - "*a matemática é a procura de padrões*"(BORGES, 2001, p.3). Podemos dizer que, dessa definição, surge a necessidade de desenvolver na educação básica o hábito da observação, das semelhanças e das diversidades para que o aluno seja colocado no caminho da procura de padrões. Para Borges (2001), poucas ciências se igualam à Matemática na apresentação de situações nas quais esse exercício possa ir às últimas conseqüências. Mas adverte que não se deve transformar a Matemática em simples esquemas abstratos logicamente manipuláveis e, muito menos, em simples receituário.

A Matemática, embora ciência formal, o que pode dar a idéia de algo estático, é uma ciência viva, não apenas no cotidiano das pessoas, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos, que têm sido usado na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância. Um exemplo interessante dessa produção são as "álgebras não associativas" também conhecidas com "álgebras genéticas" – existem grupos formados por matemáticos e geneticistas

(1) Keith Devlin nos diz que a frase "*matemática é a ciência dos padrões*" não é sua. Na verdade a viu pela primeira vez impressa como título de um artigo na revista *Science*, feita pelo matemático Lynn Steen, em 1988. Também nos diz que Steen admite não ser o autor dela e que a fonte escrita mais antiga que descobriu foi no livro de 1955, *Prelude to Mathematics*, de W.W. Sawyer. (2004. p.94).

trabalhando com esse sistema matemático, cuja a operação da multiplicação é não associativa. Mas não é só isso, além do caráter pragmático do conhecimento matemático, temos os aspectos especulativos (filosóficos) e estéticos sem os quais o conhecimento matemático perde parte da sua natureza.

Pode-se afirmar que o conhecimento matemático, do ponto de vista do ensino, apresenta características peculiares: o caráter abstrato, a precisão dos conteúdos, o rigor do raciocínio e a especificidade da linguagem. Essas peculiaridades são pontos que merecem à atenção tanto por parte de quem vai ensinar, como de quem vai aprender Matemática. A fecundidade – talvez sem limites – da Matemática, reside no seu alto grau de abstração. São construídas abstrações sobre abstrações num processo que não parece ter fim e, sabemos pelos estudos dos especialistas, que quanto mais abstrato é um conceito, maior a sua área de aplicação. A Matemática parece a ciência ideal para fornecer modelos às outras ciências.

Podemos dizer que a Matemática é altamente abstrata, tanto em seus métodos como em seus objetos. Dessa peculiaridade surge a necessidade de seu ensino receber um tratamento mais cuidadoso. Na verdade, não se aprende partindo-se do geral para o particular, a não ser em níveis bem especializados. Portanto, a marcha é do familiar para o abstrato, do particular para o geral, da intuição sensível à intuição mais elaborada - intelectual.

Mas, alguns livros e professores violam esse princípio básico da aprendizagem. O resultado dessa prática é o mal estar causado nos alunos e, conseqüentemente, a falta de interesse que estes têm demonstrado.

Algo mais precisa ser dito, contudo, sobre o nome Matemática. Na verdade, qual a origem do nome Matemática? Sabemos que sua origem está na língua grega. Porém, como não temos conhecimento suficiente do grego, optamos por transcrever um trecho do artigo *O nome "Matemática"* do renomado professor e pesquisador da Matemática, Irineu Bicudo, que trata deste assunto, com algumas adaptações, publicado em 2003 no "*Folhetim de Educação Matemática*", em número especial.

A língua grega clássica possui um verbo, MANTHÁNO, em polaridade com um outro, DIDÁSKO. Este significa "ensinar, instruir", aquele, "aprender". A nuança expressa nos textos antigos, em relação a mantháno, é "aprender praticamente, aprender por experiência, aprender a conhecer, aprender a fazer", mas acaba por se aproximar do sentido de "compreender".

Dos substantivos de ação derivados desse verbo, Bicudo destaca "MÁTHESIS", "ação ou fato de aprender" (chegando, por alargamento de sentido, até "conhecimento, instrução, ciência"), e o resultativo "MATHEMA", "aquilo que é aprendido"(culminando, por extensão, com "aprendizagem, conhecimento, ciência"). O plural de "tò máthema" é "tà mathêma", já usado por Árquitas, Platão e outros para designar "o conhecimento matemático".

O substantivo vernáculo "matemática" (como muitos outros substantivos portugueses, "gramática", "dialética", "retórica",...) era, na língua grega, a forma feminina de um adjetivo, "MATHEMATIKÊ". O feminismo sendo exigido pela concordância com o substantivo feminino "TÉCHNE" ("o saber fazer de uma profissão; técnica, arte"), que acompanhava sempre o adjetivo: "he mathematikêtéchne", literalmente, "a arte relativa àquilo que pode ser aprendido". Com o tempo, o substantivo "téchne" deixou de ser mencionado, e o adjetivo "mathematikê", ganhou status de substantivo: "he mathematikê", "a matemática".

Mas como os antigos explicavam o nome Matemática?

Anatólio, bispo de Laodicea (ca. 280 A.D.), citado por Heron (Definições), justifica do seguinte modo a origem do nome "matemática" (traduzido do grego clássico):

"E a partir de que foi chamada matemática?

Os peripatéticos, afirmando, por um lado, alguém haver de ser capaz, não tendo aprendido, de familiarizar-se com a retórica, com a arte da poesia, e com a música popular, como um todo, e, por outro lado, relativamente às coisas que são, particularmente, chamadas <u>mathêmata</u>, ninguém aprender o conhecimento, sem antes ter passado pela instrução dessas coisas, pensavam ser chamada matemática a teoria dessas coisas, por causa disso".

Para Bicudo, desde que os gregos conceberam nossa ciência, como a entendemos hoje, está expresso em seu nome ("que, em certo sentido, é a própria coisa") que ela não é, como a retórica, ou a poesia, ou a música, um presente dos deuses aos homens, gratuitas. Não, a matemática, para ser conhecida, demanda estudo árduo, persistência, ânimo forte, paixão, pois, aqui, "os deuses vendem, quando dão".

Sem dúvida, já nos perguntaram muitas vezes para que serve a Matemática, e se as idéias matemáticas apresentadas no ensino médio não são concebidas por nosso capricho enquanto professor.

Para responder a essas questões, argumentaremos que é fundamental mostrar ao aluno do ensino médio, geralmente jovens entre 14 e 17 anos, que a ciência matemática trata da formação das primeiras abstrações a partir da experiência. Exemplificando: a idéia de função como abstração da causalidade (causa e efeito) sendo aquela representada pela variável independente e este pela variável dependente. Outros exemplos (já citados): o conjunto dos naturais como abstração da contagem e o conjunto dos racionais como abstração das medidas. Da elaboração de novos conceitos matemáticos a partir de conceitos anteriores – a criação dos números complexos a partir dos reais, funções de várias variáveis e sua organização em teoria, e da correspondência entre a verdade coerencial e a verdade correspondencial – são as aplicações.

A Matemática tem inúmeros aspectos a serem considerados em se tratando do seu desenvolvimento e ensino. Para torná-la atraente no ensino médio, é preciso considerar os aspectos mais pertinentes ao ensino dessa ciência: históricos, filosóficos e conceituais. Segundo E. L. Lima (2001), é possível tirar proveito das muitas faces (aspectos) da Matemática na organização do seu ensino. Vejamos suas considerações com as quais concordamos.

> ** Ela é como uma arte, onde o enlace das proposições, as conexões entre suas diversas teorias, a elegância e a limpidez dos seus raciocínios, a singela eloqüência de seus enunciados e a surpresa de algumas de suas conclusões enlevam o espírito e comprazem nosso senso estético.*
> ** Ela é também um eficaz instrumento, às vezes simples em suas aplicações cotidianas, às vezes sutil e complexo quando empregado na solução de problemas tecnológicos ou na formulação de teorias científicas, pois dispõe de um inesgotável repertório de modelos abstratos que podem ser usados nas mais diversas situações concretas.*
> ** Ela é uma linguagem precisa e geral, tão bem sucedida que o fato de poder exprimir princípios científicos por meio dela é uma prova do estado avançado dessa ciência.*
> ** A Matemática é ainda um grande desafio, tanto do ponto de vista lúdico, que a tornou popular desde tempos imemoriais com seus problemas folclóricos, como na disputa eterna entre o matemático e a verdade oculta sob várias formas*. (LIMA, 2001, p.160).

Na realidade, as considerações de Lages soam como um desafio ao processo ensino-aprendizagem da Matemática, em especial ao professor. A este, caberá mostrar ao aluno do ensino médio que aprender Matemática contribuirá para sua formação enquanto cidadão (um dos objetivos da educação básica) como também para conhecer como as verdades científicas constituíram-se ao longo dos séculos.

Há muitos motivos respeitáveis pelos quais os alunos do ensino médio podem empreender para aprender Matemática. O primeiro é desenvolver a curiosidade intelectual – o desejo de conhecer a verdade, as idéias, o saber por que as coisas são assim (crucial nesta época de suas vidas). Depois, o orgulho, a ânsia de ficar satisfeito com seu próprio desempenho – mostra do que é capaz. Por fim, o desejo de alcançar o reconhecimento familiar e social (aprovação em vestibulares e concursos) e até mesmo poder e dinheiro.

A Matemática é formada por diversos ramos. Um dos mais trabalhados na educação básica é a aritmética pela grande familiaridade e simplicidade de suas regras, o que a torna mais acessível à pessoas com menos instrução. "*A aritmética é a base de toda a matemática, pura ou aplicada. É a mais útil das ciências e provavelmente não existe nenhum outro ramo do conhecimento humano tão espalhado entre as massas*",(DANTZIG, 1970, p.44).

Será que podemos dizer que a Matemática é uma ciência popular? O grande matemático inglês G. H. Hardy(1877-1947), na obra *Em defesa de um matemático* diz que

> *Existem poucas matérias mais "populares" que a Matemática. A maioria das pessoas entendem um pouco de matemática, assim como a maioria das pessoas consegue apreciar uma melodia agradável; e provavelmente existem mais pessoas interessadas em matemática do que em música. As aparências podem até dar a entender o contrário, mas é fácil explicar isso. A música pode ser usada para estimular as emoções das massas, ao passo que a matemática não, e a incapacidade musical é tida (sem dúvida com razão) como uma imperfeição leve, ao passo que a maioria das pessoas tem tanto medo do nome da matemática que está sempre pronta, sem falsa modéstia, a exagerar a sua própria burrice matemática.* (HARDY, 2000, p.82).

Desejamos refletir um pouco sobre o que disse Hardy na primeira metade do século XX. Para tanto, basta observar com atenção para notar que no ensino médio, a grande maioria dos alunos tem uma resistência bastante acentuada em relação a ciência Matemática. Muitos alunos dizem abertamente que não sabem nada sobre Matemática e pior, que não desejam aprender.Será o exagero à burrice da qual fala Hardy, ou é a popularidade da Matemática que está em baixa?

Para o renomado matemático brasileiro e professor Omar Catunda (1906-1986), é sabido, e facilmente comprovado, que aos 2 ou 3 anos a criança começa a aprender a contar; pouco a pouco, vai ampliando o campo dos números conhecidos e quando for capaz de escrever, aprenderá também o sistema decimal de numeração. Durante o curso primário – hoje da 1ª a 4ª série do ensino fundamental, é possível ensinar progressivamente, as quatro operações, com muitas aplicações, bem como as principais figuras geométricas e suas medidas.

Um aspecto a observar, segundo Catunda (1993), é que muito cedo desponta na criança uma nova curiosidade, um rudimento de raciocínio de que é típica a pergunta *por que*? , com a qual muitas crianças azucrinam a paciência dos pais. É que o cérebro humano, desde a infância, não se contenta em receber e arquivar na memória as informações fornecidas pelos sentidos; ele tem exigências dinâmicas, precisa conhecer a razão dos fatos que presencia, a concatenação dos fenômenos e das idéias. Essa exigência da mente humana é que constitui a função essencial do ensino da matemática, ao longo da infância e da adolescência. Esse treinamento do raciocínio, essa formação do ser racional, é muitíssimo mais importante do que o conhecimento de fórmulas e regras decoradas para resolver problemas padronizados.

Catunda também nos diz que, como a formação da mentalidade se processa ao longo de vários anos, é preciso que o ensino de cada tópico seja adaptado ao estágio de desenvolvimento intelectual dos alunos. Por isso o planejamento de um ensino formativo, com os sucessivos processos racionais – experimentação, justificação intuitiva, comparação com resultados conhecidos, prova e demonstração, só pode resultar de uma colaboração de matemáticos e pedagogos especializados.

Diante desse contexto, não deixa de ser preocupante a incapacidade demonstrada por parte dos alunos no ensino médio, visto que, já estudaram Matemática no ensino fundamental. Era para realmente conhecerem um pouco de Matemática – achá-la popular como afirma Hardy e apresentar uma certa curiosidade em relação à Matemática pelo que nos diz Catunda. Mas como sabemos, ainda que mecanicamente – resultado do atual ensino, a maioria dos alunos do ensino médio continuam sem conhecê-la, melhor, sem aprendê-la.

Portanto, para conseguir progressos frente à resistência dos alunos, acreditamos ser preciso reorganizar o processo ensino-aprendizagem da ciência Matemática no ensino médio, pois é fato que,

> *Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil a partir dos anos 20, não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão*.(BRASIL: PCN/MATEMÁTICA, 1998, p.19).

Podemos começar por levar em conta, a fim de atender às exigências da sociedade tecnológica moderna, às necessidades do mundo do trabalho, a penetração e a importância crescente das técnicas matemáticas em diversos ramos do conhecimento, por reconhecer que ela progride à medida que novas descobertas criam a necessidade de alterar (pelo princípio da extensão) explicações anteriores e por enfatizar com bastante clareza, que não é possível uma ciência feita só de aplicação.

Sabemos *por experiência* que o aspecto utilitarista da ciência matemática está em voga na educação básica. Daí pergunta-se: que sentido tem no ensino médio buscar uma ciência só de aplicação? É evidente que tal preferência prejudica outros aspectos igualmente importantes e, se o aluno do ensino médio está na fase de saber o por que das verdades científicas, tal preferência não se justifica, até porque, "*as verdades só são fecundas se forem ligadas umas às outras. Se nos prendemos somente àquelas das quais se espera um resultado imediato, faltarão os elos intermediários, e não haverá mais cadeia*"(POINCARÉ, 1995, p.89).

Observemos que a idéia que decorre das palavras de Poincaré é a busca por estabelecer relações entre os diversos aspectos da Matemática e não particularizar, restringir, ..., é preciso generalizar. A fecundidade da Matemática se encontra na generalização das propriedades essenciais dos objetos; é uma necessidade característica do conhecimento matemático que se impõe desde as idéias mais simples às mais complexas. Já definir, inferir e demonstrar são atos inerentes à aprendizagem matemática. Os conceitos de generalização e demonstração evidenciam o caráter original da Matemática, (BORGES, 2002d).

Vejamos um exemplo de como generalizar. Comecemos com o caso da potenciação – operação bem conhecida pelo aluno do ensino médio. Parte-se de observações empíricas para expoentes inteiros e positivos: 2^5, 3^5, 7^{250}, etc.. Apresentam um significado intuitivo e sugerem a *definição por recorrência*[2]: para todo número real *a* positivo e para todo número inteiro $n \in$ N, a potência enésima de *a*, é definida por:

$a^1 = a$

$a^{n+1} = a^n \,.\, a$

Dessa definição chega-se às regras da multiplicação e divisão de potências inteiras positivas.

$(a^n)^m = a^{nm}$;

$a^n \,.\, a^p = a^{n+p}$;

$a^n / a^p = a^{n-p}$ (n > p)

Em seguida outra generalização; procura-se a extensão daquelas regras de cálculo quando os expoentes são inteiros relativos. Na terceira generalização incluem-se os expoentes racionais, em seguida os reais e finalmente os complexos. Veja como cada uma dessas generalizações enriquece o saber matemático.

> *O saber matemático compreende o domínio do sistema de representação e também das regras que regem ações abstratas. A leitura (compreensão) de*

escritas matemáticas requer o conhecimento do sistema de notação. Sem este conhecimento, torna-se difícil ligar as expressões simbólicas com os significados. Tais características exigem do ensino medidas específicas para que as informações veiculadas nas aulas se transformem em conhecimento. Para resolver uma equação, o indivíduo precisa saber, pelo menos, o significado dos símbolos utilizados, as relações implícitas e os passos ou os procedimentos adequados a cada situação; se desconhecer isso, ou parte disso, os resultados são prejudicados. (MICOTTI, 1999, p.163).

Esse aspecto de generalização precisa ser melhor tratado em nossas salas de aula, principalmente no ensino médio. Ele é fundamental na procura de analogias com fatos matemáticos, como, com fatos de outros ramos científicos.

Diante dessas características peculiares à Matemática, que atitude tomar quanto ao ato de ensiná-la no ensino médio? Já falamos que o aspecto utilitarista tem sido fortalecido, mas está longe de ser suficiente. Porém, se compreendemos que há vários aspectos a serem trabalhados no ensino, torna-se necessário enfatizá-los. De qualquer modo, será preciso estabelecer uma atitude ousada que faça interagir os diversos aspectos pertinentes ao ensino, por isso, não hesito em dizer que a Matemática merece ser abordada em uma perspectiva mais *contextualizada* no ensino médio.

É pertinente enfatizar o que queremos dizer quando utilizamos a palavra *contextualizada*. Queremos dizer que nos referimos a um processo de ensino que busque a interação dos aspectos históricos, filosóficos, conceituais e pedagógicos dos conceitos matemáticos, como também dos conceitos matemáticos com outros ramos científicos. A nossa preocupação em chamar à atenção se justifica porque a palavra "contextualização", na maioria das vezes, é utilizada como referência apenas ao aspecto utilitarista da Matemática.

Desde 1996, com a aprovação da Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/9394) pelo Congresso Nacional e depois com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) instituídos pelo Conselho Nacional de Educação (1998), que a "contextualização" passou a ser uma das diretrizes para um ensino de qualidade defendida nos documentos oficiais referentes à educação básica, aqui no Brasil. E, cabe reconhecer que, depois da divulgação dos PCNs para ensino o fundamental e dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEMs), pelo Ministério da Educação (MEC), praticamente, todos os professores que atuam na educação básica passaram a falar de "contextualização".

Vejamos alguns aspectos da "contextualização" enfatizados nos PCNEMs:

Contextualizar o conteúdo que se quer aprendido significa, em primeiro lugar, assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. [...] O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo.[...] A

---

(2) A definição por recorrência consiste em definir uma propriedade para o número 1 (ou 0). Em seguida, definir, como a propriedade segue de n para n + 1. Exemplo: 1.a = a; (n + 1).a = n. a + a . Com estas equações juntas é, por exemplo, definida a multiplicação de um número real *a* pelos naturais. (cf. DICIONÁRIO DE MATEMÁTICA, 1980).

contextualização evoca por isso áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas.(BRASIL: PCNEM, 1999, p.91).

E ainda,

A contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar. O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele. (PAIS, 2001, p.27).

Contudo, o tipo de contextualização que tem sido evidenciada no ensino médio, atualmente, ao tratar da ciência matemática não tem contribuído de forma significativa para a aprendizagem matemática, embora saibamos que, a contextualização do ensino da ciência matemática não é bem uma "novidade" pós PCNs; encontra-se inúmeras referências à contextualização em Matemática anteriores aos PCNs (ÁVILA, 1994; BORGES, 1983; CARVALHO, 1994; CATUNDA[3], 1972; LIMA, 1991).

Percebe-se claramente que falta encontrar caminhos para mostrar que os avanços que fazemos na compreensão de uma certa ciência, no caso - a Matemática, vêm de observações, de descobertas intelectuais e das idéias inéditas que novas reflexões trazem à nossa forma de organizá-la, pois da maneira como a organizamos emerge o modo como a compreendemos. É preciso deixar claro no ensino médio que nossas construções mentais baseiam-se em fatos - são eles que desejamos explicar, mas que as teorias científicas vão muito além dos fatos. Através delas é possível explicar situações que aparentemente são consideradas contraditórias, que os olhos não vêem, mas que são identificadas pela lógica da razão.

Mas antes de ir mais adiante, vejamos o que diz os PCNEMs sobre o ensino médio, a ciência e o saber matemático. Segundo os PCNEMs,

Um Ensino Médio concebido para a universalização da Educação Básica precisa desenvolver o saber matemático, científico e tecnológico como condição de cidadania e não como prerrogativa de especialistas. [...] Para uma educação com o sentido que se deseje imprimir, só uma permanente revisão do que será tratado nas disciplinas garantirá atualização com o avanço do conhecimento científico e, em parte, com sua incorporação tecnológica. [...] Nunca é demais insistir que não se trata de se incorporar elementos da ciência contemporânea simplesmente por conta de sua importância instrumental utilitária. Trata-se, isso sim, de se prover os alunos de condições para desenvolver uma visão de mundo atualizada, o

> *que inclui uma compreensão mínima das técnicas e dos princípios científicos em que se baseiam.* (BRASIL: PCNEM, 1999, p. 208-209).

Na realidade, é preciso desenvolver um processo de ensino que articule os diversos

(3) Omar Catunda morou aqui na Bahia de 1963 até o seu falecimento em 1986. Como professor da UFBA, liderou um grupo de professores, e no início da década de 70 publicou *Matemática. 2º ciclo – ensino atualizado*, coleção em 3 volumes, destinada ao nível de ensino que hoje corresponde ao ensino médio. Seus livros, embora tenham como objetivo difundir a chamada "Matemática Moderna", cuja idéia fundamental era a prevalência do formal, do abstrato, do geral sobre os processos heurísticos, apresenta uma abordagem que enfatiza a relação entre os conceitos matemáticos. O volume 3, por exemplo, no cap. 1 trata de "*Noções de Topologia, Continuidade e Limite*". Na verdade, ao observar esses volumes, encontra-se bom exemplos do que estamos a buscar no ensino de Matemática para o nível médio - a interação entre os conceitos matemáticos. Cabe procurar livros mais "antigos". Certamente, nos servirão de parâmetros para estabelecermos um "ensino contextualizado" em Matemática.

conceitos matemáticos de forma a conduzir a um aprendizado significativo[4], até porque, por ser o ensino médio a etapa final da universalização da educação básica, o aluno encontra-se, geralmente, numa idade propícia a ter uma maior ambição formativa, a buscar o conhecimento independentemente da sua da sua opção profissional. Neste contexto, trabalhar com os conceitos matemáticos torna-se imprescindível. Trata-se de uma excelente oportunidade para "seduzir" o aluno do ensino médio pelo jeito matemático de pensar.

Segundo Borges (2000), existe dois modos de pensar: o pensar não matemático e o pensar matemático. No modo matemático de pensar, primeiro, raciocina-se com fatos, em seguida, raciocina-se com hipóteses pertencentes à idealidade (teorias matemáticas), já o pensar não matemático que é o que a maioria das pessoas fazem durante toda a vida baseia-se em raciocinar com fatos.

Observemos: pensar no *ponto* como um ente sem dimensão e na *reta* como um ente com uma dimensão e pensar esses mesmos entes, o primeiro como a marca deixada no papel pela ponta de um lápis e o segundo como a marca deixada pelo mesmo lápis apoiado numa régua e ligando dois pontos, são duas maneiras de pensar: a primeira faz parte do *modo matemático de pensar* e a segunda é como a maioria das pessoas pensa.

No ensino de Matemática é pertinente considerar os dois modos de pensamento.

> *O aluno educado matematicamente deve saber ir e vir de um pensamento ao outro, conforme as suas conveniências, enquanto o educador deve inicialmente, privilegiar aquilo que é comum a todo o mundo: o pensar não matemático. Isolar o ensino de cada ciência de suas bases intuitivas é um erro de danosas conseqüências.* (BORGES, 2000, p.3).

As "bases intuitivas de cada ciência" são importantíssimas no processo de aprendizagem por trazerem os elementos formativos dos conceitos, porém, precisam ser adaptadas (algumas) em uma linguagem acessível, clara; com um grau de abstração e generalidade adequados ao nível de ensino, mas sem perder o rigor das idéias. A necessidade de reduzi-las a princípios simples nos faz lembrar de um comentário do grande cientista do século XX - Albert Einstein, no Escritório de Patentes em Berna onde trabalhou no início da sua vida adulta, quando dissera ter descoberto que até as noções mais complexas podiam em geral ser reduzidas a um conjunto de princípios fundamentais simples, a respeito da linguagem utilizada na representação das idéias.

(4) Segundo Baraldi (1999, p. 38), a Aprendizagem significativa é o conceito mais importante na Teoria Construcionista de David Ausubel, cuja idéia central é a de que o mais importante é aquilo que o aprendiz já

sabe. Para ele. A aprendizagem significativa ocorre quando o indivíduo estabelece significados entre as novas idéias e as suas já existentes.

A Matemática é, antes de tudo, uma maneira de pensar e seu estudo dá lições de humildade (BORGES, 2001). Uma verdade matemática como "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º" – só possui sentido se dentro de uma determinada teoria. Assim, a verdade acima só é válida na geometria euclidiana. "*A ciência é baseada em verdades transitórias*"[5]. Há outras geometrias nas quais a soma pode ser inferior ou superior a 180º. Por isso, o seu estudo deve desenvolver a tolerância e servir de antídoto a qualquer espécie de dogmatismo. Na realidade, existem vários pontos de vista, sob os quais uma mesma questão deve ser tratada e é dessa diversidade que a maioria dos professores de Matemática foge.

É preciso reconhecer que é árdua a tarefa para tornar o ensino da ciência matemática livre de dogmas, pois ao longo dos tempos, incorporou-se convicções como: "*a Matemática é exata*", "*a Matemática é abstrata*", "*a Matemática é para poucos – inata*", "*a Matemática se justifica pelas suas aplicações práticas*", "*a Matemática desenvolve o raciocínio lógico*", entre outras. Entendo que há, realmente, vontade por parte dos interessados (professores, alunos e escola) para melhorar a aprendizagem matemática no ensino médio, ao examinar as razões que levaram à construção desses "dogmas" e, conseqüentemente, desvanecê-los.

Ora, a possibilidade de desvanecê-los implica num ensino que apresente ao aluno do ensino médio o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele estabelecer relações, refletir, decidir, continuar aprendendo. Atualmente, saber aprender é a condição primeira/básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida.

Pois bem, é precisamente essa condição que precisamos, enquanto professor, desenvolver no ensino médio – com urgência. Para torná-la possível, aceito que

> *A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.* (BRASIL: PCNEM, 1999, p. 252).

Por *experiência*, sabemos que o ensino da ciência matemática no ensino médio tem deixado muito a desejar. Observa-se que ainda não há resultados significativos, mudanças visíveis se considerarmos as metas descritas nos PCNEMs desde 1999. Na verdade, ainda

(5) Essa afirmação é um fragmento do que disse a brasileira Ligia da Veiga Pereira, doutora em Genética e líder de um dos mais importantes grupos de pesquisa em Genética do Brasil, ao defender o uso de embriões humanos como caminho possível para tratar doenças hoje incuráveis, em entrevista concedida à revista Isto É/1819 - 18/08/2004, p. 7-10-11. "*A grande diferença entre ciência e religião é que enquanto a religião se baseia em verdades absolutas, a ciência é baseada em verdades transitórias.*"

estamos a construir um ensino que priorize a interação dos diversos aspectos do conhecimento matemático e não o isolamento, como aconteceu e ainda acontece. Sei muitíssimo bem das dificuldades encontradas para implementar mudanças – convicções arraigadas sobre o ensino de Matemática, professores mal preparados e alunos com potencial negligenciado, entre outras.

Desejo, porém, apenas reforçar a necessidade de mudanças frente às condições da realidade atual do ensino de Matemática no ensino médio, e claro, contribuir para que as mudanças comecem acontecer. Afirmamos, com Lima (2001, p. 190), que

> *É desejável, e certamente possível, fazer com que, ao final dos seus três anos, o aluno egresso da Escola Média tenha adquirido, mesmo que seja mediante o estudo de temas elementares, uma idéia bastante clara do que é a Matemática, dos seus métodos, seu alcance, sua utilidade, sua relevância social e sua beleza.*

Ressaltemos ainda, que os PCNEMs recomendam explicitamente considerar a Matemática como uma ciência autônoma, com uma linguagem própria e métodos de investigação específicos. Além disso, não se deve esquecer do seu aspecto instrumental, com importante função integradora junto às demais ciências humanas e da natureza. Por isso, os conteúdos matemáticos podem ser desenvolvidos de modo a permitir que os alunos do ensino médio usufruam tanto do valor intrínseco da Matemática quanto de seu aspecto formativo, instrumental e tecnológico.

A FORMAÇÃO DE CONCEITOS CIENTÍFICOS (INCLUSIVE OS MATEMÁTICOS) NO ENSINO MÉDIO

A aprendizagem matemática atualmente passa por um momento crucial. Nosso ensino é criticado principalmente pelo baixo desempenho dos nossos alunos (E o desempenho dos professores?). Para isso contribuem vários aspectos inerentes à aprendizagem que foram e ainda continuam sendo negligenciados no processo ensino-aprendizagem de Matemática. Um deles é a *formação de conceitos científicos*, discutido em diversas teorias sócio-cognitivas. A nossa pretensão, neste trabalho, é a de investigar os princípios que o fundamentam (em algumas teorias) e, apresentá-los de forma sucinta. Visamos também a apresentar algumas reflexões a fim de contribuir para a compreensão desse importante aspecto do ato de aprender. Aprender vem do latim *apprehendere*, que significa apanhar, apreender, apropriar-se e compreender.

Pois bem! Comecemos por dizer que o processo de formação de conceitos não decorre de uma perspectiva restrita apenas aos fatos relacionados à capacidade mental do aluno, mas da interação dos diversos aspectos que os geram e os determinam. Não é um processo óbvio, nem simples, mas complexo. O desenvolvimento conceitual implica uma contínua reorganização da estrutura cognitiva, na qual os conceitos existentes são modificados à medida que interagem com novas percepções. Isso se torna possível à medida que se desenvolve, gradativamente, a capacidade cognitiva de realizar abstrações. Para Vygoststy (1998b) e Luria (1987), a capacidade de isolar e abstrair são de fundamental importância no processo de aprendizagens conceituais.

De qualquer modo, vejamos outras concepções sobre como o conhecimento acontece e evolui. Para o estudioso suíço Jean Piaget (1896-1980), o conhecimento só é possível através de transformações ativas, ou seja:

> *Para conhecer objetos, o indivíduo deve agir sobre eles e, portanto, transformá- los; deve deslocá-los, ligá-los, combiná-los, separá-los, desmontá-los e voltar a montá-los. Desde as mais elementares ações sensório-motoras (como puxar e empurrar) até às mais refinadas operações intelectuais, que são ações internalizadas e executadas mentalmente (por exemplo, reunir, conjugar, ordenar, colocar em correspondência um a um), o conhecimento está constantemente ligado a ações ou operações, isto é, a* ***transformações***. (PIAGET, apud BODEN, 1983, p. 22).

Já os biólogos chilenos Maturana e Varela[6] (2001, p. 33), consideram que "*não há dúvida de que ele se manifesta em todas as ações da vida social humana [...]. Não há descontinuidade*

---

(6) Humberto Maturana Romesín e Franscisco J. Varela Garcia são autores de vários livros e professores que

entre o social, o humano e suas raízes biológicas. O fenômeno do conhecer é um todo integrado e está fundamentado da mesma forma em todos os seus âmbitos."

E para Borges (1984),

> *O conhecimento está ligado, desde a sua origem, ao problema da sobrevivência. Trata-se pois de uma relação dialética entre o ser vivo e o seu contorno, visando à sobrevivência daquele. Como essa relação é dialética, existe uma ação do contorno para o ser vivo e outra ação deste para aquele. É natural concluir portanto: o conhecimento está ligado à vida. Mais ainda: é através dele que o ser vivo sobrevive, isto é, adapta-se ao seu contorno. Por conseguinte: o conhecimento é vida e é poder; este, para transformar o mundo e, nessa transformação, transformar a vida com a aquisição, pela consciência, de novos estados de percebimento. Ora, sendo a Matemática uma parte do conhecimento, ela é vida e é poder, no sentido acima indicado.*

Ao que nos parece, o ato de aprender ou conhecer ocorre de maneiras muito diferentes em função de interesses e possibilidades dos indivíduos, como também das situações em que se encontram. Talvez possamos dizer que o processo de formação e desenvolvimento do conhecimento origina-se de uma necessidade tanto biológica quanto social – questões de sobrevivência, de uma indagação, ou de uma dificuldade, a qual pode ser imediata ou a médio e longo prazos. Nesse contexto, o indivíduo precisa gerar

um conhecimento novo para dar conta da situação e resolver às situações que sejam problemáticas. Embora convenha assinalar que nem todo conhecimento provém de demandas exteriores e que também ocorrem reorganizações internas de conhecimento anteriores que dão lugar a outros novos, pois um indivíduo pode armazenar um conhecimento de alguma maneira e utilizá-lo muito tempo depois em uma situação que lhe pareça apropriada para isso, modificando-o ao colocá-lo em contato com outros conhecimentos que também possui.

Sabemos que o conhecimento matemático tem a característica da cumulatividade, isto é, o estudo de cada conceito ou teoria exige o conhecimento das noções e teorias que lhe servem de base, e que a psicologia do desenvolvimento reconhece a importância das experiências do aluno e de suas interações com o mundo para o desenvolvimento do conhecimento matemático. A compreensão de que o número de objetos em um conjunto não se altera se for mudada sua disposição espacial, que duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si, que se um objeto A é menor do que um objeto B e B é menor do que um objeto C, então, A é necessariamente menor do que C; que coisas que coincidem uma com a outra

---

sustentam que "*o conhecimento não se limita ao processo de informações oriundas de um mundo anterior à experiência do observador, o qual se apropria dele para fragmentá-lo e explorá-lo. [...] que os seres vivos são autônomos, isto é, autoprodutores ao interagir com o meio: vivem no conhecimento e conhecem no viver.*"(MARIOTTI, 2001, p. 14).

são iguais, ou de que quantidades iguais adicionadas ou subtraídas a quantidades iguais permanecem iguais, são conceitos matemáticos básicos adquiridos por meio de observações, ações e reflexões sobre objetos e situações do mundo em que vivemos. Esses conceitos servirão de base para a formação de outros conceitos. É característico da Matemática a formação de novos conceitos a partir de conceitos anteriores.

A relevância do conhecimento anterior no desenvolvimento de novos conhecimentos é enfatizada em diferentes teorias sobre o desenvolvimento cognitivo. Para Piaget, por exemplo, o desenvolvimento de conceitos lógico-matemáticos ocorre quando a criança enfrenta situações problemáticas e tenta, para resolvê-las, utilizar o conhecimento anterior de que dispõe. Da perspectiva piagetiana, a criança tenta assimilar a nova situação usando as respostas de que já dispõe. Quando isso falha, elas tentam novas respostas, desenvolvendo novas estratégias que levam em consideração as características da nova situação. Nesse processo, para que uma situação seja considerada um problema, ela deve ser de um nível de complexidade que permita à criança relacioná-la com o conhecimento de que já dispõe.

A teoria piagetiana sustenta que a criança constrói suas estruturas lógico-hipotéticas através da interação com o meio, atravessando quatro (4) estágios distintos até sua maturidade plena: *o sensório-motor, o pré-operacional, o das operações concretas e o das operações formais*.

Na obra *A Construção do Real na Criança*, Piaget diz que a criança se organiza organizando o mundo: "*a inteligência não começa, pois, nem pelo conhecimento do eu nem pelo das coisas enquanto tais, mas pelo conhecimento de sua interação; e é ao orientar-se simultaneamente para os dois pólos dessa interação que ela organiza o mundo, organizando-se a si mesma",* (PIAGET, 2003, p. 361). Para a criança, o mundo é, ao mesmo tempo, definido e limitado pelos seus esquemas. Seus esquemas, isto é, suas ações, constituem o seu mundo, sua realidade.

Assim, as ações da criança constituem, cada vez mais, uma rede de classes e relações, inicialmente prática, e, posteriormente, cada vez mais simbólica. Cada idéia que é assimilada[7] nessa rede passa a fazer parte de uma totalidade organizada, totalidade que se reorganiza em função da nova idéia a ela assimilada. Conhecer uma idéia é situá-la num emaranhado de classes e relações. Conhecer mais significa desenvolver, qualitativa e quantitativamente esse emaranhado.

(7) A assimilação é um conceito importante da teoria piagetiana – significa a incorporação de uma nova idéia ou objeto ao que já é conhecido, ou seja, ao esquema que a criança já possui.

As construções da criança, durante o sensório-motor, passam por uma profunda transformação. Tornam-se *simbólicas*[8]. É o advento da função *simbólica* ou *semiótica*: a função que torna possível a linguagem. Isso significa que um novo aspecto organizador foi construído e que tanto o espaço quanto o tempo passam a ter outra importância nas construções das crianças – acontece uma revolução na percepção do espaço e do tempo. As coisas, as pessoas, os acontecimentos poderão, de agora em diante, ser lembrados/evocados. Podemos dizer que eles não se reduzem mais ao imediatamente percebido, que desaparecem e reaparecem na dependência estrita do quadro perceptivo. O que aconteceu, ontem à tarde, passa a ser evocado, hoje de manhã. O acontecimento de ontem à noite é evocado hoje à tarde. A seqüência: noite/escuridão, dia/claridade, começa a fazer sentido. Ontem, anteontem, depois de amanhã, semana que vem, mês que vem, ano que vem. Aniversário, dia das mães, festa de São João, dia dos pais, dia da criança, natal, férias. Mas esse alargamento do tempo demora algum tempo (anos) para ser construído; porém, sua condição de possibilidade já foi construída, possibilitando assim, constituir-se em um novo e monumental instrumento do pensamento: a linguagem – entendida, por Piaget, como *fala*, distinguindo-a de outras funções semióticas (imitação, jogo simbólico, desenho, imagem mental, etc).

Para Piaget, a linguagem encontra sua condição de possibilidade na função simbólica ou função semiótica. Essa função representa o ponto de chegada, uma verdadeira síntese de todas as construções ou coordenações de ações do sensório-motor. Essa função é que torna possível todas as formas de representação – imitação diferida, brinquedo ou jogo simbólico, desenho e a linguagem, entendida, aqui, como fala – que caracterizarão o pensamento daqui para diante. E tornam possível a representação das coordenações das ações e não, apenas, das aquisições perceptivas. Aliás, a organização das aquisições perceptivas é função estrita da coordenação das ações, segundo Piaget.

A função semiótica emerge das coordenações do período sensório-motor, mas é característica do período pré-operatório - é a condição prévia, de toda a socialização. Na verdade, o período pré-operativo não se limita a criar novos sistemas de representação, mas é a fase em que um sistema de representação socialmente estabelecido - a linguagem social, é reconhecido e apreendido como uma forma possível de

representação do mundo. Pode-se dizer que ao mesmo tempo em que a linguagem é um fator importante para o desenvolvimento mental da criança, exercendo uma função organizadora e planejadora do seu pensamento, ela tem também uma função social e comunicativa. A comunicação implica

(8) O que Piaget chamou de função "simbólica" ou "semiótica" é o surgimento, na criança, das primeiras representações de objetos e ações.

essencialmente em uma linguagem quer seja esta uma inscrição em pedras, troncos, um dialeto falado, um sinal de código Morse, gestos e sinais da linguagem dos surdos-mudos e outras. Por meio da linguagem, o indivíduo é exposto ao conhecimento humano e adquire conceitos sobre o mundo que o rodeia, apropriando-se do conhecimento proveniente da experiência acumulada pelas gerações anteriores e não tem que partir do zero.

Convém enfatizar que a linguagem não é o único aspecto a constituir a função simbólica, embora seja o instrumento mais adequado para representar a atividade simbólica dos processos mentais superiores: abstração, generalização, analogias, etc. Por isso uma função simbólica precária, isto é, fundada em precárias noções de espaço, tempo, objeto e relação causal, possibilitará, na melhor das hipóteses, uma socialização precária, um exercício precário da linguagem e uma precária construção das condições prévias da aprendizagem da matemática propriamente dita.

A função simbólica apresenta outros aspectos que influenciam na formação de conhecimento, além da linguagem. Será possível ensinar verbalmente uma pessoa a andar de bicicleta e esperar que ela aprenda apenas com esta informação? Segundo Sam Glucksberg (1971), autor do livro *Psicologia dos Processos Simbólicos*, não é possível descrever, somente com palavras, todas as atividades que compõem o andar de bicicleta, e ainda que fosse possível, grande parte do comportamento necessário não é passível de controle verbal. Assim, mesmo que o aprendiz seja devidamente informado, não terá capacidade para realizar a tarefa. Da mesma forma, ao falar com um aprendiz de piano sobre como mover os dedos não trará qualquer contribuição na sua transformação num pianista competente. A aprendizagem acontece de forma gradual. Para Glucksberg (1971), os movimentos muito complexos não são passíveis de controle simbólico direto.

No período das operações concretas a criança consegue passar efetivamente da ação a operação, pois é nessa fase que ela procura integrar os esquemas de classificação, de seriação e de correspondência, de identidade e negação. Característico para essa fase é o desenvolvimento do conceito de conservação. Neste período a criança percebe e explica adequadamente os problemas referentes à conservação do comprimento e de áreas. Nesta fase, o pensamento conserva, porém, seus vínculos com o mundo real. As soluções dadas aos problemas são empíricas, baseadas na experiência de ações concretas. As transformações do real são concebidas a partir da experiência e manipulação do mundo real. A construção do real pela criança é vital e em grande parte coincide com a construção do edifício matemático, especificamente com o que dá sustentação a esse edifício: seus fundamentos. Os conceitos associados aos números racionais, por exemplo, estão entre os mais importantes e também complexos que a criança trata no ensino fundamental. O seu desenvolvimento aumenta a capacidade da criança de compreender e manipular uma série de situações e problemas tanto na escola quanto fora dela, como também, servem de base para fundamentar as operações algébricas elementares.

Mas com o aparecimento do pensamento formal, este período se altera. O pensamento formal amplia significativamente as capacidades da criança, já que ela não é capaz somente de raciocinar sobre o real, sobre o que conhece ou sobre o que está presente, mas pode fazê-lo também sobre o possível. O possível é construído fundamentalmente servindo-se da linguagem. Também podemos dizer que o real é o possível atualizado. Na verdade, o pensamento passa a dispensar as bases empíricas e a desenvolver-se meramente no mundo do possível. Trata-se de um pensamento baseado em hipóteses verbalmente concebidas, em verdades possíveis, que se liberaram das limitações impostas pelo mundo real. É pertinente observar que antes dessa etapa, a ciência só pode ser abordada de forma preparatória. De fato, são todas essas capacidades que permitirão que o adolescente entenda o pensamento científico e raciocine sobre problemas complexos. O adolescente domina as categorias do pensamento abstrato e formal, desenvolvendo espontaneamente a combinatória[9], a correlação, as formas de reversibilidade (inversão e reciprocidade). Tudo isso têm grande importância do ponto de vista da aprendizagem escolar, daí a importância do pensamento formal e abstrato para a formação dos conceitos científicos, em especial, os matemáticos.

As mudanças intelectuais no período formal são de tipos diversos e afetam todas as áreas da conduta. Por isso, podemos dizer que continuamos incrementando a nossa capacidade cognitiva e os nossos conhecimentos ao longo de toda a vida, pelo menos no caso de algumas pessoas, embora necessariamente não tenha de ser assim, mas que chegamos ao topo na forma de abordar os problemas na fase final da adolescência. O adolescente, por exemplo, é muito capaz de interpretar a experiência do que uma criança e, principalmente, de manipulá-la, de criar condições para poder observar um fenômeno, ou seja, isolar as variáveis que produzem um fenômeno. Também são capazes de formular hipóteses e de contrastá-las, de examinar se são verdadeiras ou se são falsas.

Essa evolução interna do pensamento em esquemas e estruturas lógicas cada vez

---

(9) Podemos dizer que controlar variáveis, formular hipóteses e examinar as suas conseqüências, ou seja, manejar o possível pressupõe a utilização implícita ou explícita de uma combinatória. Lembremos que Piaget e um dos seus colaboradores – Inhelder, estudaram um problema cuja resolução requer a utilização da combinatória. Consistia em cinco líquidos contidos em diferentes recipientes; a mistura de três deles produzia uma certa coloração, um quarto recipiente continha água que não alterava a cor e outro continha um

produto que descoloria o líquido deixando-o transparente. Todos os líquidos apresentavam o mesmo aspecto, eram transparentes.

mais complexas, desde as formas mais elementares da adaptação do organismo ao meio, culmina na *estrutura*[10] INCR, que se compõe de quatro tipos de transformações: I –identidade; N – inversa (negação); C – correlatividade; R – reciprocidade. Essas transformações formam uma estrutura na acepção piagetiana, pois estão logicamente inter-relacionadas de modo a construir um sistema completo, fechado e reversível; sucessivas transformações podem levar-nos de qualquer ponto, no interior da estrutura, para qualquer outro ponto, e voltar ao princípio. Para Piaget, isso significa que elas – as transformações, estão em equilíbrio[11].

A obra de Piaget, proporciona, em níveis de observação e teoria, um estímulo incomparável para a compreensão do desenvolvimento do conhecimento. Porém, isso não significa isenção de críticas[12]. Piaget ainda atrai discípulos devotos e críticos severos. Mas não há dúvida de que foi um dos grandes mestres da ciência no século XX. Seus estudos focalizam o raciocínio em seus aspectos lógicos, analisam as representações que a criança tem do mundo que a cerca, investigam as razões da cognição e buscam verificar a influência de fatores externos como, por exemplo, o meio social e a linguagem. Esses estudos têm por objetivo evidenciar e identificar os passos ou etapas que conduzam ao conhecimento científico:

> O conhecimento científico não é uma categoria nova, fundamentalmente diferente e heterogênea com relação às normas de pensamento pré-científico e aos mecanismos inerentes às condutas instrumentais próprias da inteligência prática. As normas científicas situam-se no prolongamento das normas de pensamento e de práticas anteriores, mas incorporam-lhes duas exigências novas: a coerência interna (do sistema total) e a verificação experimental (para as ciências não dedutivas). (PIAGET; GARCIA, 1987, p.37).

Por essa razão, Piaget focaliza que em seu estado mais evoluído, as operações cognitivas são

---

(10) Idéia fundamental da teoria piagetina, fundamentada em três noções básicas: totalidade, transformação e auto-regulação. Assim, uma estrutura é um todo unificado cujas partes só podem ser identificadas em relação mútua e no lugar que ocupam na estrutura global. E, para Piaget, as estruturas são dinâmicas, tanto em seu desenvolvimento quanto em sua automanutenção. E as alterações estruturais não são mudanças simples, mas transformações ordenadas, onde uma forma ou conjunto de relações estruturais ou sucede uma outra forma ou outro conjunto.

(11) O conceito de equilíbrio em Piaget (2004) com relação as estruturas cognitivas deve ser concebido como uma compensação das perturbações exteriores por meio das atividades do sujeito, que são as respostas a essas perturbações. Mas no caso das formas inferiores de equilíbrio, sem estabilidade (formas senso-motoras e perceptivas), as perturbações consistem em modificações reais e atuais do meio, às quais as atividades compensatórias do sujeito respondem, então, como podem. E no caso das estruturas superiores ou operatórias, por outro lado, as perturbações, às quais o sujeito responde, podem consistir em modificações virtuais, isto é, nos casos *optimum* podem ser imaginadas e antecipadas pelo sujeito com forma de operações diretas de um sistema; neste caso, as atividades compensatórias consistirão, igualmente, em imaginar e antecipar as transformações, mas no sentido inverso.

(12) Uma crítica contundente ao trabalho de Piaget foi feita por Hans Freudenthal, um importante matemático

abstratas, aplicam-se a todo tipo de objeto e independem de conteúdos específicos. O conhecimento que delas deriva é de natureza formal e não é possível comprovar empiricamente a verdade de tal conhecimento – a Matemática, em certa medida, prescinde da realidade para estabelecer seus critérios de verdade; busca-se a verdade coerencial. Isto posto, podemos dizer que é possível estabelecer relações rigorosas e formalizáveis com os conceitos intelectuais (conhecimento abstrato), como também, estabelecer correspondência entre modelos abstratos e realidade (mundo físico) – as propriedades dos objetos no mundo físico, correspondem às outro constantes e variáveis do modelo abstrato; enquanto que, com o conhecimento da realidade física material é possível garantir a relação com o real experimental.

Para Piaget, o sujeito amplia sua subjetividade na medida em que toma posse de si mesmo, de suas ações: isto é, na medida em que *toma consciência* das coordenações gerais de suas ações. Isso, porém, só é possível através de muitas mediações: das coisas físicas, do meio social, da linguagem dos outros sujeitos. Na verdade, *a tomada de consciência*, segundo Piaget, inverte a ordem da formação do conhecimento, ou seja, a conceituação passa decididamente a determinar as ações; antes, a ação determinava a conceituação.

Para Vygotsky (1998a), o desenvolvimento de conceitos científicos pressupõe conceitos anteriores, ou seja, conceitos científicos somente podem nascer na mente da criança a partir de generalizações prévias e inferiores.

Da perspectiva vygotskiana, as tarefas de compreender e comunicar-se são essencialmente as mesmas para o adulto e para a criança. A criança – num estágio inicial de seu desenvolvimento, é capaz de compreender um problema e visualizar o objetivo colocado por esse problema, como também desenvolver conceitos[13]. Entretanto, as formas de

---

holandês que se tornou membro da ICMI (International Comission on Mathematics Instruction) e a presidiu por 4 anos. No período em que foi presidente da ICMI organizou o 1º ICME (Congresso Internacional sobre a Educação Matemática) em Lion (França) em 1968. Seu interesse pela educação matemática o levou a escrever vários livros e artigos. Os livros mais conhecidos são: "*Mathematics as an educational* task" (Matemática como tarefa educacional – 1973); "*Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education*" (Capinar e Semear. Prefácio a uma ciência de educação matemática – 1978) e "*Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*" (Fenomenologia didática de estruturas matemáticas – 1983). Em seus artigos afirmara que Piaget não entendia muitos conceitos matemáticos como espaço (topológico, projetivo e euclidiano), número cardinal e ordinal, etc., e que muitos dos seus experimentos testam o domínio lingüístico em vez do matemático. Freudenthal participou de inúmeros congressos – um deles foi o 1º Congresso Internacional de Educação Piagetiana, organizado por Lauro de Oliveira Lima que aconteceu no Rio de Janeiro, em julho de 1984. Nesse Congresso, Freudenthal criticou Piaget, como já fizera antes. Os organizadores do Congresso não gostaram da crítica. Aliás, nos anais do Congresso a presença de Freudenthal foi simplesmente ignorada. (NEELEMAN, 1991). Outra crítica não menos contundente foi feita por René Ton, um importante matemático francês, que responsabilizou Piaget pelo formalismo no ensino de Matemática. Piaget, é claro, se defendeu dizendo que não era responsável pelo entendimento que outros estudiosas davam à sua teoria.

(13) Em Matemática, numa idade ainda precoce, a criança desenvolve vários conceitos fundamentais à formação de outros conceitos.

pensamento que a criança utiliza ao lidar com essas tarefas diferem profundamente das do adulto, em sua composição, estruturação e modo de operação. Assim, a questão principal quanto ao processo de formação de conceitos segundo Vygotsky (1998a) é a questão dos meios pelos quais essa operação é realizada. Considera que não é suficiente a explicação de que o processo é induzido pelas necessidades humanas, mas que devemos considerar o uso de instrumentos e a mobilização dos meios apropriados sem os quais o processo não se realiza.

> *Um conceito é mais do que a soma de certas conexões associativas formadas pela memória. É mais do que um simples hábito mental; é um ato real e complexo de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já tiver atingido o nível n*ecessário. (VIGOTSKY, 1998, p.104).

Segundo Vigotsky (1998a), a concepção de que a formação de conceitos se baseia em conexões associativas foi contestada pelas investigações N. Ach e Rimat[14]. Na verdade, a existência de associações entre símbolos verbais (palavras) e os objetos, embora sólidas e numerosas, não é por si só suficiente para a formação de conceitos. Antes de Ach, a psicologia considerava duas tendências básicas que regiam o fluxo das idéias sobre a formação de conceitos: *a reprodução por meio de associação e a perseverança*[15]. Essas tendências falharam nas investigações de Ach; assim, ele introduziu a *tendência determinante*, estabelecida pela imagem do objetivo e mostrou que nenhum conceito novo se formava sem o efeito regulador da tendência determinante criada pela tarefa experimental. Afirmou também que a memorização de palavras e a sua associação com os objetos não levam à formação de conceitos e que o surgimento de um problema é necessário para que se formem novos conceitos.

Podemos dizer que a contribuição de Ach foi o desenvolvimento da tese de que a formação de conceitos é um processo criativo, e não um processo mecânico e passivo; que um conceito surge e se configura no curso de uma operação complexa, voltada para a solução de algum problema; e que só a presença de condições externas favoráveis a uma ligação mecânica entre a palavra e o objeto não é suficiente para a criação de um conceito.

Ach criou um método para estudar o processo de formação dos conceitos inicialmente chamado de "método da busca". Esse método foi modificado por Sakharov e Vygotsky para estudar as várias fases evolutivas do processo de formação de conceitos (Sakharov foi um dos colaboradores de Vigotsky). O método modificado foi denominado de "método da dupla estimulação". Nesse, dois conjuntos de estímulos são apresentados ao

---

(14) Rimat, segundo Vigotsky (1998a), fez um estudo cuidadosamente planejado sobre a formação de conceitos em adolescentes. "*Estabelecemos, definitivamente, que só ao término do décimo segundo ano manifesta-se um nítido aumento na capacidade da criança de formar, sem ajuda, conceitos objetivos generalizados... O pensamento por conceitos, emancipado da percepção, faz exigências que excedem suas possibilidades mentais antes dos doze anos de idade*."(RIMAT, apud VIGOTSKY, 1998a, p. 67).

(15) A reprodução por meio de associação traz de volta aquelas imagens que, em experiência passadas, estiveram ligadas à imagem que, no momento, nos ocupa a mente. A perseverança é a tendência de cada imagem a voltar e a penetrar novamente o fluxo de imagens.

sujeito observado; um como objetos da sua atividade, e outro como signos que podem servir para organizar essa atividade. Há, porém, diferenças significativas entre os métodos. Ach, por exemplo, começava seu experimento, dando ao sujeito um período de aprendizado ou prática; era permitido, também, manusear os objetos e ler as palavras sem sentido que estavam escritas em cada um, antes de saber qual era a tarefa a desempenhar; enquanto que para Sakharov e Vygotsky, era necessário apresentar um problema ao sujeito que permanece o mesmo até o final, mas as chaves para a solução são introduzidas passo a passo, cada vez que um bloco é virado. Na verdade, esses experimentos consistem na distribuição de objetos. Esses objetos têm cores, formas e dimensões diferentes e ficam dispostos em um tabuleiro em frente ao sujeito. Vygotsky, nessas pesquisas, analisava a seqüência de objetos escolhidos pelos sujeitos da pesquisa.

Nas investigações iniciadas por Sakharov sobre o processo de formação de conceitos, e completadas por Vygotsky, foram estudadas cerca de 300 pessoas, entre crianças, adolescentes e adultos. As principais teses resultantes dessas investigações são a de que o desenvolvimento dos processos que resultam na formação dos conceitos começa na fase mais precoce da infância, mas as funções intelectuais que, numa combinação específica, formam a base psicológica do processo de formação de conceitos, amadurecem, se configuram e se desenvolvem somente na puberdade. (VIGOTSKY, 1998a).

Esse método desenvolvido por Vygotsky, durante as suas investigações, talvez possa ser aplicado no ensino médio na tentativa de alterar a crise pela qual vem passando o ensino de Matemática. Neste nível de ensino, a grande maioria dos sujeitos, aqui no Brasil, estão na faixa etária dos 14 aos 17 anos.

Nas investigações desenvolvidas por Vygotsky e colaboradores foi também observado que aquilo que uma criança não é capaz de fazer sozinha, poderá ser feito com a ajuda de alguém mais "preparado" que ela. Destas observações, decorreu o desenvolvimento de um conceito muito importante na teoria vygotskiana: *zona de desenvolvimento proximal*. Esse conceito, na verdade, ajudará a explicitar melhor a importância das interações sociais no desenvolvimento cognitivo. Vigotsky (1998b) o cria, como sendo a distância entre aquilo que a criança é capaz de fazer sozinha (nível de desenvolvimento real) e aquilo que ela consegue realizar sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outras crianças (nível de desenvolvimento potencial). A zona de desenvolvimento proximal constitui-se por aquelas funções que ainda não estão maduras, mas sim em processo de maturação, quer dizer, que ainda se encontram em um estágio embrionário.

Com base em seus estudos sobre a zona de desenvolvimento proximal, propõe mudanças no que se refere à aprendizagem, justamente porque o conceito de zona de desenvolvimento proximal permite verificar não somente os ciclos já completados pela criança, como também aqueles que estão em formação. Para Vygotsky (1998b), o único bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento, ou seja, que se dirige às funções psicológicas que estão em vias de se completarem.

Segundo Vygotsky (2001), o aprendizado de modo geral e o aprendizado escolar em particular, não apenas possibilitam, como orientam, e estimulam processos de desenvolvimento. A escola, por oferecer conteúdos e desenvolver atividades específicas, tem um papel fundamental e insubstituível no desenvolvimento das funções psicológicas superiores[16]. Ainda sobre isso, Leontiév (2001) diz que o processo de educação escolar é qualitativamente diferente do processo de educação em geral, pois, na escola, a criança está diante de uma tarefa particular: entender as bases dos estudos científicos, ou seja, um sistema de concepções científicas.

Nessa perspectiva, a formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. Daí, o processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, à inferência ou às tendências determinantes[17]. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como o meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos. (VIGOTSKY, 1998a).

Contudo, é preciso reconhecer que apesar de necessário na formação de conceitos, a presença de um problema por si só, não pode ser considerada a causa do processo, embora sejam as tarefas com que os jovens se defrontam ao ingressarem no mundo cultural, profissional e cívico dos adultos, um fator importante para o surgimento do pensamento conceitual. Aliás, se o meio ambiente não apresentar nenhuma dessas tarefas ao jovem (aluno

---

(16) Na concepção vygotskiana, todas as funções psicológicas superiores aparecem duas vezes no curso do desenvolvimento do ser humano: primeiro, no nível social e depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológico) e depois, no interior do ser humano (intrapsicológico). Para Vigotsky, isso é válido para a linguagem, a atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade.

(17) Vigotsky vai além da *tendência determinante* que Ach julgou ser o fator decisivo para a formação de conceitos.

do ensino médio), não lhe fizer novas exigências e não estimular o seu intelecto, para proporcionar-lhe uma série de novos conceitos, o seu raciocínio não conseguirá atingir os estágios mais elevados, ou só os alcançará com grande atraso.

Segundo Vygotsky (1998a), a tarefa cultural por si só, não explica os mecanismos de desenvolvimento em si, que resultam na formação de conceitos. Assim, considera que caberá ao pesquisador ter como objetivo a compreensão das relações intrínsecas entre as tarefas externas e a dinâmica do desenvolvimento, e considerar a formação de conceitos como uma função do crescimento social e cultural global do adolescente/jovem, que afeta não apenas o conteúdo, mas também o método de seu raciocínio. Nessa idade, não aparece nenhuma função elementar nova essencialmente diferente daquelas já presentes, mas todas as funções existentes são incorporadas a uma nova estrutura, formam uma nova síntese, tornam-se partes de um novo todo complexo; as leis que regem esse todo também determinam o destino de cada uma das partes. Desse modo, aprender a direcionar os próprios processos mentais com a ajuda de palavras ou signos é uma parte integrante do processo de formação de conceitos.

Com base nas suas investigações, Vygotsky (1998a, p. 99) observa que

> *O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras, e a definição verbal será, na maioria dos casos, muito mais limitada do que seria de esperar a partir do modo como utilizou o conceito.*

> *[...] O adolescente depara-se com um outro obstáculo quando tenta aplicar um conceito que formou numa situação específica a um novo conjunto de objetos ou circunstâncias, em que os atributos sintetizados no conceito aparecem em configurações diferentes da original.*

Em uma pesquisa realizada em 2002 por MARTOS, com alunos entre 13 e 16 anos, sobre os conceitos da Geometria Esférica, em uma escola pública da rede estadual de Rio Claro/SP, foi observada a dificuldade da qual fala Vygotsky. Segundo Martos, em vários momentos da aula, quando eram solicitados para que relatassem a maneira pela qual haviam chegado à determinada conclusão, os alunos apresentavam uma certa dificuldade em verbalizar idéias.

Um aspecto a observar é que o conceito que o aluno formou nem sempre é possível de ser aplicado da mesma forma que foi obtido. Por exemplo, memorizar o teorema de Pitágoras pode não ser suficiente para resolver o problema de minimizar o trajeto que um indivíduo faz para ir de sua casa até a padaria. A aplicação dos conceitos exige que estes sejam interpretados e processados, o que implica a atribuição de significados, de modo que o conceito passa a ter sentido para aquele indivíduo que aprende.

Não obstante, o processo de formação de conceitos integra e sintetiza as principais idéias de Vygotsky a respeito do desenvolvimento humano: as relações entre pensamento e linguagem, o papel mediador da cultura na constituição do modo de funcionamento psicológico do indivíduo e o processo de internalização de conhecimentos e significados socialmente elaborados. Assim, de acordo com a perspectiva vygotskiana, os conceitos são construções culturais internalizadas pelos indivíduos ao longo de seu processo de desenvolvimento dentro dos diversos grupos culturais.

Na questão da formação dos conceitos, Vygotsky (1998a) propõe a distinção entre os *conceitos espontâneos* e os *conceitos científicos*. Considera os conceitos espontâneos como sendo aqueles conhecimentos construídos na experiência pessoal, concreta e cotidiana das crianças, ou seja, que a criança aprende em seu dia-a-dia, no contato com os objetos, fatos, fenômenos, etc., dos quais ela pode não ter sequer consciência. Já os conceitos científicos são aqueles elaborados na sala de aula, adquiridos através do ensino sistemático, ou seja, sistematizados e tratados intencionalmente, em geral, segundo uma metodologia específica. "*São por excelência, os conceitos que se aprendem na situação escolar.*"(MOYSÉS, 1997, p.35). "*São produto do aprendizado escolar.*"(VYGOTSKY, 1998a, p.145).

Além disso, e com base nas idéias vygotskianas, podemos dizer que, por trás de qualquer conceito científico existe sempre um sistema hierarquizado do qual ele faz parte. Neste contexto então, a principal tarefa do professor ao transmitir ou ajudar o aluno a construir esse tipo de conceito é a de levá-lo a estabelecer um(a) enlace/ligação indireto(a) com o objeto por meio das abstrações em torno das suas propriedades e da compreensão das relações que ele mantém com um conhecimento mais amplo. Ao contrário do espontâneo, o conceito científico só se elabora intencionalmente, isto é, pressupõe uma relação consciente e consentida entre o sujeito e o objeto do conhecimento.

Através de suas investigações científicas, Vygotsky chegou à conclusão de que o domínio de um nível mais elevado na esfera dos conceitos científicos eleva, por sua vez, o nível dos conceitos espontâneos. Ocorre um movimento no qual os conceitos científicos descem na direção da realidade concreta e os conceitos espontâneos sobem buscando a sistematização, a abstração e a generalização mais ampla. Para Vygotsky, tornou-se evidente que o atingimento e o controle dos conceitos científicos implicam a reconstrução, seguindo os mesmos moldes, dos conceitos espontâneos.

Para Luria (1979), um dos mais importantes colaboradores de Vygotsky, há uma diferença na ocorrência dos conceitos científicos e espontâneos (esse último o chama de conhecimento comum). Os conceitos espontâneos como *cadeira, mesa, lavatório, pão, árvore*, *cão,* são assimilados pela criança no processo da experiência prática; a criança tem uma *noção prática* de cada um desses conceitos e os emprega corretamente nas diversas situações de sua vida, e a palavra correspondente evoca nela a imagem da situação prática em que ela esteve em contato com o objeto. Já os conceitos científicos são adquiridos pela criança no processo de aprendizagem escolar. Conceitos como *estado, ilha, verbo, mamífero*, etc. se incorporam à consciência da criança como resultado da aprendizagem escolar. Inicialmente, são formulados pelos professores e só depois, completados com um conteúdo concreto. Desse modo, a aluno pode, desde o início, formular verbalmente esses conceitos e só posteriormente, terá condições de tratá-los com um conteúdo válido, significativo.

Quanto à formação dos conceitos científicos e espontâneos, Luria (1979) nos diz que é natural que seja, distintos, os processos psicológicos que participam da formação desses dois tipo de conceitos, visto que, esses conceitos ocupam posição variada na vida intelectual do homem e refletem diferentes formas de sua experiência. Nos conceitos científicos predominam as relações lógicas abstratas, ou seja, eles se formam com a participação determinante das operações lógico-verbais; enquanto que, nos conceitos espontâneos predominam as relações circunstanciais concretas, ou seja, se formam com a participação das atividades práticas e da experiência.

A forma metódica e intencional como os conceitos científicos são – ou deveriam ser, trabalhados na escola abre caminho para a revisão e a melhor compreensão dos conceitos espontâneos que cada aluno traz dentro de si. Esse processo de relacionar o conceito espontâneo que o aluno traz com o conceito científico que se quer que ele aprenda exige de quem ensina uma *compreensão dos diferentes sentidos*[18] que os conceitos – tanto os espontâneos quanto os científicos – têm para o aluno[19]. Exige, também, que o professor perceba quais são os seus contextos, quais são os sentidos[20] nos quais eles estão sendo empregados. Na verdade, implica em uma reconstrução do saber mediante estratégias adequadas, nas quais o professor atue como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento. É nesse sentido que vemos o ensino dos conceitos científicos no ensino médio, como uma atividade intencional, com mediação sistematizada e organizada pelo professor.

Na perspectiva vygotskiana, os conceitos científicos não são aprendidos por meio do

---

(18) A compreensão dos diferentes sentidos de um conceito, por parte do docente - é o que estamos chamando de ensino contextualizado no ensino médio.

(19) É fonte de dificuldade permanente para qualquer professor conhecer o alcance dos significados e sentidos atribuídos pelos alunos às suas palavras.

(20) Para Luria (1979), o sentido de um conceito é a sua subjetividade, enquanto que o significado é o que está escrito no dicionário.

treino, do exercício e da repetição, nem tampouco por mera transmissão pelo professor ao aluno. Um bom exemplo para essa constatação de Vygotsky quanto à aprendizagem dos conceitos é o que tem acontecido em Matemática com o conceito de *limite* – na maioria das vezes o aluno chega a resolver dezenas de exercícios sobre limite, mas não o compreende. Aliás, conceitos como *proporcionalidade* e *função* no ensino médio também têm percorrido esse mesmo caminho descrito por Vygotsky. Para aprender um conceito é necessário, além das informações recebidas do exterior, uma intensa atividade mental.

De fato, dirigida pelo uso da palavra,

> *Na criança pequena a palavra suscita, acima de tudo, reações emocionais e imagens diretas; na criança em idade escolar primária, a palavra implica antes de tudo um sistema de recordação direta e por isto ela pensa recordando; no aluno do curso superior e na pessoa com alto nível de desenvolvimento intelectual, a palavra evoca antes de tudo um sistema de operações lógicas, daí ele a memorizar pensando."* (LURIA, 1979, p. 38).

a formação do conceito científico é uma operação mental que exige que se centre ativamente a atenção sobre o assunto, dele abstraindo os aspectos fundamentais e inibindo os secundários, e que se chegue a generalizações mais amplas mediante uma síntese. Para Vygotsky (1998a, p. 104), "*em qualquer idade, um conceito expresso por uma palavra representa um ato de generalização."* A idéia de que o *significado da palavra evolui*[21] é uma das teses da psicologia. Mas, ao mesmo tempo em que acontece o processo de análise e síntese, de abstração e inibição de certos traços e características na formação dos conceitos científicos, o aluno também pode caminhar do particular para o geral e desse para o particular. Aprende-se a partir do concreto-familiar, do particular, em direção ao geral. É a partir de exemplos familiares que se cria a *motivação* a qual, naturalmente, deve preceder à *compreensão*.

Para Vygotsky (1998a), quando se examina o processo de formação dos conceitos em toda a sua complexidade, este surge como um movimento do pensamento, dentro de um sistema de conceitos, constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular. Na realidade, ao longo do processo de desenvolvimento e formação dos conceitos, o indivíduo vai deixando de necessitar das informações recebidas do exterior e vai passando a utilizar signos[22] internos – representações mentais que substituem os objetos do mundo real. Dessa forma, os conceitos científicos desenvolvem-se através de

---

(21) Concebemos que o sentido de uma palavra depende da forma com que está sendo empregada, isto é, do contexto em que ela surge. O seu significado, no entanto, permanece relativamente estável. É formado por relações que foram sendo associadas à palavra ao longo do tempo, o que faz com que se considere o significado um sistema estável de generalizações, compartilhado por diferentes pessoas, embora com níveis de profundidade e amplitude diferentes.

(22) Consideremos que os signos são os elementos que representam objetos, eventos, situações, etc.

um movimento no qual o indivíduo procura significar um conceito, relacionando-o com outros signos adquiridos anteriormente, por meio de generalizações e de elaborações sempre mediadas por novos conceitos a serem adquiridos.

Na concepção vygotskiana o significado das palavras é colocado como um aspecto importante na formação dos conceitos. Vigotsky diz que ele se transforma, tornando-se cada vez mais próximo dos conceitos culturalmente estabelecidos, e faz a distinção entre dois componentes do significado da palavra: o significado propriamente dito que se refere ao sistema de relações objetivas que se forma no processo de desenvolvimento da palavra, um núcleo relativamente estável dela, compartilhado por todos que a utilizam; e o sentido que se refere ao significado da palavra para cada indivíduo, que tem a ver com as relações, no que diz respeito ao contexto de seu uso e às vivencias afetivas do sujeito. Segundo Vygotsky, o sentido é a soma dos eventos psicológicos que a palavra evoca na consciência. É um todo fluido e dinâmico, com zonas de estabilidade variável, uma das quais é o significado.

A propósito, a palavra *roupa*, por exemplo, poderá ser utilizada em diferentes sentidos. A jovem de classe média quando reclama que "não tem roupa para ir à festa" quer dizer algo muito diferente do pobre que diz que "não tem roupa para vestir"; a lavadeira que diz que "ainda não entregou a roupa da semana" está pensando em algo muito diferente da madame que afirma: "vi logo que era gente fina pela roupa". Entretanto, o significado da palavra *roupa* continua inalterado.

Convém registrar que a prática pedagógica tem demonstrado que o ensino *direto* de conceitos é impraticável e infrutífero – vide o conceito de limite. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras por parte do aluno, semelhante a um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos, mas que na realidade oculta um vácuo – é a falta de entendimento/compreensão dos sentidos dos conceitos.

Isto posto, voltemos ao processo ensino-aprendizagem do conceito de limite. Se, na maioria das vezes, o estudo do cálculo tem começado pela *noção de limite*, e não pelas noções de *infinitésimos, derivada e integral* – essas são as noções das quais surgiram o cálculo ainda na Grécia antiga, é por opção que contempla a formalização das idéias matemáticas em detrimento do seu desenvolvimento histórico, filosófico e epistemológico. Mas, pode-se dizer – o conceito de limite é rigoroso, representa o cálculo bem fundamentado; devemos adotá-lo e ensiná-lo. Mas com que direito prioriza-se no ensino desse conceito a memorização, a repetição de teoremas, definições, a resolução de inúmeros exercícios, sem porém, preocupar-se com a compreensão de seu sentido e significado pelos alunos? É complicado dar para isso uma boa razão. Entretanto, ao reconhecer que o aprendizado desse conceito tem proporcionado variadas discussões (CABRAL; CATAPANI, 2003; MELLO; SANTOS, 2002; ZUIN, 2001), justamente por não está acontecendo o seu aprendizado (LACHINI, 2001), é que observamos que embora seja fato que uma maioria dos alunos do ensino médio têm chegado à universidade sem o devido conhecimento matemático, há espaço, já no ensino médio, para introduzir as primeiras noções do cálculo não-standard, sem necessariamente fazer uso do conceito de limite. O cálculo não-standard do qual já falamos antes, é uma teoria bastante rigorosa nos seus fundamentos, mas que possibilita estudar os seus conceitos a partir do resgate dos *aspectos intuitivos* e práticos que tanto contribuíram para o desenvolvimento do cálculo. Aliás, foram os *aspectos intuitivos* do cálculo não-standard que muito nos influenciaram na escolha dessa teoria, para abordá-la no ensino médio.

Portanto, interessa-nos fortalecer a tese de que o jovem do ensino médio, que cognitivamente está no período do pensamento formal, é capaz de apropriar-se dos conceitos científicos - como os do cálculo não-standard, com seus sentidos e significados ao processar as informações que obtém na interação como o mundo dos objetos e das pessoas. Mas, embora um indivíduo possa aprender muito ao interagir com os objetos e com as pessoas, a complexidade do mundo acaba demandando que ele procure ajuda para formalizar aquilo que faz *intuitivamente*. A escola tem essa função: contribuir para uma formalização significativa dos conceitos científicos.

Então, quando dizemos, que o desenvolvimento dos conceitos ou dos significados e sentidos das palavras, não acontecem por mera repetição de alunos e professores, mas com o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção, memória lógica, abstração, capacidade para comparar, diferenciar, sintetizar, enfim, o que queremos dizer? Queremos dizer simplesmente que é necessário criar condições para o aluno do ensino médio desenvolver a habilidade de aprender a aprender – crucial nos tempos atuais, de modo que ele seja capaz de continuar aprendendo conceitos mesmo depois de deixar a escola. Na realidade, o aluno não aprende somente nas escolas.

É inegável que a aprendizagem escolar precisa melhorar – em particular, a aprendizagem matemática. Do ponto de vista cognitivo, é preciso mostrar a importância da interação da aprendizagem escolar com as vivências do aluno em seu meio, visto que, o desenvolvimento e formação de conceitos consistem, na reunião desses fatores, sem que tenha sentido saber qual deles é mais importante, ou em que proporção contribui para o aprendizado do aluno, já que, se um deles falta, enormes alterações são produzidas no desenvolvimento e formação dos conceitos, ou inclusive, os conceitos não se formam. A importância de considerar essa interação reside não apenas na aprendizagem acadêmica (científica), mas também na aprendizagem de atitudes e valores para a convivência humana e nas relações interpessoais em geral. Na verdade, o ato de aprender, como não poderia deixar de ser, é uma conquista coletiva (professor, aluno, escola, sociedade), travada passo a passo, dia a dia.

OS CONCEITOS DE MOVIMENTO, DERIVADA E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO, NA PERSPECTIVA DO CÁLCULO NÃO-STANDARD: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE APRENDIZAGEM, ESTRATÉGIAS E APLICAÇÕES PARA A SUA FORMAÇÃO

Como sabemos, o ato de aprender está presente em todos os momentos das nossas vidas de forma marcante. Nascemos para aprender e aprendemos até morrer. Hoje, estamos vivendo em uma sociedade que valoriza cada vez mais a aprendizagem. Precisamos aprender como estudar mais, como trabalhar, como crescer profissionalmente, como (con)viver melhor – inclusive com os outros, como nos divertir, em fim, precisamos aprender para nos desenvolver. Não obstante, isso nos mostra que a sociedade tornou-se cada vez mais dependente do conhecimento, por isso, faz-se necessário perceber que o conhecimento não está restrito ao período escolar, mas pode ocorrer da infância à idade adulta, melhor – até à morte do indivíduo.

Para fazer uma análise do que acontece na educação de hoje referente à aprendizagem, podemos usar alguns resultados dos inúmeros estudos desenvolvidos sobre aprendizagem, por renomados estudiosos. Já falamos um pouco sobre os estudos de Piaget, mas não custa reforçar que seu trabalho mostrou que as pessoas têm uma capacidade de aprender em todo momento, desde os primeiros minutos de vida. Aprendemos a andar, a falar, a ser profissional, a manter uma família, etc. Quando crianças e/ou adolescentes, aprendemos muitos conceitos científicos e construímos nossas próprias teorias sobre como as coisas funcionam e como as pessoas pensam – inclusive o modo matemático de pensar. Aprendemos tudo isso vivendo, fazendo coisas e interagindo com as pessoas, não somente sendo ensinadas por meio de aulas formais.

Juan Delval (2001), autor do livro *Aprender na vida e aprender na escola*, é um estudioso da psicologia do desenvolvimento e discípulo de Piaget. Para Delval, as pessoas têm a capacidade de ensinar, transmitindo cultura e valores que a sociedade tem acumulado. Observa-se que tal fato acontece desde a primeira interação mãe-filho. Portanto, não só adquirimos informações como também somos capazes de transmiti-las a partir dos primeiros dias de vida; fazemos isto constantemente. Aprendemos e ensinamos porque precisamos resolver problemas reais e interagir com as pessoas. Calculando o volume de um cilindro, saberemos quanta madeira há em uma árvore; qual a quantidade de petróleo que um oleoduto poderá distribuir ou de que tamanho deverão ser os tanques de combustível de um foguete.

Além disso, Vygotsky defende a tese de que a aprendizagem é uma atividade social – uma atividade de produção e reprodução de conhecimento mediante a qual o indivíduo assimila os modos sociais da atividade e da interação, e mais tarde na escola, os fundamentos dos conceitos científicos. O aprendizado escolar induz o tipo de percepção generalizante, desempenhando assim um papel decisivo na conscientização do indivíduo dos seus próprios processos mentais. Nesta perspectiva, os conceitos científicos se formam na escola, em um processo orientado, organizado e sistemático, onde a assimilação do conceito começa pela conscientização de suas características essenciais, expressadas inicialmente na sua definição.

Na concepção vygotskiana, a formação e aprendizagem de um determinado conceito científico dar-se-ão, pela sua definição verbal, pelos esclarecimentos de seus atributos essenciais e com sua aplicação alcança a variedade dos objetos da realidade que representa, possibilitando ao aluno ter clara consciência do conceito mediante sua aplicação.

Mas não é só isso que podemos observar sobre a aprendizagem. Ao examinar de perto como o ser humano aprende, constata-se que não é possível separar sua história das ações biológicas e sociais. Nesse contexto, o "ato de aprender" acontece no diálogo do ser humano com seu entorno. É essencial dar-nos conta de que há uma inseparabilidade entre o que fazemos, aprendemos e nosso mundo experiencial.

Mas frente à valorização da aprendizagem, qual o papel da escola?

A escola brasileira que tem como meta buscar a melhoria da qualidade de aprendizagem tanto na educação básica, quanto na educação superior, objetiva que nossos jovens possam aprender melhor, indo além do ensino fundamental. Há investimentos do Estado no sentido de "universalizar" o ensino médio; mas, à medida que cresce o número de matrículas neste nível de ensino, cresce também o desafio de melhorar a qualidade do que é ensinado aos alunos.

Chamemos atenção para uma certa concepção que costuma emergir da idéia de universalização. É a de que todos os alunos devem ser tratados igualmente e que, portanto, assimilam informações nas mesmas condições e do mesmo modo. Na verdade, nenhum professor acredita que isso seja verdade, principalmente, ao considerar a aprendizagem como uma *junção de fatores cognitivos, sociais e emocionais*, frutos da experiência de vida de cada indivíduo. O quanto cada aluno difere um do outro em termos de capacidade de aprender ou em termos de assimilação de informações fica evidente no cômputo das tarefas realizadas - por meio das notas das provas ou tarefas. Mas, tais diferenças são muito mais complexas e apresentam implicações mais profundas, além do que revelam as notas das provas ou das tarefas.

Provavelmente, possamos dizer que, uma das implicações é o novo papel que tanto professor quanto aluno terá que desempenhar no processo ensino-aprendizagem dos conceitos científicos matemáticos. Em geral, quando o professor prepara uma aula, decide o modo como as informações serão apresentadas e como um determinado conceito/tema será organizado e encaminhado durante a aula; ele (o professor) procede com base em suas próprias preferências, que certamente não coincidirão com as de todos os seus alunos. Para formar e conseqüentemente aprender os conceitos científicos, o aluno aplica seus conhecimentos anteriores e modos de pensar ao conceito/objeto em estudo; age, observa, seleciona os aspectos que mais chamam a sua atenção, estabelece relações entre os vários aspectos deste conceito/objeto e atribui significados a ele, chegando a uma interpretação própria. Porém, este processo é complicado e a interpretação feita pode não ser a esperada pelo professor; mas como os "equívocos", "erros", fazem parte da construção do conhecimento, os mesmos são acolhidos como naturais (possivelmente). Por isso, é importante que o professor conheça bem os processos de ensino-aprendizagem que usa, para poder criar uma melhor adequação entre o que irá propor em aula e a capacidade de aprender de cada aluno.

Não estamos, com isso, querendo afirmar que seja necessário que o professor conheça previamente as estratégicas de cada aluno. Consideramos que "estratégias" são ações que exigem do aluno pensar e refletir – podem ou não ser aprendidas significativamente; elas não se limitam a uma seqüência de habilidades isoladas, descontextualizadas. Mas como o professor pode conhecer as preferências (estratégias) de seus alunos? Acreditamos que uma das possibilidades seja a de trocar idéias com os alunos sobre as suas preferências, e isso significa conhecer como cada aluno registra e evoca informações, como se comunica verbalmente e por escrito, como se posiciona em atividades em grupo e como se organiza em um trabalho individual. Com isso, o professor passa a conhecer seu aluno e poderá ajudá-lo a tornar-se consciente das suas preferências de aprendizagem. Na verdade, essas preferências de aprendizagem podem ir mudando; à medida que professor e aluno adquirem habilidades e desenvolvem estratégias[23] para lidarem com diferentes situações de aprendizagem na escola e na vida. Entretanto, quanto maior for o número de estratégias desenvolvidas por aluno e professor, maiores as chances para lidar com as informações e para adequá-las às atividades que realizam.

Na realidade, ao dialogar com nossos alunos do ensino médio, é possível que nos deparemos com a sinceridade de alguns alunos em afirmar que jamais pararam para refletir sobre como estudam, como aprendem um determinado conceito científico ou não, como

(23) Podemos dizer também que as estratégias de aprendizagem podem ser pensadas como habilidades coordenadas por alunos e professores, decorrentes de metas pretendidas, crenças e concepções de aprendizagem próprias de cada um (aluno e professor), com vistas a se atingir um objetivo.

resolvem problemas, enfim, sobre seus processos de aprendizagem. De modo geral, não vivenciaram qualquer experiência de aprender um pouco sobre como aprendem.

De qualquer modo, é fundamental que cada indivíduo tenha conhecimento sobre o que é aprendizagem, sobre seu estilo pessoal de aprender e sobre quando pode adquirir conhecimento usando a estratégia de buscar e interpretar a informação ou participar de atividades especialmente planejadas para aprender um determinado conceito/assunto.

No atual contexto da aprendizagem escolar, convém observar, que a valorização da aprendizagem de conceitos não é uma prática facilmente encontrada na educação escolar, em especial, no ensino médio. Há uma tendência, digamos, *tradicional,* na prática de ensino de Matemática que valoriza, em excesso, a função da memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Como conseqüência, os problemas propostos são, nesse caso, mais voltados para a reprodução de modelos do que para a compreensão conceitual. Entretanto, essa concepção de educação – ainda preponderante no ensino médio, está longe das exigências da sociedade atual – cada vez mais tecnológica, tornando-se urgente a sua superação e esse é um dos argumentos que justifica a importância do estudo da formação de conceitos no ensino médio e nos demais níveis de ensino. Porém, não podemos ter a ilusão de que os conceitos matemáticos, embora científicos, possam ter de início, para o aluno do ensino médio, o significado abstrato, geral e universal que lhe remete ao saber científico. Acreditamos que, para o aluno do ensino médio, o sentido de um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas. E, mesmo admitindo a intenção de alcançar um nível mais elevado de abstração, os problemas se constituem no passo inicial para lançar as bases do conhecimento. Por certo, essa é uma visão pragmática, mas creio, não seja nenhum demérito recorrer a essa visão para justificar o sentido inicial dos conceitos aprendidos pelos alunos, isto porque, ao considerar os aspectos históricos da Matemática, observa-se que a formação de conceitos tem sua âncora (base) na utilidade. A funcionalidade e a simplicidade precedem o rigor (BORGES, 2002c), e são imprescindíveis ao desenvolvimento dos conceitos. Por outro lado, os problemas não podem estar restritos aos aspectos empíricos; é necessário aproximá-los de questões teóricas adequadas ao nível cognitivo do aluno. É razoável começar estudar os conceitos científicos com exemplos simples ou idealizados.

Os conceitos de movimento, derivada e integral são conceitos científicos imprescindíveis ao desenvolvimento da ciência Matemática. Portanto, nada mais pertinente que estudá-los no ensino médio. O estudo de alguns aspectos epistemológicos, históricos e filosóficos desses conceitos faz sentido pedagogicamente, por possibilitar ao aluno do ensino médio a obtenção de uma boa noção sobre as origens da ciência, não só de Matemática, visto que, compreender as origens é importante para compreender e julgar o presente; como também encorajá-los a investigar os fatores que proporcionam mudanças significativas na ciência.

O conceito de movimento por exemplo - responsável por mudanças significativas que ocorreram na ciência, foi estudado por Galileu[24](1564-1642) que desenvolveu importantes estudos sobre o movimento pendular – podemos visualizar uma revolução científica (no sentido kuhniano) no campo da mecânica nos estudos de Galileu, a qual foi aperfeiçoada por Newton. Na realidade, Galileu introduziu a aplicação de métodos matemáticos e de experiências mentais nos seus estudos. Essas contribuições de Galileu foram usadas e aperfeiçoadas por outros matemáticos ao longo dos tempos, inclusive Newton.

O processo de formação dos conceitos, baseado nas teorias sócio-cognitivista que apresentamos, aponta alguns caminhos, entre as muitas maneiras de encaminhar uma aula, que podem vir a contribuir na melhoria da qualidade de aprendizagem matemática dos alunos do ensino médio. Um desses caminhos, é o desenvolvimento da capacidade de representar simbolicamente um conceito, ou uma situação que apresente esse mesmo conceito, como também transformar essa representação quando for necessário. Segundo Glucksberg (1971), existem questões cuja solução depende, essencialmente, da forma como sua representação simbólica é feita. Para ilustrar o que dissera, recorre a um exemplo que trata do conceito de movimento – lembremos: *movimento enquanto correspondência entre posição e tempo*.

Vejamos o exemplo:

> *Duas estações ferroviárias estão a 50 km uma da outra. Às 14 horas de sábado, dois trens partem, um em direção ao outro, um de cada estação. No momento em que os trens deixam as estações, um pássaro começa a voar a partir do primeiro trem em direção ao outro e vice-versa, descrevendo este movimento até o momento em que os trens se encontram. Se ambos os trens viajam 25 km por hora e o pássaro voa a 100 km por hora, quantos km o pássaro terá voado até o momento em que os trens se cruzam? (GLUCKSBERG, 1971, p. 54).*

Então, como proceder para encontrar a solução de problemas como esse – que estratégias utilizar? Será que as informações "assimiladas" sobre o conceito de movimento darão conta para elaborar uma solução? Para esse problema, uma das soluções apresentadas por Glucksberg consiste em tentar imaginar, a distância que o pássaro voa em cada viagem entre os dois trens, considerando as diferentes distâncias em que os trens se encontram em

---

(24) Alguns estudiosos de sua época o consideravam um grande matemático, mas não um grande físico.

cada momento. Esse método mental funciona, embora seja cansativo. Daí, ao tentar resolver esse problema utilizando essa estratégia, o indivíduo, segundo Glucksberb (1971), dificilmente conseguirá guardar os resultados de todos os cálculos necessários.

Outra possibilidade apresentada por Glucksberb é a de transformar a representação simbólica da pergunta: "quantos quilômetros o pássaro voará?" para: "há quanto tempo o pássaro estava voando?". Essa transformação torna o problema banal – as transformações que precisam ser feitas nas representações simbólicas das situações inicial e final do pássaro, tanto em termos de tempo no ar quanto de distância percorrida, tornam-se intuitivamente claras.

Algumas transformações possíveis de serem feitas:

1. Os trens distam 50 km um do outro.
2. Como viajam na mesma velocidade, ambos devem percorrer 25 km antes do encontro.
3. Como viajam a 25 km/h, encontram-se após uma hora.
4. O pássaro voa a 100 km/h.

5. Como os trens encontraram-se uma hora após a partida, o pássaro voou 100 km.

Observa-se que a transformação de uma parte desse problema conduziu a uma resposta intuitivamente clara. Mas convém ressaltar a necessidade do indivíduo representar simbolicamente alguns aspectos do problema – nessas representações simbólicas ocorrem dois tipos de transformação. A primeira transformação diz respeito à própria formulação da pergunta. Assim, ao receber uma formulação mais adequada, o segundo tipo de transformação passa a comportar operações aritméticas muito simples.

Segundo Glucksberg (1971), a chave para a solução de problemas como esse está no primeiro tipo de transformação – na reformulação da pergunta, embora seja necessário pergunta-se: (1) que fatores são os responsáveis pelo desvio do indivíduo da solução do problema?; (2) quais são os fatores que facilitam e dificultam as transformações simbólicas necessárias à solução do problema? De qualquer modo, será necessário desenvolver, como também ampliar as representações possíveis dos conceitos; isso, através de registros que possam simbolizar o modelo mental que o aluno constrói durante a solução do problema. O aluno estará ampliando sintaticamente (símbolos) e semanticamente (sentidos) a sua linguagem matemática. E, no atual contexto da aprendizagem matemática, essas perguntas são pertinentes e atuais. Portanto, no nosso entendimento, respondê-las satisfatoriamente, é tarefa crucial na busca de melhoria da aprendizagem matemática no ensino médio.

Em sala de aula, costuma acontecer situações, onde determinado problema que trata de conceitos já aprendidos, serem compreendidos ou não, pelos alunos. Existem alunos que aplicam as estratégias conhecidas "cegamente", sem perceber que não são mais adequadas; que é preciso transformá-las, embora tenham obtido êxito na solução de outros problemas – é por isso que não basta apenas memorizar certas estratégias apresentadas em sala; é preciso ir além disso: buscar compreendê-las, manipulá-las; para adequá-las a situações novas. Entretanto, existem alunos que revelam compreensão e aplicam com sucesso as estratégias aprendidas. O adolescente mais atento, que em certa medida, domine os conceitos algébricos, por exemplo, encontra-se numa situação favorável, a partir da qual vê os conceitos aritméticos sob uma perspectiva mais ampla.

Não há dúvida que a *capacidade de transferência*[25] *de aprendizado* de algo conhecido para algo novo – por parte dos alunos, configura-se num aspecto importante do que podemos chamar aprendizado da Matemática. Existe uma relação entre a maneira pela qual um aluno se comporta diante de situações novas e a maneira pela qual se comporta diante de situações já conhecidas, anteriores. Na verdade, a semelhança entre a situação nova e a anterior é suficiente para fazer com que o aluno, diante da situação nova, emita inadequadamente o comportamento que vinha emitindo na situação anterior. Ocorre, portanto,

a aplicação de um comportamento inadequado pelo aluno, justamente por não ter percebido que precisaria utilizar um comportamento, digamos, mais sofisticado. Vejamos: os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números e não dos objetos, indicando um nível mais elevado do desenvolvimento mental do aluno, visto que, em

um nível de desenvolvimento anterior, certos aspetos dos objetos haviam sido abstraídos e generalizados em idéias de números.

Devemos observar ainda que a formação de um conceito não acontece através de um único caminho – estratégia. Entretanto, seja qual for o caminho adotado, o desafio consiste em destacar os aspectos essenciais do conceito (invariantes) que conduz à aprendizagem no momento considerado, articulando-os com outros conceitos já aprendidos pelo aluno. Nesse sentido, o aluno é desafiado – de posse dos conceitos já formados, a compreender outras situações, onde aparecem novos conceitos e novos invariantes conceituais. A aprendizagem não acontece num contexto isolado, mas através de estratégias (situações pedagógicas) suficientemente diversificadas, a fim de propiciar a formação dos conceitos. Portanto, é

---

(25) A lei de transferência é um exemplo da teoria genética amplamente difundida, segundo a qual certos conceitos, acontecimentos ou modelos – observados, nas primeiras etapas do seu desenvolvimento se repetirão em etapas mais avançadas. Convém ressaltar que os traços/aspectos que realmente se repetem muitas vezes cegam o indivíduo para as diferenças significativas originadas do fato de os processos posteriores ocorrerem num nível superior do desenvolvimento mental.

apropriado planejar e utilizar estratégias que favoreçam a expansão dos significados[26] do conceito para o aluno, pois, em cada domínio científico e em cada classe de situações, os conceitos mostram-se através de particularidades, estabelecendo as condições para o processo de aprendizagem.

Referente à aprendizagem matemática, podemos dizer que não se realiza de forma seqüencial – inclusive a aprendizagem dos conceitos, como aparece na redação textual da Matemática, exposta nos livros. Aliás, até mesmo o matemático profissional somente consegue uma clara "linearidade" ao apresentar uma demonstração, como resultado de uma longa e complexa trajetória de raciocínio e não como o ponto inicial de uma aprendizagem.

Para discutir o *movimento* de um determinado objeto, faz-se necessário, primeiro, observar sua *velocidade* e *aceleração*. Podemos dizer, de modo não rigoroso (como já enfatizamos antes), que a velocidade de um objeto é uma medida da taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo, e a aceleração é uma medida da taxa de variação da velocidade. Mas para obtermos uma compreensão mais precisa das noções de velocidade e aceleração, necessitamos utilizar um dos conceitos fundamentais do cálculo – *a derivada*. Aliás, uma das razões da versatilidade do conceito de derivada é o fato de que se aplica ao estudo de taxas de variação em geral, e não só do movimento. Vejamos: um químico pode utilizá-lo para prever o resultado de diversas reações químicas; um biólogo, na pesquisa da taxa de crescimento de bactérias numa cultura; já os economistas, podem aplicá-lo a problemas de lucros e perdas. Segundo Ávila (1994), é possível estudar intuitivamente, de maneira simples inteligível, o conceito de derivada no ensino médio, sem necessidade da teoria de limites.

Entretanto, embora compartilhemos da opinião de Ávila sobre o ensino da derivada no ensino médio, é essencial dizer que ele se refere ao "conceito de derivada" na perspectiva do *cálculo tradicional*[27], enquanto que nós, em nossos estudos, defendemos o estudo do "conceito de derivada" na perspectiva do cálculo não-standard. A diferença básica entre o cálculo não-standard e o cálculo tradicional está no enfoque dado à teoria dos limites. No cálculo tradicional, primeiro, é estudado a noção de limites para depois os conceitos de derivada e integral (normalmente); já no cálculo não-standard, a prioridade são os *aspectos intuitivos* dos infinitésimos e dos conceitos de derivada e integral. Outro aspecto importante

(26) Consideremos "significados" correspondente a "sentidos", pois, reconhecer que o sentido das palavras e conceitos dependem do contexto intelectual em que eles ocorrem, mudando no decorrer do tempo, pode ser uma das contribuições da história da ciência para a formação de conceitos científicos na escola.

(27) O que chamamos de "cálculo tradicional" é todo o cálculo diferencial e integral, que se desenvolveu em torno dos conceitos de função e limite.

na ênfase aos conceitos de derivada e integral na perspectiva do cálculo não-standard, são as manipulações algébricas: são mais simples (envolve os conceitos algébricos do ensino fundamental) e acessíveis ao ensino médio.

Na verdade, a diferenciação é um processo para se determinar a rapidez segundo a qual uma determinada quantidade varia (ou muda). Quando diferenciamos uma função, estamos obtendo a sua taxa de variação (ou sua taxa de mudanças). Exemplificando: uma bola é arremessada para cima com velocidade inicial b em m/s e após t segundos atinge uma altura $y = bt - 16t^2$. Encontrar a velocidade para o tempo t.

Seja t real e $\Delta t \neq 0$, infinitesimal.

$$y + \Delta y = b(t + \Delta t) - 16(t + \Delta t)^2 ,$$

$$\Delta y = [b(t + \Delta t) - 16(t + \Delta t)^2] - [bt - 16t^2],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{[b(t + \Delta t) - 16(t + \Delta t)^2] - [bt - 16t^2]}{\Delta t},$$

$$= \frac{b\Delta t - 32t\Delta t - 16(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= b - 32t - 16\Delta t.$$

Calculemos a parte standard

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = st\,(b - 32t - 16\Delta t)$$

$$= st\,(b - 32t) - st(16\Delta t)$$

$$= b - 32t - 0 = b - 32t.$$

Para t segundos, $v = y' = b - 32t$ m/s.

Vejamos a representação gráfica de ambas funções.

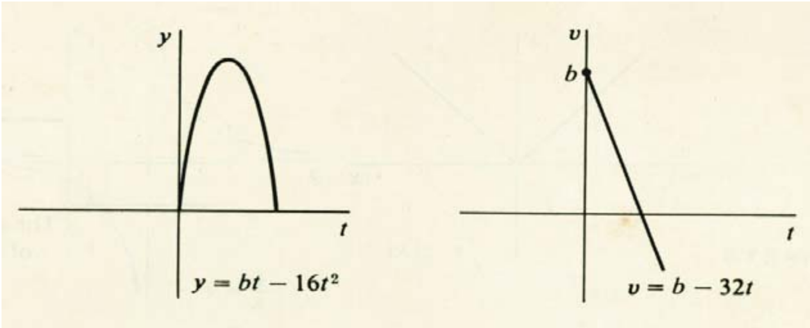


Fig. 3.1

A generalidade e a significância da diferenciação podem ser vistas examinando uma grande variedade de aplicações, mas nenhuma aplicação isolada conta toda a história do conceito. Daí a necessidade de inúmeras aplicações, inclusive, para melhorar a compreensão intuitiva das derivadas.

Vejamos outros exemplos onde se aplica o conceito de derivada.

(1) Encontrar a inclinação da curva $f(x) = \sqrt{x-1}$ para o ponto x = 5.

Seja $\Delta x \neq 0$, infinitesimal.

Comecemos por calcular $\Delta y/\Delta x$.

$$y + \Delta y = \sqrt{x - 1 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x - 1 + \Delta x} - \sqrt{x-1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x - 1 + \Delta x} - \sqrt{x-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x - 1 + \Delta x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x - 1 + \Delta x} + \sqrt{x-1})}{\Delta x(\sqrt{x - 1 + \Delta x} + \sqrt{x-1})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x - 1 + \Delta x} + \sqrt{x-1}}$$

Calculando a parte standard.

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{1}{\sqrt{x - 1 + \Delta x} + \sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{st\left(\sqrt{x - 1 + \Delta x} + \sqrt{x-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{st\left(\sqrt{x - 1 + \Delta x}\right) + st\left(\sqrt{x-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{}$$

$$\sqrt{x-1} \; + \; \sqrt{x-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = st\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

A inclinação da curva é a derivada de $f(x)$. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Para x = 5, a inclinação da curva é de ¼.

(2) A partícula se move de acordo com a equação $y = t^4$. Encontrar a velocidade da função em t.

Para encontrar a velocidade desta partícula, basta proceder de modo análogo ao exemplo anterior, utilizando as idéias do cálculo não-standard. A velocidade em função de t será a derivada de y, ou seja, $y' = 4t^3$.

Muitos problemas que envolvem máximos e mínimos podem ser tratados com o auxílio da derivada. Vejamos: a que ângulo de elevação deve ser lançado um projétil a fim de que seu alcance seja máximo? Se uma lata deve ter capacidade de um litro, quais as dimensões que consomem menor quantidade de material? Como pode um fabricante minimizar o custo de produção de determinado artigo? São inúmeras as suas aplicações. Como já enfatizamos, os conceitos fundamentais do cálculo têm servido de alavanca para desenvolver diversos segmentos das ciências e principalmente a tecnologia. Podemos dizer que das importantes criações matemáticas – o cálculo, foi a que resultou como a mais frutífera para o desenvolvimento atual das ciências. Esse é mais um argumento a reforçar a necessidade do aluno do ensino médio começar a conhecer este ramo extremamente poderoso da Matemática. Defendemos essa iniciação pelos conceitos do cálculo não-standard por assegurar uma abordagem mais intuitiva do que formal.

Além da derivada, outro conceito fundamental é o conceito de integral. Com o conceito de integral, segundo Swokowski (1983), é possível determinar o trabalho necessário para distender ou comprimir uma mola, calcular o centro de massa ou momento de inércia de um sólido, calcular o fluxo de sangue numa artéria, estimar a depreciação do equipamento numa fábrica, investigar conceitos como áreas de superfícies, volumes de sólidos geométricos e comprimentos de curvas, ...

No cálculo não-standard, a integral, praticamente, apresenta os “mesmos” teoremas, definições e regras do cálculo tradicional. Portanto, suponhamos que desejamos encontrar a integral definida de $y = (1 + t)/t^3$ para $t = 1$ e para $t = 2$, ou seja, encontrar a área embaixo da curva $y = (1 + t)/t^3$ para $t = 1$ e para $t = 2$.

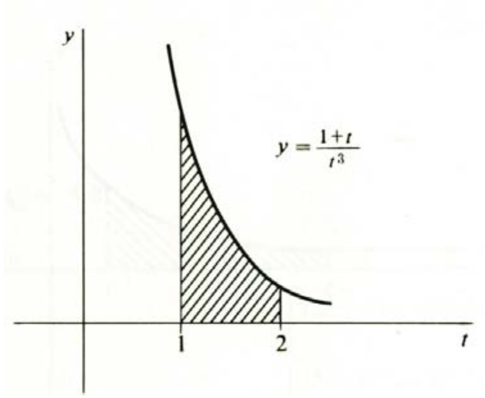


Fig. 3.2

$$\int_1^2 (1 + t)/t^3 \, dt = \int_1^2 (t^{-3} + t^{-2}) \, dt = \int_1^2 t^{-3} \, dt + \int_1^2 t^{-2} \, dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^2 + \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{(-2).4} - \frac{1}{(-2).1}\right) + \left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{-1}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

Assim, a área da curva é 7/8 u.a .

Observemos ainda, como calcular a área de uma curva através da integral e utilizando logaritmos.

Encontrar a área embaixo da curva $y = -2x^{-1}$, para $x = -5$ e para $x = -1$.

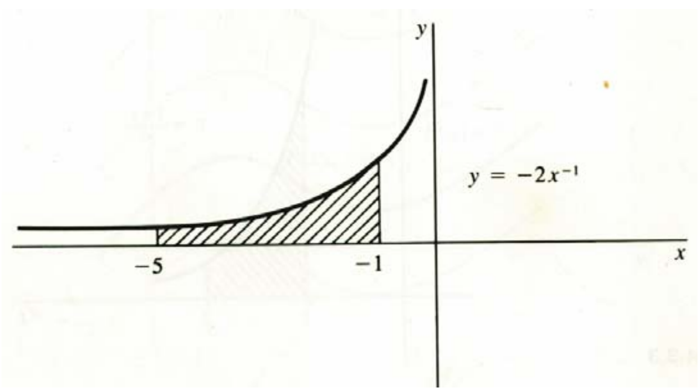


Fig. 3.3

A área é dada pela integral definida $\int_{-5}^{-1} -2x^{-1}\, dx$.

Primeiro calculemos a integral indefinida

$\int -2\, x^{-1}\, dx = -\, 2 \int x^{-1}\, dx = -\, 2 \ln |x| + C$.

Agora calculemos a integral definida.

$$\int_{-5}^{-1} -2x^{-1}\, dx = -\, 2 \ln |x| \Big]_{-5}^{-1}$$

$= -\, 2\, (\ln |-1| - \ln |-5|) = -\, 2\, (\ln 1 - \ln 5) = 2 \ln 5 \sim 3{,}219$.

A área é aproximadamente 3, 219 u. a.

Este exemplo ilustra a necessidade do valor absoluto na regra de integração $\int x^{-1}\, dx = 2 \ln |x| + C$.

Na verdade, é do conhecimento do aluno do ensino médio que o logaritmo natural ln x é indefinido para x = -5 e x = - 1, mas $\ln |x|$ é definido para todo $x \neq 0$. Podemos dizer que o sinal ($|\ \ |$) do valor absoluto é colocado quando integramos x^{-1} e removemos quando diferenciamos $\ln |x|$.

Vejamos agora, uma aplicação do conceito de integral na Física, apresentada por Seeley (1973), em uma situação sobre o cálculo de trabalho.

Quando uma força constante F atuando em linha reta move um objeto ao longo desta reta durante um percurso *l*, então, por definição, o *trabalho* realizado pela força é F*l*. Agora, se uma força *variável* F agindo ao longo do eixo dos x movimenta uma partícula de a até b, o trabalho realizado será, por definição,

$\int_a^b F(x)\, dx$ = trabalho realizado pela força $F(x)$ de $x = a$ a $x = b$.

As somas de Riemann mostram a origem desta integral. Podemos aproximar o trabalho realizado por F dividindo o intervalo [a,b] em n pequenos intervalos $[x_{j-1}, x_j]$. Em cada um destes intervalos, a força não varia muito, e o trabalho realizado será aproximadamente $F(\xi_j)\, \Delta x_j$, pois $F(\xi_j)$ é a força e Δx_j é o comprimento do intervalo. Assim, ao longo do intervalo total, o trabalho realizado será aproximadamente $\Sigma_1^n F(\xi_j)\, \Delta x_j$. Quando os comprimentos dos pequenos intervalos tendem a zero, a aproximação tende para o trabalho realizado, que é, portanto, $\int_a^b F(x)\, dx$.

Um exemplo importante é o trabalho realizado por uma mola cuja constante é K. Quando a mola está na posição x, a força que exerce é F(x) = -kx. Assim, o trabalho realizado pela mola para mover-se da posição de repouso x = 0 a uma outra posição qualquer $x = x_0$

será $\int_0^{x_0} F(x)\, dx = \int_0^{x_0} (-k)x\, dx = -\frac{1}{2} k\, x_0^2$.

Observemos que o trabalho realizado pela mola será sempre negativo. Isso é razoável; a mola resiste a deslocamentos a partir do repouso em qualquer direção, de maneira que sua contribuição ao trabalho de deslocamento será negativa.

Abordar esses conceitos do cálculo não-standard no ensino médio, no nosso entendimento, é oferece oportunidades aos alunos, de modo que percebam que para aprender de forma significativa, precisam estabelecer relações fundamentais entre os conceitos matemáticos e as estratégias usadas para resolver tarefas matemáticas, como também perceber que as ligações entre os conceitos são mais relevantes que o domínio de regras e algoritmos, embora não devam ser negligenciados no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Compreendemos que uma das dificuldades da aprendizagem de conceitos matemáticos decorre do fato deles não pertencerem ao mundo imediato da materialidade – na sua maioria, são abstratos e genéricos. Desse modo, mesmo que certos conceitos possam estar associados a uma classe de objetos materiais, a generalidade e a abstração somente serão compreendidas na medida em que forem abordadas por meio de um movimento evolutivo. Porém, mesmo que a base experimental não predomine na formação dos conceitos matemáticos, não podemos menosprezar a influência do saber extra-escola (conceitos não científicos) na estruturação da aprendizagem do aluno. Por isso, faz-se necessário, ao estudar os conceitos matemáticos no ensino médio, não incorrer no erro de uma formalização precoce, de um indevido deslocamento teórico, ou de uma inversão dos valores e objetivos educativos.

Ao considerar esse contexto, penso que ao professor está posto o desafio de imaginar novas metodologias e pesquisar estratégias alternativas para uma aprendizagem contextualizada, envolvente, participativa e inserida na realidade, pois, é fato a inadequação dos métodos unicamente expositivos, que reduzem os papéis dos professores e de alunos a meros transmissores e receptores de conteúdos. Essa inadequação para o processo de ensino-aprendizagem dos métodos expositivos foi apontada nos estudos de Piaget, Vygotsky e outros e também em pesquisas baseadas em teorias psicológicas, resultando em propostas que sugerem o uso de diversas estratégias e a participação ativa dos alunos. Parece-nos, que está sendo estabelecido um consenso de que o ensino de Matemático precisa libertar-se das amarras do ensino vigente, que não incentiva o conhecimento das idéias, dos conceitos, do conhecimento matemático relacional que leva o aluno a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados e aprendidos.

Assim, a partir dos pressupostos sócio interacionistas, é possível desenvolver a visão de que compreender um conceito deve ser um dos principais objetivos do ensino médio, apoiada na crença de que o aprendizado de Matemática, pelos alunos, é mais forte, significativo quando é resultado da interação entre as relações do professor e do aluno, do que quando lhes é imposto simplesmente por um professor ou por um livro-texto/didático. Acreditamos que, à medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e rica sobre os conceitos matemáticos, sua habilidade em usar a Matemática (em diversas situações) aumenta consideravelmente.

CAPÍTULO IV
CONTRIBUIÇÕES DOS CONCEITOS DO CÁLCULO NÃO-STANDARD PARA O ENSINO MÉDIO

As mudanças de rumo que podem acontecer na aprendizagem matemática do ensino médio, em certa medida, dependem do aprimoramento intelectual, emocional, comunicacional e ético por parte dos alunos, professores, escolas e sociedade. Podemos dizer que dependemos de professores intelectualmente e emocionalmente preparados, curiosos, entusiasmados, abertos para ensinar, que saibam e queiram motivar e dialogar. Dependemos também de alunos curiosos e motivados – alunos motivados aprendem e ensinam, avançam mais, ajudam o professor a ajudá-los a melhorar e estimulam as melhores qualidades do professor. Na verdade, facilitam o processo de ensino-aprendizagem, tornam-se participantes ativos e lúcidos – parceiros do professor. Dependemos ainda de diretores e coordenadores mais abertos, que entendam as diversas dimensões que estão envolvidas no ato pedagógico, além da sociedade, é claro.

Entretanto, sabe-se que não é fácil fazer com que os professores de Matemática do ensino médio aceitem mudar sua forma de trabalho em sala de aula. Porém, é cada vez mais evidente, que o ensino de Matemática apoiado inteiramente em técnicas operatórias, repetitivas e sem tratar das idéias, dos conceitos, não deveria ser o caminho escolhido. Portanto, defendemos que um dos pontos de partida na tentativa de melhorar a qualidade do ensino de Matemática no ensino médio, seja *o abordar das idéias, dos conceitos matemáticos historicamente produzidos*, em especial, os conceitos do cálculo não-standard.

Neste trabalho, pretendemos apresentar possíveis contribuições do cálculo não-standard ao ensino médio. Para tanto, recorreremos aos fundamentos dos conceitos de movimento, variação, continuidade, derivada e integral. Nosso propósito é mostrar que esses conceitos tão importantes para a Matemática podem ser abordados desde o ensino médio. Afinal, o aluno do ensino médio está, do ponto de vista cognitivo (como já falamos) - apto, ou seja, já desenvolveu estruturas cognitivas que possibilitam tal aprendizagem. E, segundo Krishnamurti (2003, p. 43), notável pensador indiano,

> *A madureza nada tem que ver com a idade; ela vem com a compreensão. O ardente espírito de investigação é talvez mais fácil para os jovens, porque os mais velhos já foram muito fustigados pela vida, os conflitos os cansaram, e a morte, de diferentes formas, os espreita. Isso não significa que sejam incapazes de resoluta investigação, apenas lhes é mais difícil.*

De qualquer modo, o conceito de ensinar está mais diretamente ligado ao professor que, por suas ações, poderá mostrar ao aluno que a atividade matemática não se resume à transmissão de conhecimentos “prontos”, “definitivos”, embora seja uma prática ainda comum entre os professores de Matemática, mas que é possível estabelecer relações entre os diversos conceitos matemáticos produzidos ao longo da história, gerando novas possibilidades para aprendê-los, como também novos conceitos e novas aplicações. Já o ato de aprender está ligado mais diretamente ao aluno que, por suas ações (envolvendo o próprio aluno, os colegas e o professor), poderá buscar e adquirir informações, dar significados ao conhecimento, produzir reflexões e conhecimentos próprios, pesquisar, dialogar, debater, desenvolver competências pessoais e profissionais, atitudes éticas, políticas, mudar comportamentos, transferir aprendizagens, integrar conceitos teóricos com realidades práticas, relacionar e contextualizar experiências, dar sentido às diferentes práticas da vida cotidiana, desenvolver sua criticidade e a capacidade de considerar e olhar para os fatos e fenômenos sob diversos ângulos, comparar posições e teorias e resolver problemas. Em outros termos, o aluno cresce e desenvolve-se ao assumir o papel de *aprendiz* ativo e participante – não mais passivo e repetidor.

Pelo que já falamos sobre o cálculo não-standard, pode-se dizer que é possível identificar aspectos dos seus conceitos pertinentes ao ensino médio. O conceito de movimento, por exemplo, precisa ser melhor compreendido pelo aluno do ensino médio. Para tanto, é necessário observar como esse conceito se formou ao longo da sua história, suas aplicações e suas relações com outros conceitos. O movimento – que nos parece tão trivial, foi estudado já na antiga Grécia por Zenão, numa série de paradoxos cujo objetivo era demonstrar que a *compreensão* do movimento era impossível porque nunca se poderia completar uma série infinita de atos. Isso quer dizer que antes de percorrer determinada distância, tinha-se primeiro de percorrer a metade dela, depois metade da distância que restava, depois metade desta, e assim por diante. Sendo a série interminável, era impossível chegar ao objetivo. Esse aspecto filosófico, enfocado no ensino médio, certamente, provocará uma mudança de mentalidade e de atitude por parte do aluno. É possível, através de discussões filosóficas levantar hipóteses, defendê-las, testá-las, contrapô-las, enfim, possibilitar ao aluno do ensino médio uma compreensão mais alargada/significativa do conceito de movimento.

Lembremos que Zenão reconhecia o movimento físico – o mover-se. Segundo alguns historiadores, sua intenção era mostrar através da realidade do movimento (da qual não se pode duvidar), flagrantes contradições existentes em nossas noções do espaço, tempo e continuidade. O deslocamento de um carro, de um trem, de uma pessoa, de um pássaro são exemplos de movimento físico, estudados atualmente, no ensino médio. O movimento físico – passar de um lugar para outro lugar através de uma certa distância percorrida, é o mais evidente, mais comum dos diversos movimentos que percebemos em nosso "mundo". Na realidade, trata-se de um conceito abstraído da experiência cotidiana. Por isso, segundo Selvaggi (1988) - professor de filosofia natural, não é possível dar uma definição propriamente dita ao *movimento local* (chamamos de movimento físico), mas empreender uma análise descritiva.

De qualquer modo, há diferenças no *descrever* e no *definir*. Portanto, é importante que o aluno do ensino médio reconheça quando está *definindo* ou descrevendo algo, como também *explicando*. A propósito, podemos estabelecer uma analogia com uma partida de futebol: o que faz o narrador esportivo? – ele descreve o que vê, o que observa em campo; já o comentarista, explica os lances da partida, diz os porquês e o técnico define as estratégias ao mostrar como os jogadores devem se comportar no desenvolvimento da partida. Desse modo, a descrição é uma indicação daquilo que aparece por meio da observação, da experiência e, embora verdadeira, é um modo aproximado de conhecer a realidade.

Assim, ao abordar a equação F = m.a que exprime convenientemente o conteúdo da 2ª lei[1] de Newton sobre movimento, estamos descrevendo ou definindo? Alguns professores costumam apresentar essa lei de Newton como uma definição, mas na verdade, é uma descrição. Uma descrição pode ser feita através da nossa linguagem comum como também através de uma equação.

Eis a descrição dada por Selvaggi (1988, p. 225) ao *movimento local*.

> *Devemos antes de tudo afirmar que o lugar, o estar em um lugar e o mover-se localmente são algo de real, um procedimento real e um modo real de ser. Movemo-nos, pois, em uma concepção realista e não puramente subjetivista e idealista.Devemos, em segundo lugar, afirmar também que lugar, posição e movimento local são algo de relativo entre muitos corpos.[...] Da relatividade do lugar, posição e movimento se segue que são diversamente determinados segundo os corpos aos quais são referidos."*

Afirma também, que um dos aspectos da primazia lógica e ontológica do movimento local em relação aos outros movimentos do mundo físico, é sua simplicidade e universalidade. Portanto, é pertinente identificar quais idéias sobre movimento melhor ajudam na compreensão desse conceito, visto que, inúmeros alunos do ensino médio apresentam pouco domínio do mesmo quando têm que resolver questões que o abordam.

Neste contexto de ensino-aprendizagem, será interessante observar que uma das coisas que a Física descreve é o *movimento*. Vamos citar a lei mais simples do movimento descoberta por Galileu e Descartes e formulada por Newton: um corpo que não seja

(1) Uma das versões da 2ª lei: as mudanças que acontecem no movimento são proporcionais à força motriz e produzem-se na linha reta, na qual foi imprimida esta força.

submetido à ação de força alguma se move em linha reta e em velocidade constante. A linha reta é uma representação matemática, "*imagem ideal da continuidade*" – segundo Caraça, como já falamos. Mas, para entender o que essa lei estabelece, precisamos saber o que significa mover-se em velocidade constante. Diz-se que alguém ou algum corpo se move em velocidade constante quando distâncias iguais são percorridas em tempos iguais. Em outros termos: se, em tempos iguais, percorrem-se espaços iguais, então diz-se que o corpo se move *uniformemente*; e a distância percorrida numa unidade de tempo, digamos, um segundo, é chamada de velocidade desse movimento uniforme. Se as distâncias percorridas em idênticos intervalos de tempo não são iguais - o movimento é não-uniforme. Observemos a presença da noção de tempo no conceito de "velocidade constante" e, conseqüentemente, nos perguntemos: em relação a que tempo o movimento tem que ser constante? Seria o tempo medido por algum relógio em particular? Para o físico teórico Lee Smolin (1997, p. 246), "*não podemos conceber a idéia de movimento sem que haja tempo.*" A noção de tempo, embora seja considerada básica na Física – por muitos físicos, não é consensual.

Sabemos que quando Newton formulou sua lei (acima citada), resolveu o problema da escolha do relógio[2] postulando a existência do tempo absoluto. Com isso, foi contra as idéias de contemporâneos como Descartes e Leibniz, que defendiam a idéia de que o tempo deve ser apenas um aspecto da relação entre as coisas reais e os processos reais do mundo. É possível que as idéias de Descartes e Leibniz sobre o tempo sejam mais frutíferas – principalmente para o ensino atual, mas como Newton era um dos homens de maior conhecimento naquela época, suas idéias sobre o tempo e suas leis sobre o movimento - prevaleceram, ou seja, sua filosofia só faz sentido a partir da crença no tempo absoluto. Segundo Smolin (1997), Albert Einstein, que desbancou a teoria de Newton sobre o tempo, elogiou a "coragem e discernimento" de Newton para opor-se claramente ao que seria o melhor argumento filosófico (as idéias de Descartes e Leibniz) e fazer todas as deduções necessárias para criar uma física que fizesse sentido.

Sem dúvida, podemos afirmar, que o debate entre a noção de tempo absoluto e tempo relacional, ecoaram ao longo da história da Física e da Filosofia e que perdura até hoje, à medida que tentamos entender qual noção de tempo e espaço deveria substituir a de Newton.

---

(2) Embora todos saibam que os relógios medem o tempo, esse problema consiste no fato de serem os relógios sistemas físicos complexos e, portanto, sujeitos a imperfeição, a quebrar ou parar de funcionar por falta de energia – por exemplo. Porém se pegarmos dois relógios, sincronizá-los e deixá-los em funcionamento, depois de algum tempo com certeza estarão marcando horários diferentes. Nesse caso, o tempo é apenas o que os relógios medem; como existem muitos relógios, e todos discordam sobre o tempo, há muitos tempos diferentes. Sem um tempo absoluto, podemos dizer apenas que o tempo é definido por qualquer relógio que decidamos usar.

As noções de tempo e espaço de Newton também são estudadas no ensino médio. Daí a necessidade de mostrar para o aluno, já nesse nível de ensino, a existência de diferentes concepções sobre o movimento, visto ser bastante comum apresentar o conceito movimento, em apenas uma perspectiva. O nosso desejo é justamente contribuir para explicar da melhor maneira possível essas noções que o conceito de movimento envolve. Portanto, discutir no ensino médio sobre ser o tempo absoluto ou relacional será bastante oportuno para que o aluno passe a conhecer as diferentes noções de tempo que, certamente contribuirão para melhorar sua aprendizagem sobre movimento.

Ainda sobre o tempo, Smolin (1997, p. 249) nos diz que:

> *Se não existe tempo absoluto, então as leis de Newton não fazem sentido. Devem ser substituídas por um tipo diferente de lei que faça sentido quando o tempo for medido por qualquer relógio. [...] Leibniz nunca foi capaz de inventar tal lei. Mas Einstein foi, e o fato de ele ter encontrado uma maneira de expressar as leis do movimento, de modo que qualquer relógio empregado pudesse endossar o seu significado, é realmente uma das maiores conquistas de sua teoria da relatividade.*

Os matemáticos dos séculos XVII e XVIII, ao estudarem o movimento e a variação, aceitavam como natural o conceito de uma quantidade x variando continuamente e tendendo, em um fluxo contínuo, para um valor x_1. Porém, quando se trabalha com uma variável contínua x que varia por todo um intervalo de reta numérica, não dá para dizer como x deve se "aproximar" do valor fixo x_1 de modo a assumir consecutivamente e ordenadamente todos os valores no intervalo; isto porque os pontos de uma reta formam um conjunto denso, e não existe qualquer ponto "seguinte" após um dado ponto ter sido alcançado. Na verdade, é possível afirmar que o conceito intuitivo físico de movimento contínuo, ao longo da sua história (desde a época de Zenão e seus paradoxos), tem frustrado as tentativas para se obter uma formulação matemática exata desse conceito.

Observemos que há uma certa discordância entre a idéia intuitiva e a linguagem matemática destinada a descrever o movimento contínuo. Contudo, os matemáticos tentaram dominar essa discordância através da análise infinitesimal. Segundo Dantzig (1970), essa análise começou pela geometria e pela mecânica, ocupando um lugar de destaque nas ciências exatas, até tornar-se uma verdadeira *teoria matemática de mudança*. E apesar da eficiência e da validade dos métodos da análise, ainda há espaço para questionarmos sobre o contínuo.

De qualquer modo, das idéias sobre movimento, o matemático considera a idéia de que o movimento é uma correspondência entre posição e tempo (como já enfatizamos). Tal correspondência entre variáveis, no caso *tempo* e *espaço*, é o que chamamos de função. Ao considerar o movimento uma função, torna-se oportuno supor duas sucessões, dois conjuntos de números – o do tempo, que normalmente representamos por *t,* e o do espaço, que representamos por *s*; colocados em correspondência um com o outro. Pode-se dizer, que essa correspondência entre *t* e *s* pode ser expressa por uma lei simbólica. Essa lei está na forma como essa correspondência se realiza, entre tempo e espaço – a essência da criação dessa lei está na correspondência, porém, se a correspondência mudar, a lei mudará.

Seja *t* a variável do conjunto dos tempos e *s* a variável do conjunto dos espaços. A lei consiste na existência de uma determinada correspondência entre *t* e *s*. Assim, poderemos dizer que a variável espaço (*s*) é função da variável tempo (*t*). Simbolicamente: s = f(t). A variável *t,* chamaremos de independente e a variável *s* de variável dependente. Cabe observar, porém, que quando dizemos que s = f(t), está implicado que a qualquer valor de *t* corresponde um valor (e só um) de *s* – é muito mais do que alguns pares de valores da correspondência. Daí a importância e força do conceito de função. Na verdade, o conceito de função é o instrumento matemático adequado para estudarmos alguns aspectos (leis, velocidade, aceleração, e outros) do conceito de movimento. Vejamos.

Chamamos de movimento retilíneo o movimento de um corpo em linha reta. O movimento de um foguete logo após o lançamento, por exemplo, pode ser considerado retilíneo. Outro exemplo de movimento retilíneo é o movimento de um projétil. Quando estudamos o movimento retilíneo, podemos supor que o corpo está se movimentando ao longo de um dos eixos do sistema de coordenadas (tempo (*t*) e espaço (*s*)). A posição do corpo é uma função do tempo *t* e costuma ser representada como *s(t*). A taxa de variação da posição do corpo em relação ao tempo é a *velocidade v(t*); a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo é a *aceleração a(t*). Em outras palavras, $v(t) = s'(t)$ e $a(t) = v'(t)$. Quando $v(t) = 0$, dizemos que o corpo está em repouso. Portanto, embora saibamos que o *conceito de função* é bastante trabalhado no ensino médio, cabe enfatizar que é necessário, para melhorar sua compreensão, relacioná-lo ao conceito de movimento.

O movimento foi o primeiro assunto ao qual foi aplicado o cálculo diferencial. Através da derivada – conceito básico do cálculo diferencial, podemos determinar a taxa de variação de uma função e também a inclinação da reta tangente a uma curva. Portanto, nada mais pertinente que explorar as idéias do movimento na perspectiva do cálculo não-standard, visto que, é possível trabalhar com a intuição – fundamental para a compreensão dos alunos do ensino médio, e em certa medida, com a formalização matemática.

Suponhamos um corpo que se move ao longo do eixo y com velocidade constante. No tempo t = 0 s ele está no ponto y = 3 m. No tempo t = 2 s ele está no ponto y = 11 m. Encontrar a velocidade e a função do movimento.

Sabemos que a velocidade é definida como a distância percorrida dividida pelo tempo gasto, portanto, a velocidade é: $v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 3}{2 - 0} = 4$ m/s

Se o movimento do corpo é representado no plano (t,y) – vide figura. O resultado é uma reta através dos pontos P(0,3) e Q(2,11). A velocidade, sendo a razão de Δy para Δx, é apenas a inclinação da reta. A função do movimento é expressa pela lei:

$$y - 3 = 4t \quad \text{ou} \quad y = 4t + 3.$$

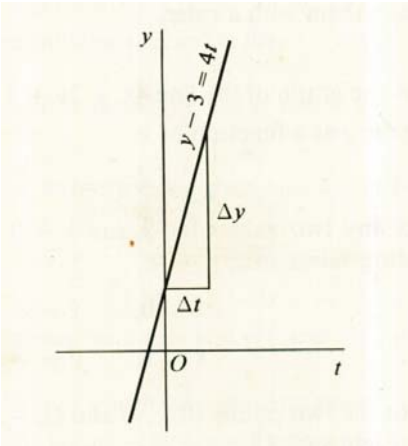


Fig. 4.1

Parece-nos pertinente uma questão mais genérica utilizando o conceito de função.

Suponhamos um corpo se movendo com velocidade constante que esteja no ponto $y = y_1$, no tempo t_1, e no ponto $y = y_2$ no tempo $t = t_2$. Então a velocidade é: $v = \Delta y / \Delta x$. O movimento do corpo representado no plano (t,y) é a reta passando através de dois pontos (t_1, y_1) e (t_2, y_2) e a velocidade é a inclinação desta reta.

Uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, onde A e B não são ambos zero, não é desconhecida do universo do ensino médio. Essa equação é chamada de equação linear, e a razão para este nome é que *toda equação linear determina uma reta.* Vejamos:

(1) Se $B = 0$. A equação $Ax + C = 0$ pode ser resolvida por x, $x = - C/A$. Esta é uma linha vertical – uma reta.

(2) Se $B \neq 0$. Neste caso, podemos resolver a equação dada por "y" e o resultado é: $y = (- Ax - C)/B$ ou $y = (- Ax/B) - (C/B)$. Esta é uma reta com inclinação $-A/B$ cruzando o eixo y em $-C/B$.

Aprecie aqui professor, a importância do conceito de função e examine junto ao aluno do ensino médio o quanto é essencial ter clareza dos fatos matemáticos que estão sendo utilizados, pois muitos alunos pensam que boas idéias costumam ser complicadas, mas às vezes, elas são simples; e perceber que o conceito de função o ajudará na compreensão do conceito de movimento, certamente proporcionará um avanço na sua aprendizagem e em certa medida, confiança. É possível que ao estabelecer relações entre função e movimento o aluno se surpreenda e exclame: “- mas como não pensei nisso antes?!”.

Vejamos um pouco mais sobre velocidade e inclinação.

Consideremos a parábola $y = x^2$ com o intuito de responder o que significa a inclinação de uma curva.

A inclinação medirá a direção de uma curva somente enquanto as medidas da direção de uma reta. A inclinação desta curva será diferente em diferentes pontos do eixo x, porque a direção da curva muda.

Se (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ são dois pontos na curva, então a “inclinação média” da curva entre estes dois pontos é definida como a razão da mudança em “y” para a mudança em “x”,

$$\text{Inclinação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Isso é exatamente o mesmo que a inclinação da linha reta através dos pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

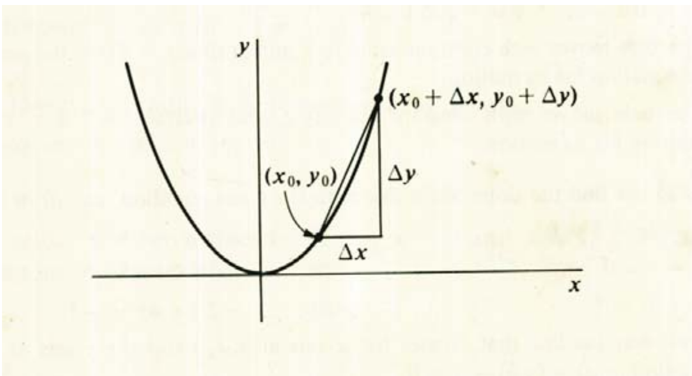


Fig. 4.2

Calculemos a inclinação média. Os dois pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ estão na curva, então

$$y_0 = x_0^2$$

$$y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$$

Subtraindo, $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$

Dividindo por Δx, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$

Isto pode ser simplificado, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x_0^2 + 2\, x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$

$$= \frac{2\,x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2\,x_0 + \Delta x.$$

Assim, a inclinação média é: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,x_0 + \Delta x.$

Cabe observar que este cálculo só pode ser feito quando $\Delta x \neq 0$, porque em $\Delta x = 0$, o quociente $\Delta y/\Delta x$ é indefinido.

Mas raciocinando de uma maneira não rigorosa, podemos calcular a inclinação da curva no ponto (x_0, y_0).

Seja Δx muito pequeno (mas não zero). Então o ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ é próximo de (x_0, y_0), de forma que a inclinação média entre estes dois pontos é próximo da inclinação da curva em (x_0, y_0);

[inclinação de (x_0, y_0)] é próximo de $2\,x_0 + \Delta x$.

Negligenciamos o termo Δx porque ele é muito pequeno, e sobra-nos

[inclinação de (x_0, y_0)] = $2\,x_0$.

Por exemplo, no ponto (0,0) a inclinação é zero, no ponto (1,1) a inclinação é 2, e no ponto (-3,9) a inclinação é –6.

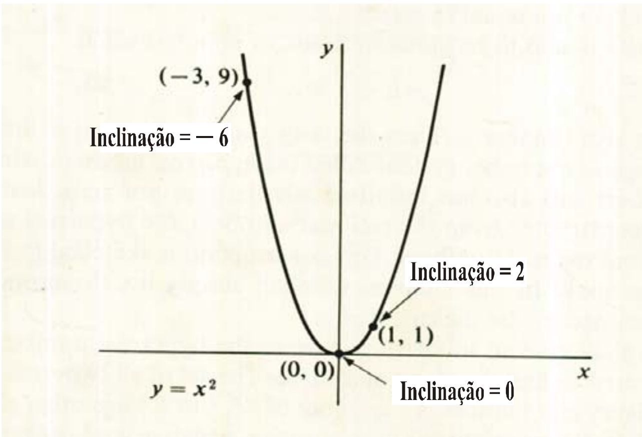


Fig. 4.3

Quanto ao argumento intuitivo apresentado acima, há um problema seja ele em termos de inclinação ou velocidade. É que não está claro quando algo deva ser "negligenciado" - isso nos faz lembrar dos problemas enfrentados na fundamentação do cálculo – a ambigüidade dos infinitésimos. Porém, a idéia básica desse argumento pode se transformar num útil e sólido método matemático para encontrar a inclinação de uma curva ou a velocidade. Para que isso aconteça, segundo Keisler (1986), é necessário distinguir com precisão entre números que são suficientemente pequenos para serem negligenciados e números que não o são. Na realidade, nenhum número real exceto zero é suficientemente pequeno para ser negligenciado, mas como sabemos, não podemos considerá-lo. Caso o consideremos, estaremos voltando à ambigüidade – abrindo mão do rigor. Portanto, para contornar este problema é preciso introduzir um novo tipo de número que seja infinitamente pequeno, mas não seja zero. Esse número infinitamente pequeno ou infinitesimal foi criado por A. Robinson. Como já falamos, um número ξ é considerado como infinitamente pequeno ou infinitesimal, se $- a < \xi < a$, para cada número real positivo "a". Os infinitesimais criados por Robinson que não são zero e todos os números reais formam um novo sistema numérico – o conjunto dos números hiper-reais.

Na verdade, a criação dos números hiper-reais foi bastante significativa na evolução dos métodos matemáticos. Contribuíram para resolver questões epistemológicas e filosóficas que perduraram por muito tempo sem respostas – a natureza dos infinitésimos, a ambigüidade, entre outras. E o fato de possibilitar o uso de argumentos intuitivos, porém com rigor, faz da criação robinsoniana um marco histórico no desenvolvimento da Matemática. Por isso estamos a *identificar possíveis contribuições para o ensino médio*, visto que, neste nível de ensino tem ocorrido, ainda de forma marcante e recorrente um simbolismo um tanto exagerado em detrimento das idéias e métodos intuitivos. O uso de argumentos intuitivos na resolução dos cálculos, certamente configura uma importante contribuição para o ensino de Matemática no ensino médio.

Pois bem! Com a introdução dos números infinitamente pequeno ou infinitesimal nos argumentos intuitivos, os alunos do ensino médio poderão calcular com *compreensão*, tanto as inclinações de uma dada curva como também a velocidade de um corpo através de manipulações algébricas. Exemplificando.

Observemos mais uma vez a parábola $y = x^2$. (Fig. 4.4)

Consideremos um ponto (x_0, y_0) na curva $y = x^2$. Seja Δx um infinitesimal ou positivo ou negativo (mas não zero) e seja Δy a mudança correspondente em y.

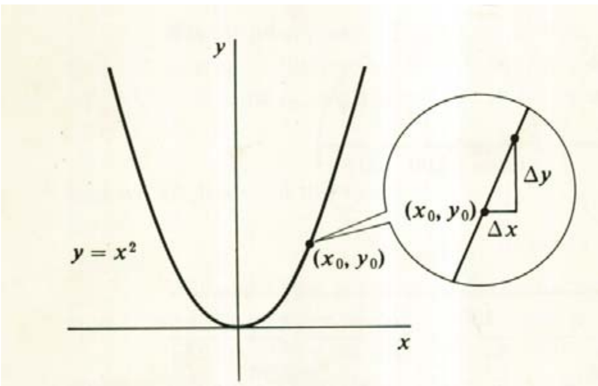


Fig. 4.4

Assim, a inclinação em (x_0, y_0) é definida da seguinte maneira:

[inclinação em (x_0, y_0)] = [o número real infinitamente próximo a $\Delta y/\Delta x$]

Calculemos $\Delta y/\Delta x$ como antes:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Este é um número hiper-real, não é um número real. E desde que Δx é infinitesimal, o número hiper-real $2x_0 + \Delta x$ é infinitamente próximo ao número real $2x_0$. Desse modo, concluímos que

[inclinação em (x_0, y_0)] = $2x_0$.

Tenho uma observação a acrescentar. Para que raciocínios intuitivos e manipulações algébricas (como as apresentada acima) se tornem práticas recorrentes no aprendizado do ensino médio, é preciso um esforço por parte do professor, no sentido de familiarizá-los (os alunos) com outras práticas, observando que à medida que se ampliam os conjuntos numéricos e se estendem as operações para os novos conjuntos, os significados dessas operações vão tomando um sentido mais amplo e mais geral. Na verdade, as questões que se colocam para o professor, no processo de expansão dos conjuntos numéricos, não se referem apenas às definições que apresentam os resultados das operações ou às demonstrações formais da permanência das propriedades do conjunto ampliado, mas, fundamentalmente, a uma compreensão das razões pelas quais as operações, com os novos números, devem ser efetuadas de um determinado modo e por que algumas propriedades permanecem válidas e outras não. Lembremos: o conjunto R é arquimediano, já o conjunto R* é não arquimediano.

Cabe ressaltar que expansões numéricas como a dos naturais, racionais, reais, complexos foram apoiadas no princípio de permanência das leis formais ou *princípio de Hankel* – como também é conhecido. Entretanto, tornou-se depois ultrapassado e mesmo um entrave a novas expansões (os quatérnios de Hamilton[3] , álgebra das matrizes, etc) por impor que, fossem desenvolvidas de modo a conservar a generalidade da aplicação das propriedades formais[4]. Para ilustrar: o produto entre duas matrizes quaisquer A e B não é comutativo.

De fato, tornou-se essencial observar, que em certa medida, é produtivo não se "prender" a certos princípios, até porque, o rigor excessivo, imposto prematuramente no

(3) São números da forma a + bi + cj + dk com a, b, c, d números reais. Análogos aos números complexos, mas não comutativo nas operações de (+) e (.); foram desenvolvidos por Hamilton por volta de 1843. Aplica-se na descrição da rotação do espaço e na teoria dos números. (cf. DICIONÁRIO DE MATEMÁTICA, 1980).

(4) Chamamos de propriedades formais as propriedades que mostram as várias formas pelas quais os dados podem ser combinados sem alterar os resultados, alguns exemplos: a + b = b + c; a.b = b.a; a.(b + c) = a.b + a.c; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$. Pode-se dizer que as propriedades formais das operações adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmação constitui o conjunto das leis operatórias do cálculo aritmético e algébrico. Também cabe observar as propriedades não formais dessas operações – estas dizem respeito à maneira como os resultados variam quando os dados variam – alguns exemplos: $b > b' \to a + b > a + b'$; $b > b' \to a - b < a - b'$; $a > b, c > 0 \to a.c > b.c$; $n > m, a > 1 \to a^n > a^m$.

desenvolvimento de novas idéias/teorias, pode sufocar a imaginação e até anular a invenção. Na verdade, uma certa liberdade dos rigores pré-estabelecidos tende a promover o desenvolvimento de uma teoria nas suas fases iniciais, ainda que isso represente o risco de certa margem de erro. Os matemáticos têm demonstrado que seguem adiante desenvolvendo a Matemática ao adotar esta postura – "de uma certa liberdade".

Pois bem! Constatada a necessidade de "negligenciar", em certa medida, alguns *princípios* para que ocorra o desenvolvimento da Matemática, entendemos que isso também possa acontecer em relação ao seu ensino. Desse modo, princípios que regem o ensino de Matemática precisam ser revistos: *o formalismo*, *a linearidade*, entre outros; visto que, têm se constituído em obstáculos para o aprendizado do aluno.

Muitos alunos são capazes de resolver um problema científico reduzindo-o ao formalismo matemático, porém sem compreendê-lo nos seus aspectos físicos e conceituais. Portanto, ao falarmos em contribuições para o ensino médio através dos conceitos do cálculo não-standard, pretende-se fortalecer a dimensão semântica da Matemática - mostrar o valor dos sentidos/significados dos conceitos, como também, mostrar ao aluno do ensino médio que a Matemática não é apenas uma linguagem sem conteúdo, um mero conjunto de regras sintáticas, destituídas de sentidos/significados. "*O que é consistente com a sintaxe matemática pode não ser com a sua semântica.*"(BORGES, 2004, p.2).

Por *experiência*, pode-se dizer que, no ensino médio, a semântica dos conceitos matemáticos ainda é negligenciada por professores e alunos. Os professores, na sua maioria, continuam encarando a Matemática como uma linguagem na qual existe apenas a dimensão sintática, ou seja, não tem a função de tratar dos conceitos, mas, sim, de conferir autonomia ao rigor simbólico no desenvolvimento dos cálculos. Isso tem acarretado problemas sérios para o ensino de Matemática. O excessivo formalismo tem produzido alunos capazes de realizar inúmeros cálculos eficientemente, mas com deficiência em analisar a pertinência das respostas encontradas. Segundo Borges (2004, p.2), "*se dez operários constroem um mesmo muro em oito horas, isso não quer dizer que um milhão de operários o construam em alguns segundos, embora a solução matemática formalmente aponte nessa direção.*" De fato, faz-se necessário desenvolver no aluno o hábito de verificar a plausibilidade das respostas, independentemente do conceito estudado.

Agora, da perspectiva do cálculo não-standard, observemos a plausibilidade da resposta desta situação.

Suponhamos que o custo para fazer x agulhas seja $\sqrt{x}$ reais. Qual será o custo marginal depois de ter feito 10000 agulhas?

Comecemos representando a grandeza custo[4] pela função $y = \sqrt{x}$. A derivada da função custo é conhecida como custo marginal. Nesse caso, o custo marginal é y'.

Calculemos. Antes, porém, observemos que para encontrar a derivada da função $y = \sqrt{x}$, é preciso considerar três possibilidades: $x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$. Como nossa situação refere-se à produção, consideremos $x > 0$.

Seja $y = \sqrt{x}$ e Δx um infinitesimal diferente de zero ($\Delta x \neq 0$). Então,

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})}{\Delta x} \cdot \frac{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Tomando a parte standard $st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\right)$

$$= \frac{1}{st\,(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{st\,(\sqrt{x + \Delta x}) + st\,(\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Portanto, quando $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Desse modo, a derivada da $f(x) = \sqrt{x}$ é a função $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e o domínio é o conjunto de todos $x > 0$.

---

(4) Convém ressaltar que o custo de uma mercadoria não se limita ao seu preço de aquisição. No custo também entram alguns fatores: gastos de armazenagem, transporte, comercialização etc. O levantamento sistemático do custo de uma mercadoria é feito, nas empresas mais estruturadas, através de uma planilha. No entanto, é muito comum, empresários simplesmente arbitrarem uma determinada taxa de lucro a qual imaginam cobrir suas despesas e permitir um lucro líquido razoável.

Assim o custo marginal é $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Então, para x = 10000, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{10000}} = \dfrac{1}{200}$

O custo marginal para produzir 10000 agulhas é de 1 real por 200 agulhas ou de 1 centavo por 2 agulhas.

Assim, o custo marginal é a metade de um centavo por agulha.

Nesse contexto de valorização da semântica, além de serem estimulados a refletirem sobre as respostas encontradas, os alunos do ensino médio devem apresentar argumentos que justifiquem suas repostas e representá-las em linguagem matemática. Entendemos que a linguagem matemática vai além dos aspectos lógico-formais utilizados em demonstrações e definições matemáticas; engloba também, figuras, diagramas, desenhos e esboços informais. Portanto, o que importa é propiciar uma mudança de postura nos alunos, embora isso não ocorra de forma automática ou espontânea.

Na verdade, pesquisas têm demonstrado, a exemplo de ZUFFI & PACCA (2000), que a simbologia matemática formal, no ensino médio, não é encarada nem como um instrumento que facilita a resolução de problemas gerados pela observação cotidiana, muito menos como ferramenta abstrata que permita exercitar e construir estruturas de pensamento formais, através de encadeamentos lógicos de raciocínios, que são simplificados e armazenados nas notações simbólicas matemáticas. Para a maioria dos professores de Matemática do ensino médio, a linguagem matemática deve ser "aprendida", de acordo com os currículos propostos e as necessidades impostas para aprovação do aluno.

Essa visão da maioria dos professores no que se refere à linguagem matemática, é preocupante, visto que, para "*propiciar mudanças*", faz-se necessário, primeiro, mudar a concepção de que a linguagem matemática é algo pronto, estático e pouco contextualizado dentro da realidade em que vivemos. Professores que concebem a linguagem matemática desse modo, prestam um grande desserviço à educação de nossos jovens, principalmente, aos alunos da educação básica.

Diante dessas considerações, os conceitos do cálculo não-standard, para serem estudados no ensino médio, precisam tanto da dimensão semântica quanto da dimensão sintática – é a interação de ambas que certamente farão diferença na aprendizagem dos alunos. E para que essa interação de fato aconteça no ensino médio, precisa-se do esforço de alguém muito especial – o professor. É de sua responsabilidade, ainda que não exclusiva, familiarizar os alunos com as dimensões sintática e semântica e criar estratégias para que o aluno aprenda e se desenvolva.

Com imagens conceituais mais ampliadas que o aluno, é papel do professor, por exemplo, mostrar que o conceito de derivada pode ser aplicado a qualquer quantidade ou grandeza de variação contínua – "toda função derivável é continua", mas a recíproca é falsa; e como essas grandezas ocorrem em quase todos os ramos do conhecimento, as aplicações da derivada são numerosas e variadas. Essas tantas possibilidades para o conceito de derivada podem levar o aluno do ensino médio a perceber que, o que está sempre em jogo, em cada situação a estudar - é uma taxa de variação contínua. De fato, perceber aspectos essenciais de um determinado conceito e ser capaz de explicitá-los, melhora, substancialmente, o seu aprendizado. Sem dúvida, a abrangência e a diversidade das aplicações do conceito de derivada constitui-se numa contribuição capaz de melhorar qualitativamente e significativamente o aprendizado do aluno do ensino médio, principalmente, se ocorrer no processo ensino-aprendizagem desse conceito, estratégias que possibilitem ao aluno questionar, experimentar, analisar situações e desenvolver um espírito crítico a respeito das soluções encontradas.

Entendo, que considerar a fecundidade do conceito de derivada na perspectiva do cálculo não-standard, onde intuição e rigor têm papéis definidos, mas interagem - são tratados conjuntamente, seja uma alternativa para despertar maior interesse nos alunos do ensino médio e conseqüentemente, desenvolver um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos de Matemática.

Quando pensamos em determinar a *inclinação* ou o *coeficiente angular* da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função e a *velocidade* de um corpo em movimento retilíneo, estabelecemos alguma relação? Aparentemente, essas duas situações são diversas – diferentes. No entanto, ao analisá-las, compreendemos que ambas nos conduzem ao mesmo conceito – a derivada. A inclinação da reta tangente pode ser usada para indicar a taxa à qual o gráfico de uma curva sobe (ou desce), e a velocidade é a taxa à qual a distância varia em relação ao tempo. É o poder da generalidade dos conceitos matemáticos.

Com o conceito de derivada, resolvemos um problema considerado básico para a Matemática: *determinar a direção de uma curva em cada um de seus pontos*, visto que, em cada ponto, a curva pode ter uma direção diferente. Em termos gráficos, a direção de uma curva em um ponto é dada pela reta tangente à curva, nesse ponto. Na verdade, a reta tangente contém um ponto da curva, e seu coeficiente angular é a derivada da função neste ponto.

Para Keisler (1986), dada uma curva $y = f(x)$ e um ponto (a,b) na curva, a inclinação $f'(a)$ está definida, ou seja, a derivada. Então, a reta tangente à curva no ponto (a,b) está definida para a reta que passa pelo ponto (a,b) e tem a mesma inclinação em relação à curva para $x = a$. Assim a reta tangente é dada pela equação: $t(x) = f'(a)(x - a) + b$.

Para a curva $y = x^3$, encontrar a reta tangente nos pontos (0,0), (1,1) e (-1/2, -1/8).

A inclinação da curva, ou seja, a derivada é dada por $f'(x) = 3x^2$ (esse resultado já foi calculado antes na perspectiva do cálculo não-standard).

Para $x = 0$, $f'(x) = 3.0^2 = 0$. A reta tangente tem a seguinte equação: $t(x) = 0(x - 0) + 0$ ou $t(x) = 0$ ou ainda, $y = 0$.

Para $x = 1$, $f'(1) = 3$. A reta tangente é:
$t(x) = 3.(x - 1) + 1$, ou $t(x) = 3x - 2$ ou ainda, $y = 3x - 2$.

Para $x = -1/2$, $f'(-1/2) = 3. (-1/2)^2 = ¾$. A reta tangente é:
$t(x) = ¾(x - (-1/2)) + (-1/8)$, ou $t(x) = 3/4x + 1/4$ ou ainda, $y = 3/4x + 1/4$.

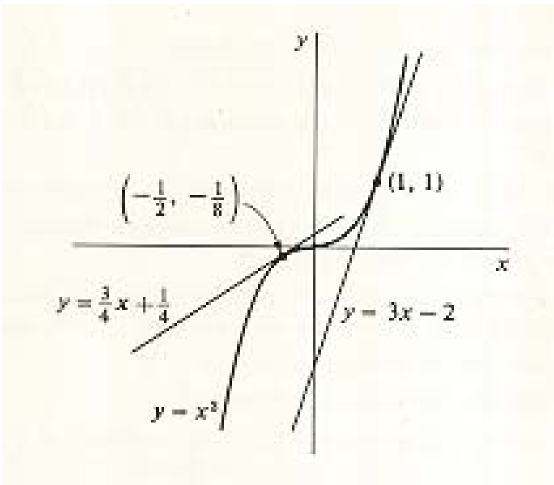


Fig. 4.5

Determinemos agora, o coeficiente angular das três (3) retas tangentes que encontramos - o coeficiente angular é a derivada da reta tangente no ponto dado. Portanto, o coeficiente no ponto (0,0) é zero (0), pois a reta tangente coincide com o eixo x. No ponto (1,1), o coeficiente é 3 e no ponto (-1/2,-1/8) é 3/4 .

Na busca por uma aprendizagem mais significativa para o ensino médio, cabe estudar "coeficiente angular" não de modo estático, *cateto oposto dividido pelo cateto adjacente*, mas pensá-lo de forma mais dinâmica, como *o número pelo qual é preciso multiplicar o cateto adjacente para obter o oposto.* Esse modo de pensar, não só torna possível entender que o quociente dy/dx é o coeficiente angular da reta tangente, como também contribui para relacionar o "coeficiente angular" com a diferencial dy: $dy = f'(x)dx$. A diferencial de x é a variável independente dx = Δx. Com Δx > 0, dy significa quanto a tangente em P sobe ou desce quando a variável independente varia de x para x + Δx.

A derivada nos dá informações interessantes sobre o aspecto do gráfico da função. Aliás, as representações gráficas podem sustentar argumentos ou construções mentais dos alunos, favorecendo articulações entre uma abordagem numérica, algébrica, com uma abordagem visual. Daí, a utilidade de incluir nas aulas de Matemática do ensino médio, atividades para estimular o pensar sobre os gráficos.

Consideremos a função $f(x) = x^2$ e sua derivada: $f'(x) = 2x$. À medida que x cresce, a derivada $f'(x) = 2x$ cresce; portanto, a inclinação da curva cresce com o crescer de x; ou seja, a reta tangente vai ficar cada vez mais vertical com o crescer de x.

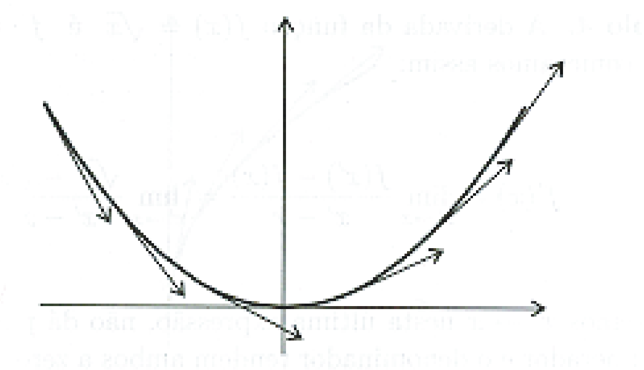


Fig. 4.6

Observemos também que a derivada se anula em x = 0 (tangente horizontal) e é negativa para x negativo. Mas mesmo sendo negativa, começando em qualquer valor negativo de x, a derivada vai crescendo com o crescer de x. Exemplificando: em x = -100 a derivada vale –200; quando x cresce de –100 para –50, a derivada cresce de –200 para –100; quando x cresce de –50 para –10, a derivada cresce de –100 para –20; e assim por diante. Nesse caso, a reta tangente vai passando de muito vertical negativamente a cada vez mais próxima da horizontal, chegando a horizontal em x = 0.

De qualquer modo, uma função pode ser crescente em um ou mais intervalos de seu domínio e decrescente em outros - é o caso da função $f(x) = x^2$. Essa função é decrescente em $x \leq 0$ e crescente em $x \geq 0$. As idéias de “função crescente” e “função decrescente”, juntamente com o conceito de derivada, permitem tirar conclusões fundamentais sobre o comportamento de uma função f. Uma delas é que quando a derivada da função é positiva, a função é crescente; e quando a derivada é negativa, a função é decrescente. De fato, se a derivada f'é positiva num certo valor x, isso significa que a reta tangente no ponto

P = (x, $f(x)$) tem inclinação positiva, e, se a derivada for negativa, a reta tangente terá inclinação negativa. Outra conclusão refere-se à variação da derivada da função. Se a derivada for crescente, é porque, com o crescer de x, a reta tangente ao gráfico de f vai girando no sentido anti-horário. Nesse caso, diz-se que o gráfico de f tem uma concavidade voltada para cima, ou que ele é convexo. Se a derivada for decrescente, é porque, com o crescer de x, a reta tangente ao gráfico de f vai girando no sentido horário. Nesse caso, o gráfico de f tem sua concavidade voltada para baixo, ou que é côncavo.

Vejamos como é útil, no estudo da função quadrática, o que foi dito.

Consideremos a função $y = f(x) = 6x^2 - x - 2$, cuja derivada, $y' = f'(x) = 12x - 1$. f(x) é positiva para $x > 1/12$ e negativa para $x < 1/12$; conseqüentemente, a função é crescente à direita de $x = 1/12$ e decrescente à esquerda. A função decresce quando x varia de $-\infty$ a $x = 1/12$; e cresce quando x varia deste valor de $x = 1/12$ a $+\infty$. Portanto, essa função atinge seu valor mínimo $f(1/12) = -49/24 \approx -2{,}04$ em $x = 1/12$, onde a tangente é horizontal, pois $f'(1/12) = 0$; e não tem valor máximo.

Como a derivada é uma função crescente em todo o eixo real, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f vai crescendo sempre com o crescer de x. Em termos geométricos, isso significa que a reta tangente vai girando no sentido anti-horário à medida que x cresce, e o gráfico de f tem sua concavidade voltada para cima.

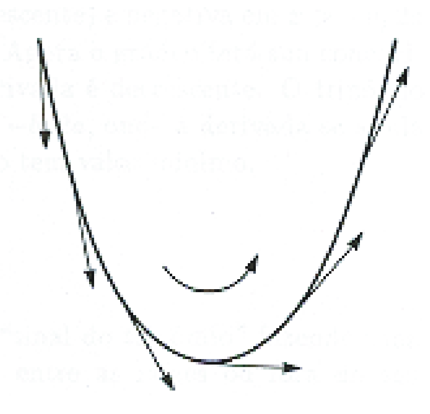


Fig. 4.7

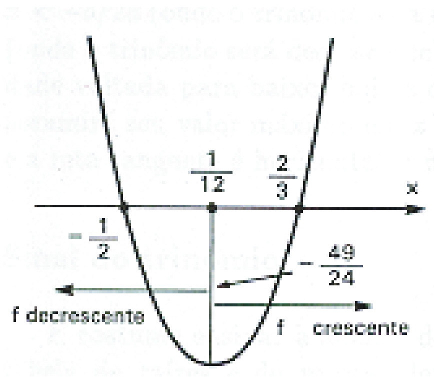


Fig. 4.8

A função se anula em $x = -1/2$ e $x = 2/3$, e está decrescendo ao passar pela primeira dessas raízes e crescendo ao passar pela segunda. Vemos, assim, que ela será negativa quando x estiver no intervalo das raízes e positiva quando x estiver fora desse intervalo.

Lembremos que, embora ainda seja costume ensinar no ensino médio, a análise do sinal da função quadrática fazendo uma tabela de raízes e de valores de x entre as raízes ou fora do seu intervalo, este procedimento não propicia uma visualização geométrica e pode induzir o aluno apenas a decorar regras sem, necessariamente, compreender o porquê dos fatos. Daí a vantagem de fazer o estudo do sinal desta função com base na derivada; cuja variação, de maneira crescente ou decrescente, permite concluir, de imediato, se a concavidade está voltada para cima ou para baixo. O significado geométrico dos fatos ajuda muito em sua compreensão. Por isso mesmo, o estudo do sinal da função quadrática com a ajuda da derivada, é uma aplicação que não deve ser omitida quando se ensina derivada, principalmente no ensino médio.

Observemos ainda, que a direção de uma curva em cada ponto tem interpretação importante em situações do tipo: (i) Se uma curva descreve o espaço percorrido por um móvel em função do tempo, S = f(t), a direção da curva em um ponto t representa a velocidade do móvel naquele instante; (ii) Se a curva descreve a quantidade vendida de um produto em um mês em função de seu preço de venda, Q = f(p), a direção da curva no ponto p representa a tendência à diminuição da quantidade vendida se aumentarmos aquele preço; (iii) Se a curva descreve a diferença de potencial elétrico entre as placas de um capacitor com o tempo, $\Delta V = f(t)$, a direção da curva no instante t mede a corrente elétrica estabelecida entre as placas naquele instante. Essas situações são familiares ao aluno do ensino médio. Portanto, mais uma razão para que se reconheça a pertinência de apresentar, discutir e estudar o conceito de derivada no ensino médio.

Constatada a fecundidade do conceito de derivada para o ensino médio, temos também o conceito de integral.

O conceito de integral surge, por exemplo, quando consideramos determinar a área de uma região do plano xy; quando queremos determinar a distância que um automóvel já percorreu, desde que saiu da fábrica ou desde que seu hodômetro foi "zerado". Esses problemas são apenas algumas das suas aplicações.

No ensino médio, problemas envolvendo áreas são recorrentes. Daí a pertinência em buscar alternativas para resolvê-los. Uma destas alternativas é justamente a utilização do conceito de integral.

Da perspectiva do cálculo não-standard, a área acumulada sob o gráfico de f entre os pontos *a* e *b* não será mais chamada variação do espaço (s(b) – s(a)), será chamada de integral definida de f entre *a* e *b*.

Para calcular a área sob o gráfico de uma função y = f(x) desde o ponto de abcissa *a* até o ponto de abcissa *b*, divide-se este intervalo [*a*,*b*] em uma infinidade de segmentos de largura infinitesimal dx, cada um correspondendo a um ponto de divisão x. A área fica dividida em retângulos de largura infinitesimal dx e altura f(x); portanto a área de um desses retângulos (genérico) é $dA = f(x)dx$. A área sob a curva é obtida pela soma infinita das áreas de todos esses retângulos desde *a* até *b*: $A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$.

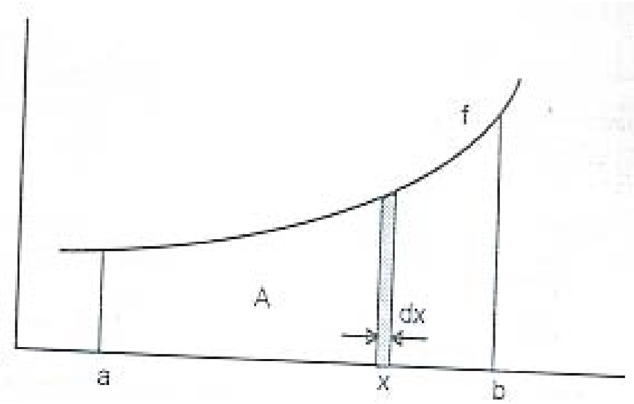


Fig. 4.9

Nesse contexto, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é a soma de uma infinidade de parcelas infinitesimais.

Além da integral definida, temos a integral indefinida. Chamamos $\int f(x)dx$ a integral indefinida de $f(x)$. A integral indefinida significa primitiva (antiderivada), e, primitiva significa uma função cuja derivada é a função dada.

Para ilustrar, $F(x) = x^2$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$ porque

$$F'(x) = \frac{dx^2}{dx} = 2x = f(x)$$

Há muitas outras antiderivadas de 2x, tais como $x^2 + 3$; $x^2 - 1/3$; $x^2 + \sqrt{2}$. De modo geral, se C é uma constante arbitrária, então $x^2 + C$ é uma antiderivada de 2x, porque

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3) = 2x + 0 = 2x$$

Assim, há uma família de antiderivada de 2x da forma $F(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante arbitrária. Na figura seguinte, podemos observar o esboço de vários membros desta família. Na realidade, a integral indefinida $\int f(x)dx$ representa uma família de antiderivadas, e não uma função específica.

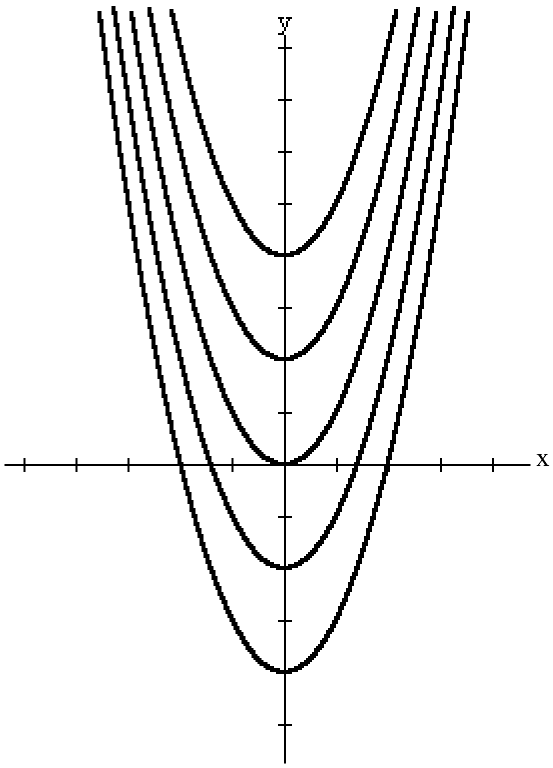


Fig. 4.10

É comum no ensino médio o estudo das funções seno e cosseno e conseqüentemente, calcular áreas delimitadas por suas curvas. Vejamos como o conceito de integral facilita a determinação de áreas delimitadas por essas curvas.

Calcular a área sob um "arco" da curva seno.

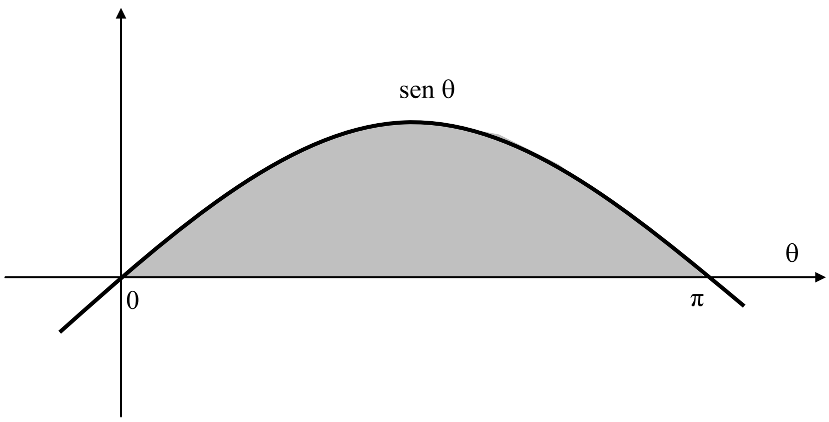


Fig. 4.11

Solução. Como o arco do gráfico de seno θ vai de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, a área sob este arco é $\int_0^{\pi}$ sen $\theta\, d\theta$.

$\int \text{sen}\ \theta\ d\theta = -\cos\theta + C$, $\left(\text{pois } \frac{d(-\cos\theta)}{dx} = \text{sen}\ \theta\right)$; logo,

$$\int_0^{\pi} \text{sen}\ \theta\ d\theta = [-\cos\theta + C]_0^{\pi} = (-\cos\pi + C) - (-\cos 0 + C)$$
$$= -(-1) + C - (-1 + C)$$
$$= 2\ .$$

Introduzimos nesse exemplo uma regra básica do conceito de integral, embora não tenhamos apresentado até aqui estas regras. Porém, sem exageros, é pertinente apresentar algumas dessas regras no ensino médio – elas facilitam os cálculos. Vejamos algumas referentes às funções circulares: $\int \text{sen}\ x\ dx = -\cos x + C$; $\int \cos x\ dx = \text{sen}\ x + C$; $\int \sec^2 x\ dx = \text{tg}\ x + C$. Uma outra regra poderosa para encontrarmos a integral de x^2 ou x^3 ou x^n é $\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, onde r é racional, $r \neq -1$, e $x > 0$ em I.

Nesse exemplo, observe que a constante C em $F(\theta) + C$ desaparece quando a integral definida é calculada: $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

Não há constante de integração para integrais definidas.

Por esta razão, não é necessário incluir a constante de integração ao calcularmos integrais definidas; podemos escrever simplesmente

$$\int_0^{\pi} \text{sen}\ \theta\ d\theta = [-\cos\theta + C]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

~~Não p~~odemos, entretanto, deixar de enfatizar como o conceito de integral contribui tanto para a compreensão quanto para a solução (resposta) de situações familiares ao ensino médio. Situações, como o exemplo acima, podem levar o aluno a perceber o valor de tratar os conceitos matemáticos com mais eficiência e abrangência.

Uma outra situação familiar ao aluno do ensino médio é determinar a área delimitada por duas funções contínuas.

Se f e g são duas funções contínuas e $f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então a área da região entre f(x) e g(x) de *a* para *b* é definida por $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$.

Encontrar a área da região delimitada pelos gráficos de $y = x + 2$ e $y = x^2$.

Parte do problema é encontrar os limites de integração. Observemos então o traçado das funções.

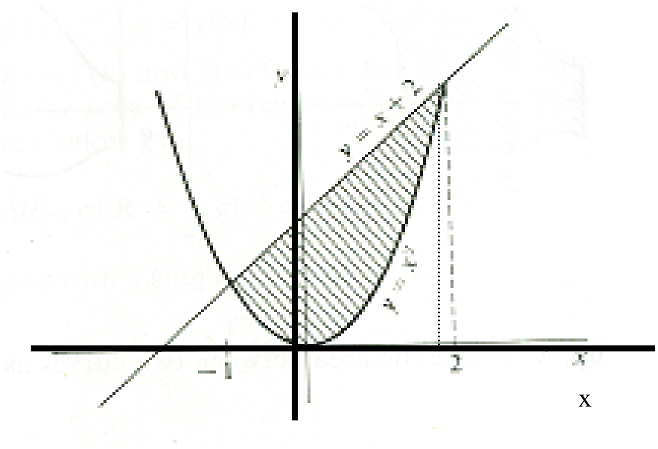


Fig. 4.12

As funções se interceptam em dois pontos, donde podemos encontrar a solução da equação $x + 2 = x^2$ para x.

$x^2 - (x + 2) = 0$; $(x + 1)(x - 2) = 0$; $x = -1$ e $x = 2$.

Então a área pode ser calculada:

$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = 1/2\, x^2 + 2x - 1/3\, x^3 \,]_{-1}^{2} = 9/2$ u.a.

Heisler (1986), apresenta um exemplo sobre cálculo de área que consideramos importante por apresentar diferentes formas de resolução, mas todos levam à mesma solução. Entendemos que exemplos como este possa ser tratado no ensino médio, com o objetivo de mostrar aos alunos que o conhecimento matemático pode apresentar diferentes caminhos para a solução de um determinado problema. Isto, com certeza, será algo a contribuir para uma mudança de postura, visto que, nossos alunos do ensino médio, ainda estão acostumados a aprenderem “somente” uma determinada forma de resolução. Na realidade, a tradição de aprender copiando, repetindo, reproduzindo é muito antiga. Tal concepção de aprendizagem está calcada na crença de que a repetição e a reprodução são essenciais para incorporar aquilo que deve ser aprendido. Isso, na verdade, tornou-se uma limitação à aprendizagem do aluno. Desse modo, abordar problemas que possam ser resolvidos por diferentes maneiras é bastante conveniente – é uma oportunidade para o aluno ampliar seu aprendizado, como também, para desenvolver desde o ensino médio, um certo senso crítico. O aluno tomará decisões ao escolher qual caminho utilizar para encontrar a solução do problema.

Vamos ao exemplo.

Encontrar a área da região delimitada pelas retas $y = -1$; $y = x - 2$ e pela curva $y = x^3$. A região é mostrada na figura seguinte:

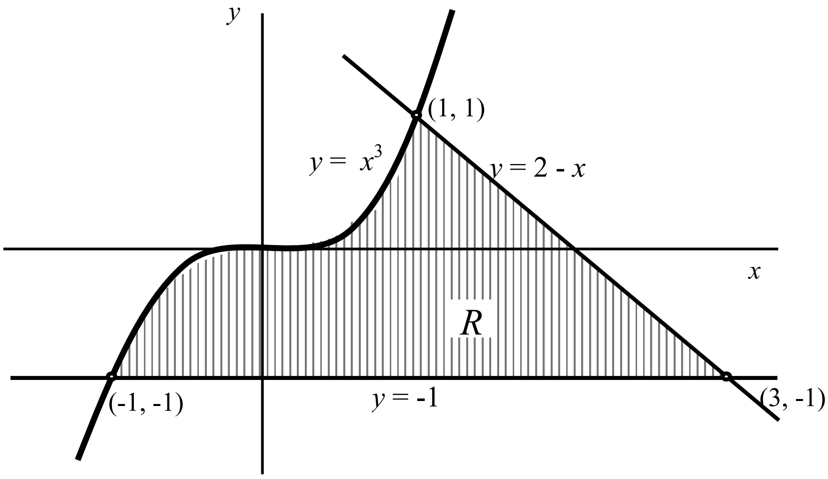


Fig. 4.13

Este problema pode ser resolvido por três caminhos distintos. Cada solução apresenta uma habilidade diferente que é útil no cálculo da área do problema. Os três “cantos” da região são:

(-1, -1), onde $y = x^3$ e o cruzamento acontece em y = -1.

(3, -1), onde y = 2 – x e o cruzamento acontece em y = -1.

(1,1), onde $y = x^3$ e y = 2 – x se cruzam.

Note que $y = x^3$ e y = 2 – x só pode se cruzar em apenas um único ponto, porque $y = x^3$ é sempre crescente e y = 2 – x é sempre decrescente.

Primeira solução: Partindo a região interna em duas partes (Fig. 4.14). R_1 de x = -1 para x = 1, e R_2 de x = 1 para x = 3. Então, área de R = área de R_1 + área de R_2.

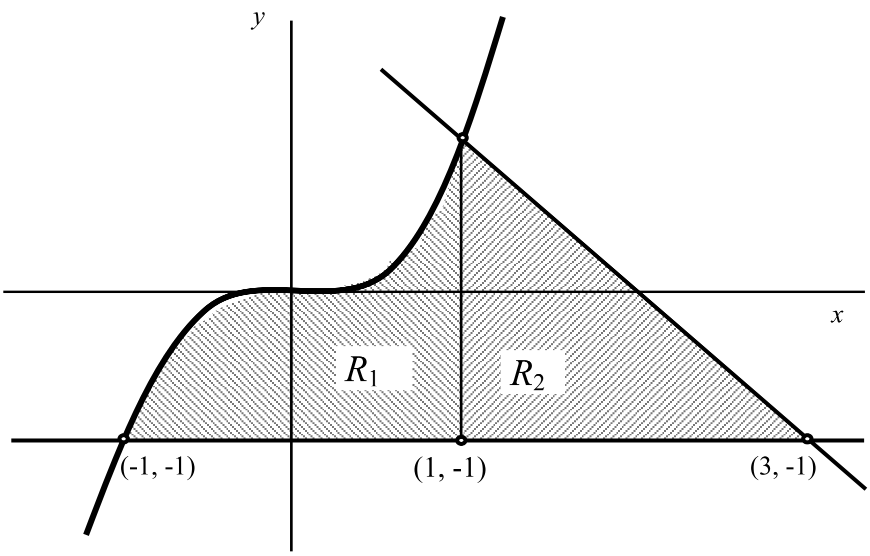


Fig. 4.14
Primeira Solução

Área de $R_1 = \int_{-1}^{2} x^3 - (-1)dx = 1/4\ x^4 + x \Big]_{-1}^{1} = 2$

Área de $R_2 = \int_{1}^{3} (2 - x) - (-1)\, dx = 3x - 1/2x^2 \Big]_{-1}^{1} = 2$

Área de R = 2 + 2 = 4

Segunda solução: Observemos a forma triangular da região S (Fig. 4.15) dividida ao meio e limitada por y = -1 e y = 2 – x de –1 para 3.

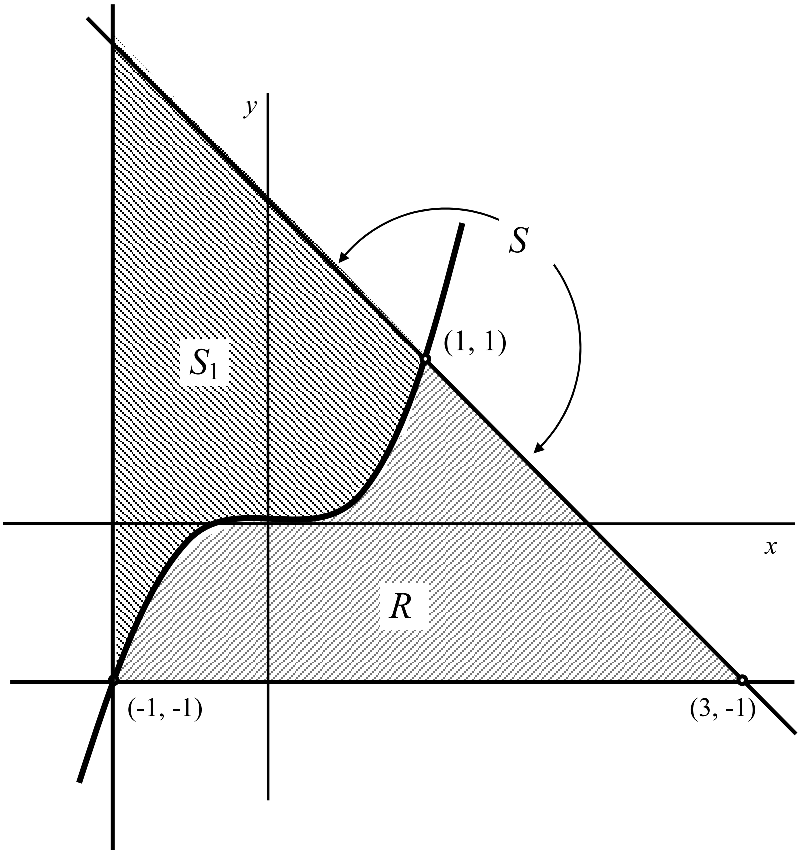


Fig. 4.15

Segunda Solução

Então, área de R = área de S – área de S_1.

Área de $S = \int_{-1}^{3} (2 - x) - (-1)\, dx = 3x - 1/2\ x^2 \Big]_{-1}^{3} = 8$

Área de $S_1 = \int_{-1}^{1} (2 - x) - x^3dx = 2x - 1/4\ x^4 \Big]_{-1}^{1} = 4.$

Área de R = 8 – 4 = 4.

Terceira solução: Usar y como variável independente e x como variável dependente. E, reescrever as funções limites com x em função de y.

y = 2 – x, torna-se x = 2 – y

$y = x^3$, torna-se $x = y^{1/3}$.

Os limites de integração são y = -1 e y =1 (Fig. 4.16).

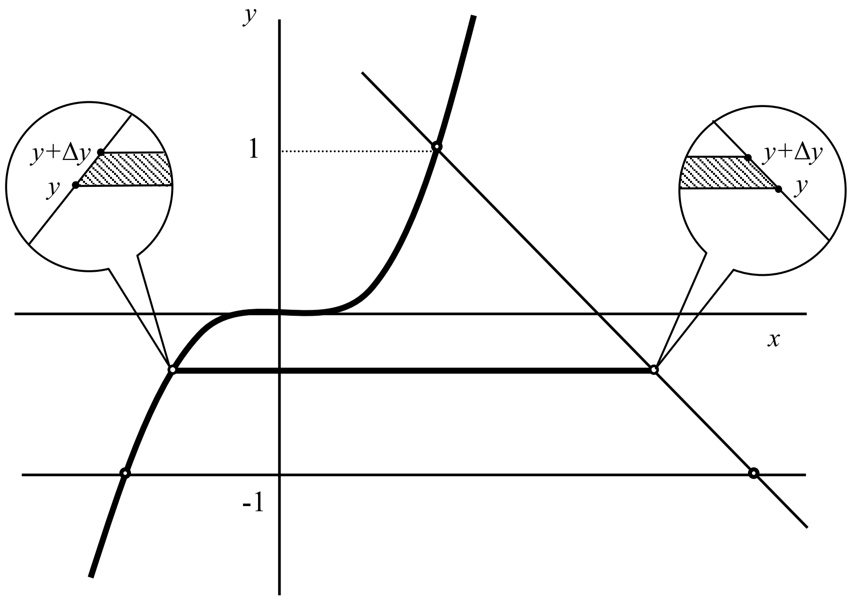


Fig. 4.16

Terceira Solução

Então,

$$A = \int_{-1}^{1} (2 - y) - y^{1/3}\, dy = 2y - 1/2\, y^2 - 3/4 y^{4/3} \Big]_{-1}^{1} = 4$$

Observa-se, que as três estratégias apresentadas encontram a mesma resposta.

Questões como essa do exemplo acima, desenvolve a percepção, a atenção, a memória e a imaginação do aluno, porque ele vai aprendendo a observar diversos aspectos de uma mesma questão e a vê-la de diferentes ângulos. Provavelmente, ao reformular uma questão – reescrever, trocar informações, refletir, registrar, explicar para um colega; maior será a possibilidade do aluno enriquecer sua imaginação com dados novos e acrescentar outros dados a coisas já conhecidas, como também desenvolver sua memória, pois o registro possibilita que as informações sejam relacionadas entre si e articuladas com o conhecimento anterior do aluno. Portanto, ao incentivar essas atividades no ensino médio, o professor de Matemática, certamente, estará contribuindo com o desenvolvimento do papel formativo da Matemática que tem sido prejudicado pela ênfase dada à solução de exercícios[5], ainda hoje, nas aulas de Matemática.

Nos dias de hoje, a aprendizagem escolar não pode ser concebida "apenas" como um

(5) Estes exercícios são resolvidos de forma automática; não é preciso tomar decisões sobre eles, na maioria das vezes, basta reproduzí-los de acordo com o exemplo dado pelo professor.

processo de memorização de conceitos, principalmente com os avanços da ciência no que se refere à *cognição humana*[6] . Para que a aprendizagem escolar seja realmente duradoura e significativa é preciso ir além da repetição, reprodução; é preciso estimular o pensamento dos alunos através de atitudes criativas e dinâmicas, de modo que eles não se satisfaçam, nem de longe, com a memorização como "única" forma de aprendizagem.

Realmente, com os desafios do nosso mundo, as exigências tecnológicas, a velocidade das transformações, impõem-se sobre a aprendizagem do aluno outras exigências não-memorísticas.

É evidente que a memorização dos conteúdos escolares têm sido insuficientes para uma aprendizagem duradoura, visto que há uma demanda por diferentes e contínuas aprendizagens. No entanto, como superar essa concepção memorística depois de tão acostumados a ela? Sabemos que não será fácil transformá-la, porém, é urgente fazê-lo. Para dar conta de tais *exigências não-memorísticas*, é necessário que ocorram mudanças significativas no espaço da sala de aula de Matemática no ensino médio. Ainda são poucos os momentos que favorecem o desenvolvimento de um ensino contextualizado e significativo. Contudo, não é possível escapar dos desafios impostos por uma sociedade que se modifica tão velozmente.

Neste contexto de mudanças cada vez mais velozes, constata-se o quanto é urgente e pertinente desenvolver junto ao aluno do ensino médio, estratégias que possam reverter o quadro de "tão pouca aprendizagem" que vemos imperar há tanto tempo. Podemos dizer então, que faz parte do ensino de Matemática contribuir para instrumentalizar e estruturar o pensamento dos alunos do ensino médio, capacitando-os a tirar conclusões, estabelecer argumentações, analisar e avaliar, tomar decisões, generalizar, abstrair e tantas outras ações que deles (os alunos) se espera ao final desta etapa da educação básica. Na verdade, saber usar o conhecimento matemático em diferentes contextos dará maior garantia de sucesso aos alunos do ensino médio.

Também, é preciso assinalar que muitas dessas estratégias são mais viáveis quando aplicadas a conceitos fecundos como os do cálculo não-standard. Com esses conceitos, pode-se fortalecer o potencial formativo da Matemática exibindo aplicações e explorando

(6) A capacidade de aprender é inata e tem-se manisfestado desde os tempos pré-históricos. Mesmo antes de registrar seus fatos e feitos através da escrita, o homem encontrava meios de atender à sua necessidade de aprender. Podemos dizer que há poucos registros a respeito do que se pensava sobre aprendizagem na Pré-História, mas é possível constatar que o homem já começava a buscar formas de registrar suas contagens, seus atos e, talvez, seus pensamentos. Com efeito, datam de 30 mil anos os primeiros registros de quantidades (IFRAH, 1989) e as primeiras pinturas rupestres, cujos objetivos poderiam ser mnemônicos ou estéticos.

raciocínios envolvidos na resolução de problemas. Sem dúvida, é possível olhar a Matemática sob diversos ângulos.

Um desses ângulos é o amplo leque de conteúdos que podemos tratar no ensino médio. E, com os alunos deste nível de ensino cada vez mais imersos em uma multiplicidade de dados e informações, conteúdos cujo potencial de articulação com outras áreas seja evidente são os exigidos - adequados. Então, partindo do pressuposto de que podemos fazer escolhas quanto ao conteúdo a ser ensinado no ensino médio e que segundo os PCNEMs

> *O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no qual diz respeito às suas aplicações dentro e fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.*(BRASIL:PCNEM, 1999, p. 255)

escolhemos tratar dos conceitos do cálculo não-standard. Esta escolha nos levou a identificar contribuições significativas à aprendizagem matemática no ensino médio (como já enfatizamos).

CAPÍTULO V
REFLEXÃO ACERCA DO ENSINO DOS CONCEITOS DO CÁLCULO NÃO-STANDARD NO ENSINO MÉDIO: DA INTUIÇÃO À POSSIBILIDADE

Neste trabalho, identificamos algumas contribuições do cálculo não-standard para o ensino médio, as quais podem *modificar* práticas vigentes nas aulas de Matemática, por estabelecer articulações entre aspectos do conhecimento matemático, *normalmente* não articulados. Aspectos intuitivos e lógicos são, em certa medida, igualmente importantes no estudo dos conceitos matemáticos. Esses aspectos estão no cerne dos conceitos do cálculo não-standard que reforça ainda mais sua pertinência no ensino médio.

Além desses aspectos, os conceitos do cálculo não-standard são ricos em relações epistemológicas, filosóficas e históricas. Estas relações têm um grande potencial pedagógico que se abordadas de forma contextualizada, podem contribuir de forma efetiva para a aprendizagem matemática no ensino médio.

Considerar os aspectos e as relações desses conceitos é uma oportunidade para ampliar o conhecimento do aluno, auxiliando-o a perceber a necessidade de não limitar seu olhar sobre os conceitos matemáticos, ou seja, priorizar apenas um aspecto para estudar, compreender (como tem sido costume no ensino médio). Perceber essa necessidade é uma das possibilidades a ser buscada com o intuito de tornar a aprendizagem matemática mais eficiente e de qualidade.

Aliás, quanto à aprendizagem matemática, as escolas brasileiras têm ainda um grande desafio a enfrentar. Em dezembro de 2004, a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), divulgou os resultados do Pisa (2003) (sigla em inglês para Programa Internacional de Avaliação de Alunos) realizado em 40 países com alunos de 15 anos matriculados nas redes de ensino pública e privada. Os resultados em relação à Matemática aqui no Brasil revelaram um quadro preocupante – as questões desta prova abordavam situações do cotidiano e, mesmo assim, nossos alunos ficaram em último lugar. Realmente, embora tenha aumentado consideravelmente a ênfase dada aos aspectos utilitarista da Matemática em nossas escolas, na última década; resultados como esse do Pisa deixa bem claro que a forma como nossas escolas têm tratado o ensino de Matemática na Educação Básica não é a mais adequada. Parece-me que não se trata de discutir na escola apenas o que faz parte do entorno físico e social do aluno, mas o que lhe é familiar ou o que suscita sua curiosidade. Entretanto, antes de desconsiderar "tudo que aí está" sobre o ensino de Matemática, é preciso adotar uma visão equilibrada que perceba os "equívocos" e os "acertos" que nos possibilitaram chegar ao ponto em que estamos. Ultimamente, em Olimpíadas Internacionais de Matemática temos conquistado boas classificações, com a participação dos alunos de 15 a 17 anos. Seguramente, não estamos pior do que antes, e o que é preciso agora? Chegar à sala de aula e olhar com toda atenção a aprendizagem dos alunos.

Porém, não é recente a problemática do ensino de Matemática. No prefácio à primeira edição do famoso livro *O Que é Matemática? Uma Abordagem Elementar de*

Métodos e Conceitos, escrito por Richard Courant e Herbert Robbins entre 1940-1941, Courant já revelava preocupações sobre o ensino de Matemática, que pela sua generalidade, são ainda atuais.

> *O ensino de Matemática tem degenerado com freqüência num vazio treino de resolução de problemas, que embora possa desenvolver uma habilidade formal, não conduz a uma compreensão efetiva, nem a uma maior independência intelectual. A investigação matemática revela uma tendência no sentido da superespecialização e da ênfase excessiva na abstração. Aplicações e conexões com outros campos do saber têm sido negligenciadas. Contudo, estas condições não justificam, na pior das hipóteses, uma política de omissão. Pelo contrário, a reação oposta pode e deve partir daqueles que se sentem conscientes do valor da disciplina intelectual. Professores, estudantes, e o público culto exigem uma reforma construtiva, e não uma resignação seguindo a linha de menor resistência. A meta é a compreensão genuína da Matemática como um todo orgânico e como base para o pensar e o agir científicos.* (COURANT; ROBBINS, 2000).

Por isso, não tenho a intenção de apresentar aqui *receitas* sobre o ensino de Matemática no ensino médio, que evidentemente é um problema complexo e em aberto e sobre o qual tanta coisa já se escreveu. Mas se, como todo médico prudente, reluto em dar um prognóstico pela complexidade do problema, não posso, contudo, dispensar-me de um pequeno diagnóstico; pois bem, há razões para esperarmos uma transformação próxima no ensino de Matemática.

Em tempos de mudanças, tratar a Matemática como um conjunto de técnicas (ou algoritmos ou procedimentos) com o qual se obtém certos resultados, provavelmente, não seja o caminho mais adequado; isto porque, o aluno pode aprender *facilmente* conceitos matemáticos, desde que sejam apresentados de uma maneira familiar – as pessoas costumam raciocinar melhor sobre objetos e circunstâncias familiares, do dia a dia, do que sobre objetos abstratos em contextos pouco familiares, mesmo que a estrutura lógica da tarefa seja a mesma. Observemos então, a invenção dos gráficos em Matemática. Estes permitem que conceitos *obscuros* mostrem-se aos nossos olhos em formas familiares: “y = ax + b” é uma linha reta, funções diferenciáveis são curvas suaves. Eles também permitem que operações matemáticas sejam realizadas esboçando-se imagens mentais: para acrescentar uma constante, mentalmente desloque a linha para cima; para multiplicar, gire-a; para integrar, considere a região delimitada por ela, preenchendo-a. De qualquer modo, a Matemática é uma área naturalmente propícia ao desenvolvimento e à manutenção de um diálogo com a vida cotidiana e com outras áreas do conhecimento.

Segundo os PCNEMs,

> A *Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver.* (BRASIL: PCNEM, 1999, p.211).

Neste contexto, a aprendizagem escolar pode ser entendida numa perspectiva integradora, na qual ocorrem relações, articulações entre diferentes contextos, inclusive, com os menos familiares. Neste enfoque, o ensino é contextualizado e significativo.

A aprendizagem escolar, assim, como qualquer outra atividade humana, é caso particular do desenvolvimento humano e resulta da interação entre o organismo e o meio. O ser humano é essencialmente *fenótipo* = genótipo mais meio ambiente. É na relação com o meio que o indivíduo desenvolve-se, mas a efetivação do desenvolvimento acontece em nível individual, ficando registrado no corpo, no cérebro. Dada a complexidade do meio como contexto de desenvolvimento, por um lado, e a complexidade do funcionamento do cérebro, por outro, vemo-nos diante do desafio de formular estratégias, metodologias de estudo que possam contemplar a dialética do desenvolvimento humano.

O ser humano tem determinadas características em seu desenvolvimento físico que incluem tanto o que percebemos externamente - por exemplo: aumento de peso, estatura, mudança das feições, quanto o que é interno e não podemos observar diretamente, como é o caso de cérebro. Este é o órgão onde ficam gravadas as experiências afetivas, as aprendizagens, como é também o órgão que controla várias funções físicas, além de ter como seu componente o sistema límbico, no qual se originam as emoções. Ousamos dizer que o processo de aprendizagem humana está articulado com o funcionamento do sistema emocional. O cérebro recebe e processa as informações colhidas no meio através da percepção (que inclui todos os órgãos dos sentidos), e nele, estão contidas nossa memória e imaginação, todas elas funções psicológicas fundamentais no desenvolvimento da aprendizagem.

A aprendizagem depende da mobilização das funções psicológicas da percepção, da atenção, da memória e da imaginação e se realiza em *tempos* que seguem o desenrolar dos períodos de formação humana. O tempo é uma categoria importante no processo de aprendizagem. Então, diremos que, neste contexto, aprender significa modificar o funcionamento dessas funções através da introdução de novos conceitos e de novas formas de atividade que implicam o exercício das mesmas, e, o tempo necessário para a realização de uma aprendizagem está diretamente relacionado à experiência prévia do indivíduo.

Por isso, segundo Vygotsky, o meio nunca é o mesmo para todos os indivíduos, porque as pessoas experienciam diferentemente cada situação, e nunca é o mesmo para o indivíduo em diferentes períodos de formação. Uma criança que está aprendendo a falar, por exemplo, experiencia seu meio de forma diferente ao ter domínio da oralidade.

No entanto, o meio interfere fortemente no processo de aprendizagem de cada indivíduo. Mas não é só o meio físico imediatamente próximo da pessoa. Entendemos que ele é composto pelas práticas culturais, pelo meio natural, pelos instrumentos e objetos, pelas idéias que circulam, pelas informações nele existentes. Além de tudo o que existe neste ambiente direto, é importante acrescentar o que chega ao meio através dos recursos tecnológicos como a televisão, o cinema, o computador, o celular, entre outros. Na verdade, isso tudo tem modificado a forma de aprender e, neste momento histórico em que vivemos, a memória humana tem encontrado instrumentos auxiliares que provavelmente modificarão o seu papel na aprendizagem, em especial, na aprendizagem escolar que ainda é concebida como um processo de memorização de conceitos, fatos e registros.

Então é evidente que, embora a palavra de ordem seja melhorar o nosso ensino, em todos os níveis, o que observamos é que ainda predominam certas concepções na prática escolar que não se alinham na direção de uma melhoria pela qualidade de ensino. Portanto, superar aspectos do ensino de Matemática ainda vigente como a simples memorização, o excesso de formalismo, a falta de contextualização, entre outros, é um propósito que devemos efetivar urgentemente nas salas de aula do ensino médio.

Quando disse que há razões para esperarmos uma transformação no ensino de Matemática não estava sendo cética, pelo contrário, buscar alternativas para o ensino de Matemática através de práticas de ensino que possam ajudar os nossos pares – professores, a ensinar os alunos de uma mesma turma, atingindo a todos apesar de suas diferenças individuais é uma meta a perseguir na nossa vida profissional.

Uma questão crucial neste contexto de mudanças educacionais é saber qual é a qualidade desejada quando as mudanças são propostas; até porque, ainda vigora a visão de que as escolas de qualidade são ao que enchem as cabeças dos alunos com datas, fórmulas, conceitos justapostos, fragmentados. A qualidade desse ensino resulta do primado e da supervalorização do conteúdo acadêmico em todos os seus níveis. Assim, persiste a idéia de que as escolas consideradas de qualidade são ao que centram a aprendizagem no racional, no aspecto cognitivo do desenvolvimento e que avaliam os alunos quantificando respostas-padrão. Seus métodos e suas práticas preconizam a exposição oral, a repetição, a memorização, os treinamentos, o livresco, a negação do valor do erro. Essas escolas estão sempre preparando o aluno para o futuro: seja a próxima série a ser cursada ou o exame vestibular. Acrescentemos o exame nacional do ensino médio (ENEM).

Ainda sobre essa perspectiva de qualidade, cabe enfatizar o que disse Borges (2002a, p.2): "*Em lugar da tão festejada autonomia intelectual, o ensino [...] vem produzindo autômatos inseguros em seus próprios automatismos*."

Mas o que seria para nós um ensino de qualidade?

De forma sucinta, diríamos que uma escola oferece ensino de qualidade quando consegue tratar as disciplinas como meios de conhecer melhor o mundo e as pessoas que nos rodeiam e ter como parceiros as famílias na elaboração e no comprimento do projeto escolar; quando desenvolve uma aprendizagem ora destacando o intuitivo, o lógico, o sensorial, o racional, ora os aspectos social e afetivo dos alunos e quando em suas práticas e métodos pedagógicos predominam a experimentação, a criação, a descoberta e a conquista do conhecimento.

Quanto ao desafio de ensinar a turma toda, um dos pressupostos básicos é a *crença* de que os alunos sempre sabem alguma coisa, de que todos podem aprender, mas no tempo e do jeito que lhe são próprios. Além disso, é fundamental que o professor cultive uma elevada expectativa em relação à capacidade dos alunos progredir e não desista de buscar meios que possam ajudá-los a vencer os obstáculos escolares. Pode propor atividade que possam ser abordadas por diferentes níveis de compreensão e de desempenho dos alunos. As atividades são exploradas segundo as possibilidades e os interesses dos alunos. Desse modo, o sucesso da aprendizagem está em explorar talentos, atualizar possibilidades, desenvolver predisposições naturais de cada aluno. As dificuldades e limitações são reconhecidas, porém, nesse contexto, não restringe o processo de aprendizagem, como comumente acontece, porque o professor coloca-se como um autêntico estimulador das potencialidades dos alunos.

De fato, o professor pode auxiliar, e muito, para que o aprender se transforme em momentos prazerosos e instigantes, valorizando as pequenas descobertas e as novas dúvidas e, sobretudo, formulando novas questões. Usando o conceito vygotskiano, essas questões devem estar dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal, ou seja, não adianta continuar insistindo em perguntar o que o aluno já sabe, porque isso não desafia, isso aborrece, além de dar a sensação de que não se está sendo desafiado porque é incapaz. Tampouco adianta perguntar o que está muito além de sua capacidade. Se isso acontece com freqüência, ao invés de se sentir desafiado, pode sentir-se frustrado, o que acarreta um sentimento de incapacidade. Formular questões desafiadoras e que, ao mesmo tempo, estão dentro das possibilidades do aluno é uma maneira de *ensinar a aprender* que contempla a aprendizagem do ponto de vista cognitivo e satisfaz a dimensão afetiva do processo de aprendizagem.

Contudo, apesar dos avanços constatados em algumas propostas de aprendizagem, como as contidas nos PCNs e PCNEMs, é possível observar que, mesmo com propostas cuidadosamente estruturadas para serem boas situações de aprendizagem, em que a diversidade de hipóteses, crenças e conhecimentos prévios é reconhecida e respeitada, muitos alunos continuam sem aprender e sem se sentir em condições de aprender (ABRAHÃO; PALIS, 2004; MARTOS, 2004; ONUCHIC, 1999). No ensino médio, em relação ao ensino de Matemática, isso tem acontecido com certa freqüência – basta observar. Porém, não pode servir de motivo para pararmos de buscar alternativas para aprendizagem matemática, pelo contrário, constitui-se num elemento motivador.

O que dissemos até aqui explicita apenas o que não pode ser mais ignorado, de forma alguma, sobre o processo de aprendizagem e estende-se à aprendizagem matemática.

Da perspectiva dos PCNEMs,

> *A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, não deve se preocupação apenas do professor de Matemática, mas dos das quatro disciplinas científico-tecnológicas*[1]*, preferencialmente de forma coordenada, permitindo-se que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado.* (BRASIL:PECENM, 1999, p.211).

Ninguém pode negar a importância do processo de aprendizagem para o ser humano e a pertinência dos conceitos matemáticos. O conhecimento matemático é um poderoso e

(1)Biologia, Física, Matemática e Química.

insubstituível instrumento para a compreensão do mundo no qual vivemos, e influencia na tomada de decisões em nossa vida cotidiana. O desenvolvimento tecnológico ora experimentado faz com que muitas decisões institucionais de natureza econômica, social ou política, e que afetam a vida de muitas pessoas, estejam apoiadas em conceitos oriundos da Matemática. Portanto, nada mais natural que apresentar, estudar, discutir e relacionar alguns conceitos matemáticos no ensino médio – no nosso caso, os conceitos do cálculo não-standard.

Os infinitésimos - base do cálculo não-standard, é um excelente exemplo para que o aluno perceba como o conhecimento matemático suscita idéias ao longo dos tempos; que não é algo que já nasce pronto, acabado. Na Grécia Antiga, os estudiosos já se deparavam com os infinitésimos. Seria realmente possível falar de quantidades infinitamente pequenas? Seria realmente possível somá-las de modo a obter um resultado finito? Quais seriam exatamente essas coisas?

Os matemáticos interessados no assunto levaram muito tempo – séculos, para desenvolver métodos viáveis referente aos infinitésimos. Foi preciso preparar o terreno. Os métodos não ficaram disponíveis imediatamente. O conceito do infinitamente pequeno era aplicável, mas ao mesmo tempo estranho/obscuro – faltava rigor matemático na sua formalização. Os estudiosos tiveram de aprender a ficar à vontade com os infinitésimos.

Como já dissemos, um dos primeiros a fazer uso dos infinitésimos, em tempos mais modernos após os gregos, foi Cavalieri ao conceber a idéia de que os corpos sólidos são feitos de números infinitos de planos. Nesse contexto, um cilindro pode ser pensado como feito de um número infinito de discos circulares infinitamente finos, já o cubo, de um número infinito de quadrados infinitamente finos. Cavalieri mostrou que era possível calcular os volumes de corpos sólidos mediante a suposição de que eram feitos de números imensos de planos infinitamente finos que chamou de "indivisíveis". No entanto, nunca disse exatamente o que era um indivisível e seus contemporâneos criticavam abertamente seu métodos.

Na verdade, Cavalieri não conseguiu explicar como um corpo de tamanho finito poderia ser formado por um número infinito de elementos e por vezes definiu sua inovação como um mero procedimento pragmático que permitia evitar o uso de métodos matemáticos mais complicados. Mas, embora não pudesse dar nenhuma explicação clara do que era que estava fazendo, deu um dos primeiros passos em direção ao conceito de infinitésimo. E seus métodos, apesar das críticas, atraíram o interesse de outros matemáticos e até hoje usamos *idéias* de Cavalieri, em especial, no ensino médio.

Um problema familiar ao ensino médio e que tem em seus fundamentos os infinitésimos é o problema dos *movimentos acelerados*. Um corpo em queda está acelerado porque não se move com uma velocidade constante. Em qualquer instante de tempo, move-se um pouco mais depressa do que o fizera num instante ligeiramente anterior. Esse tipo de movimento é mais difícil de analisar do que aquele em a velocidade permanece sempre a mesma.

É relativamente fácil compreender e calcular velocidades médias – velocidades médias podem ser especificadas para períodos de tempo cada vez menores. Se um objeto cai 5 metros em um segundo, sua velocidade média é de 5 m/s. No entanto, o objeto terá também uma velocidade instantânea em qualquer momento dado. Após um décimo de segundo, ele estará se movendo com alguma velocidade específica. Após um milésimo de segundo, estará se movendo com outra velocidade. Se continuássemos indefinidamente com este raciocínio (possível mentalmente), ainda assim, teríamos a velocidade média. E, nenhuma das velocidades médias assim computadas seria precisamente igual à velocidade instantânea, mas se aproximariam cada vez mais *dela* à medida que o intervalo de tempo fosse diminuído. Portanto, se quisermos saber o que está acontecendo em algum instante particular, devemos ir além do método que nos possibilita o cálculo da velocidade média, visto que, se supormos que um corpo cairá zero metro em zero segundo, isso não nos dá velocidade nenhuma. Afinal, o número 0/0 não tem qualquer sentido. Nesse contexto, é como se não ocorresse o movimento. É uma situação que lembra o paradoxo de Zenão "a flecha", em que Zenão afirmava que o movimento era impossível porque em qualquer instante dado uma flecha estava imóvel.

Mas cadê os infinitésimos? Como resolver o problema da velocidade instantânea?

Isaac Newton quando resolveu o problema da *velocidade instantânea* definiu-a como a razão de duas quantidades tendentes a zero, dois infinitésimos. Sua idéia foi considerada nova, porque, embora muitos matemáticos tivessem feito cálculos em que os infinitésimos eram "somados" para produzir uma soma finita, ainda não tinha sido pensado o que aconteceria se um infinitésimo fosse dividido por outro. Newton então generalizou seu método observando que era possível falar da razão de quaisquer duas grandezas infinitesimais. Mas mesmo assim, o que fez foi encontrar meios para o uso de infinitésimos na efetivação dos cálculos. Contudo os infinitésimos ainda continuaram carecendo de uma formalização mais adequada, embora tivesse sido provada sua utilidade.

Os cálculos generalizados por Newton representaram um avanço notável porque garantiu aos cientistas um método para lidar com o comportamento de corpos que não se movem com velocidades constantes, como pesos em queda (queda livre) e planetas orbitando; para descrever o comportamento de *qualquer* quantidade que varie com o tempo – Newton o utilizou para determinar de que modo os corpos quentes esfriavam em contato com o ambiente. Um objeto quente não perde calor para seu ambiente numa taxa constante; para descrever quantidades que variem no espaço – um campo magnético é mais forte em pontos próximos a um dos pólos de um magneto e mais fraco a distâncias maiores.

Newton fez várias tentativas diferentes para definir os infinitésimos, mais nenhuma foi muito precisa. Referia-se a eles como "indivisíveis últimos", "quantidades divisíveis evanescentes", "incrementos nascentes". Leibniz também não ficava atrás. Falava de quantidades "tendentes a zero", "infinitamente pequeno", e "números fictícios". Essas tentativas demonstram que o cálculo se apoiava em fundamentos precários. Basta relembrar D'Alembert. Esse matemático assegurava a seus alunos que realmente valia a pena estudar aqueles métodos duvidosos e tinha fé no futuro do cálculo. Porém, enquanto a confusão sobre os fundamentos reinava, a idéia de definir a velocidade instantânea como a razão de dois infinitésimos, uma distância infinitamente pequena dividida por um tempo infinitamente pequeno, se tornou inestimável, preciosa e o cálculo seguiu obtendo sucesso. Numerosos problemas em Física e Matemática foram resolvidos a contento. Era evidente que o cálculo dava resultados corretos, independente dos *fundamentos lógicos* dos infinitésimos.

Os *fundamentos lógicos*, no caso dos infinitésimos, não se adequavam ao encadeamento lógico defendido por muitos matemáticos da época. Tal encadeamento, estando presente no modo como as idéias matemáticas se articulam, lhe confere consistência, ou seja, ausência de contradição. De fato, havia inúmeras ambigüidades (como já dissemos) nos fundamentos dos infinitésimos. No entanto, isto não se constituiu num problema nas suas aplicações. Os físicos nunca pararam de usar os infinitésimos – recorriam aos seus aspectos intuitivos para seguir em frente. Na realidade, os físicos tendem a não se preocupar demais com o rigor matemático, contanto que os métodos usados forneçam os resultados corretos. Isso é uma mostra de que a intuição é um caminho possível a ser utilizado no desenvolvimento das idéias matemáticas e, conseqüentemente se constitui numa possibilidade a ser explorada no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Assim sendo, podemos dizer que existe aí um campo fértil a ser explorado e, ao que parece, só depende de uma postura contextualizada por parte de professores e alunos do ensino médio, em relação ao ensino de Matemática.

Então, no ensino médio, o mais prudente e aconselhável não é a adoção exclusiva e radical de um único aspecto dos conceitos matemáticos, mas as conexões que podem ser estabelecidas entre o intuitivo e o lógico-formal. Através destas conexões, é possível despertar no aluno o hábito de fazer uso do seu raciocínio intuitivo, lógico, argumentativo, como também cultivar o gosto pela resolução de "problemas". Os problemas a que nos referimos vão além dos que exigem o simples exercício de repetição e dos automatismos. Por isso, é preciso buscar "problemas" que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais de resolução. Deste modo, quando o aluno está a pesquisar a solução de um problema, diversos procedimentos de raciocínio ocorrem sem o controle do professor e a riqueza das idéias provenientes da imaginação do aluno, certamente o conduz ao raciocínio necessário para a solução e aprendizagem do problema.

Além disso, Polya (1995), em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*, apresenta uma visão sobre a resolução de problemas na sala de aula, que torna o papel de questionador do professor de extrema importância. Para o autor, há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao orientar seus alunos para uma indagação ou uma sugestão: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

O modelo proposto por Polya (1995) para a resolução de problemas é fundamentado em quatro passos: compreensão, elaboração do plano, execução do plano e avaliação. Para que a sua implantação seja bem sucedida, deve estar apoiada em todas as fases, num adequado questionamento do professor. Vejamos algumas das muitas perguntas sugeridas pelo autor: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Trata-se de um problema plausível? Conhece algum problema com a mesma incógnita? Utilizou todos os dados? É possível verificar o resultado? É possível chegar ao resultado por um processo diferente? É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema? Essas perguntas têm, em certa medida, o efeito de conduzirem o aluno, ajudando-o, como assinala o autor, de uma forma discreta, mas estruturada.

Depois do que foi dito acima, parece oportuno recomendar que façamos uso do raciocínio contextualizado nas aulas de Matemática, isto porque, ele ajuda a reduzir a complexidade das representações dos problemas. Conseqüentemente, ao estabelecer uma relação entre um problema envolvendo cálculo e uma representação – seja ela formada por imagens mentais diferentes, seja mediante diagramas, gráficos, esquemas, descrições verbais, simulações, o raciocínio contextualizado favorece para o sucesso do processo de resolução do problema. A utilização do contexto permite que se vá *diretamente* às relações fundamentais simplificando ou dispensando, muitas vezes, a recorrência a fórmulas algébricas, por exemplo. É importante também, não abrir espaço para generalizações precipitadas, sem se atentar para a precisão dos conceitos matemáticos. Tais práticas tende a contribuir para a melhoria da aprendizagem matemática do aluno e conseqüentemente, capacita-o para melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Convém examinar alguns momentos da trajetória do conhecimento matemático. Há momentos, em que as relações matemáticas *normalmente* aceitas se manifestam de modo irracional, ou seja, se opõem ao pensamento preestabelecido/aceito, a exemplo das *idéias de Gauss sobre* as *geometrias não euclidianas*[2] e do *infinito de Cantor*[3]. Esses momentos podem ser *ofuscados* ou *não* pela força dos encadeamentos lógicos vigentes, mas mesmo assim, tornam-se significativos do ponto de vista epistemológico, filosófico e histórico, principalmente para o ensino.

É importante mostrar, por exemplo, que apesar de muitos matemáticos terem relegado os infinitésimos, estes foram retomados durante o século XX. Na verdade, muitos matemáticos começaram a suspeitar que poderia ser possível construir uma teoria coerente dos infinitésimos e, em 1934, o matemático alemão Felix Klein sugeriu que isso podia ser feito desde que se abandonasse o axioma de Arquimedes (já citado). Este axioma é básico para se falar dos números reais com rigor.

Relembremos o axioma de Arquimedes: se tomarmos dois números quaisquer a e b e supormos $a < b$, então $n.a \geq b$, para n natural. Em outros termos: se somarmos a a si mesmo um número suficiente de vezes, o resultado será uma soma maior que b. Por exemplo, se a for 1 e b for 25, obteremos um número maior que b se somarmos 1 a si mesmo 26 vezes. Porém deve ficar claro para o aluno que o axioma de Arquimedes não pode ser satisfeito se tratarmos dos infinitésimos (mesmo que adotássemos os infinitésimos como naturais), pois não importa quantas vezes um infinitésimo seja acrescentado a si mesmo, o resultado será sempre um número hiper-real, e, no nosso exemplo, a soma jamais será maior que 25 e nem mesmo maior que 1. Isso pode suscitar boas discussões numa aula de Matemática, e é uma possibilidade para mostrar como a não conservação de um determinado axioma pode contribuir para o desenvolvimento da Matemática.

Ora, mas o que há de extraordinário em abandonar um determinado axioma?

---

(2) É provável que o notável Gauss tenha sido um dos primeiros matemáticos a alcançar conclusões pertinentes sobre as geometrias não-euclidianas, mas como não publicou suas idéias, a honra da descoberta é dividida por Lobachevsky e Bolyai. Este último era filho de um professor de Matemática - amigo pessoal de Gauss. Talvez tenha faltado a Gauss coragem para ir de encontro ao pensamento euclidiano.

(3) Cantor postulou a existência do infinito acabado, atualizado, como uma totalidade dada, ou seja, o infinito atualizado ou acabado é a tomada de consciência de um conjunto infinito. Exemplificando: a totalidade dos números naturais, a totalidade dos números reais, etc. A existência do infinito acabado sofre contestações desde a antiguidade. Aristóteles, por exemplo, admitia apenas a existência do infinito potencial. Esse último está ligado à possibilidade de repetição ilimitada, mentalmente, de uma mesma operação. Exemplificando: dado um número natural por maior que seja, temos a possibilidade de ultrapassá-lo através da operação de "sempre juntar-lhe mais um".

Para não-matemáticos, acreditamos, não exista problema algum, mas para os matemáticos que sabem da importância dos axiomas clássicos, não é tão simples. No tempo de Newton e Leibniz, por exemplo, eles não pensaram ou não tiveram coragem de mexer nos axiomas clássicos. Contudo, o pensamento matemático foi mudando no decorrer dos séculos posteriores, e isto, permitiu à Matemática grandes avanços. Os axiomas clássicos passaram a ser vistos de formas diferentes. Atualmente, desvencilhar-se de um axioma clássico é um processo legítimo, contanto que disso resulte um sistema matemático coerente.

É graças a esta maneira nova de considerar os axiomas clássicos que Robinson, com grande esforço desenvolveu a nova teoria dos infinitésimos. E, como conseqüência, os conceitos do cálculo não-standard formam um sistema matematicamente *coerente* e *consistente*. De qualquer modo, a teoria não-standard mostrou-se inestimável pelas articulações entre o intuitivo e o lógico, e isto reforça a tese de que, na base do conhecimento matemático, está o pensamento intuitivo.

Importantes para o processo de aprendizagem do conhecimento matemático são as diferenças epistemológicas. Através delas é possível que os alunos percebam que coisas que parecem ser contraditórias, na verdade, não o são. Exemplificando: sistemas arquimedianos como os reais e sistemas não-arquimedianos como os hiper-reais. Por isso, tratá-las de forma adequada no ensino médio, sem exageros simbólicos, é um desafio que se impõe à nós professores de Matemática.

Decididamente, os desafios fazem parte da vida cotidiana nas salas de aula, da mesma maneira que fazem parte dos nossos problemas como professores. A todo momento, o professor tem que tomar decisões: como responder a uma pergunta ou a uma conduta, como estimular algum aluno pouco envolvido, como administrar as diversidades do grupo, etc. A prática pedagógica é realmente complexa, visto que, a responsabilidade de decidir e seguir uma ou outra direção depende de suas próprias convicções (enquanto professor) e de sua própria intuição. Por isso, muitos professores exigem que lhes sejam dadas receitas, que lhes seja esclarecido sobre o que fazer em cada momento de sua prática pedagógica. Porém, isso não é possível, porque o ensino acontece necessariamente em contexto “incerto”, “mutável”, onde cada novo passo depende de um conjunto de variáveis (muitas delas próprias de uma determinada situação) e, que o professor deve ser capaz de relacioná-las e explicitá-las junto aos alunos.

O cálculo desenvolvido por Robinson não é exatamente igual ao cálculo tradicional com ênfase na teoria dos limites, mas há mais semelhanças que diferenças. Alguns teoremas clássicos têm provas que parecem um pouco diferentes, mas quando os cálculos são efetuados, obtém-se os mesmos resultados. Com isso, torna-se uma excelente alternativa ao cálculo tradicional por possibilitar “novas” formas para descobrir os valores máximo e mínimo que uma função poderia assumir (como, por exemplo, a maior e menor distância de um planeta ao seu sol), o centro de gravidade dos corpos que se atraem; para prever as órbitas dos satélites terrestres; para projetar sistemas de radares; para testar teorias relativas às correntes oceânicas e à dinâmica da atmosfera, mas principalmente, por ter no seu desenvolvimento idéias intuitivas e lógicas. Essas idéias que parecem ser contraditórias nos fundamentos do cálculo, com Robinson, desenvolveu-se a sua interação.

De fato, a teoria não-standard é uma mostra de como estabelecer relações entre aspectos que, na maioria das vezes são tratados isoladamente, pode dar bons resultados. Por isso, ao observar a trajetória do desenvolvimento do cálculo não-standard podemos tirar algumas lições importantes para o ensino de Matemática. Uma delas é a necessidade de observar o que já havia sido feito, ou seja, resgatar idéias e modificá-las se necessário. Isso tem importância pedagógica, ainda mais com a ênfase que é dada atualmente ao que é novo, recente, em detrimento do que já existe. Não se trata de saudosismo, mas de reconhecer o valor dessas idéias para uma compreensão mais adequada dos conceitos matemáticos. É como admitiu Newton: *se eu pude ver mais longe é porque estava apoiado em ombros de gigantes*. Outra, é uma certa ousadia e coragem para dar um passo à frente. Robinson ousou as articular o intuitivo e o lógico e corajosamente construiu algo novo e interessante. No ensino, é preciso que isso ocorra. Articular o intuitivo e o lógico pode ser o *diferencial* para auxiliar o aluno do ensino médio a melhorar sua aprendizagem.

Outro aspecto importante no desenvolvimento dos infinitésimos foi a persistência de muitos matemáticos frente às críticas que recebiam pela ambigüidade dos seus fundamentos. Na verdade, a persistência flutua entre esperança e desespero, entre satisfação e decepção. É mais fácil prosseguir quando se pensa que a solução que buscamos está próxima, mas é mais difícil perseverar quando não se vê uma saída para a dificuldade que enfrentamos. Entretanto, no ensino, é necessário dosar a persistência com as expectativas. Não dar para se debruçar sobre um problema se o mesmo não representa interesse algum para o aluno. Porém, se o aluno não demonstra interesse por não ter consciência da sua importância, cabe ao professor estimular sua curiosidade e incutir-lhe um certo desejo de resolver o problema, como também, conceder-lhe algum "tempo", para que ele (o aluno) tome a decisão de dedicar-se à tarefa de resolvê-lo. Nesse contexto, espera-se que o aluno aprenda

> A *perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela idéia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital*. (POLYA, 1995, p. 114).

Obviamente que existem diferentes possibilidades para abordar os conceitos do cálculo não-standard no ensino médio, mas não é exagero considerar a *apresentação clara das idéias principais* como eixo principal de quaisquer estratégias ou metodologias de ensino. Aliás, as grandes idéias costumam ser claras e, os desafios começam quando temos que aprendê-las, ensiná-las e colocá-las em prática. Daí ser de grande importância *a clareza das idéias principais* em qualquer discussão sobre aprendizagem.

Já falamos sobre "o andar de bicicleta", mas uma coisa é certa: não se aprende a andar de bicicleta com o estudo das leis da mecânica de Newton e sim, tomando várias quedas e aprendendo os significados de seus vários componentes. E se mais tarde, alguém desejar ser um projetista de bicicleta, então, é coerente conhecer as leis da mecânica. Fizemos esta referência à bicicleta, para dizer que no ensino dos conceitos matemáticos cabe substituir os aspectos lógico-formais pela *clareza das idéias* dos aspectos intuitivos, estabelecendo conexões com outros ramos do conhecimento como a Física, a Biologia, a Economia, etc. Desta forma, é possível aproximar o ensino de matemática do modo como a Matemática foi historicamente construída.

Ainda sobre a *clareza das idéias* científicas, vejamos o que disse Albert Einstein (1982, p. 23):

> *Dos doze aos dezesseis anos, familiarizei-me com os elementos de Matemática, incluindo o princípio do cálculo diferencial e cálculo integral. Tive a sorte de encontrar livros que não se preocupavam com o rigor lógico, mas que permitiam a apresentação clara da idéias principais. Era um trabalho verdadeiramente fascinante; certos pontos extremos me impressionava tanto quanto da geometria elementar – a idéia básica da geometria analítica, as séries infinitas, os conceitos de derivadas e integrais. Tive a sorte também de aprender os resultados essenciais e os métodos de todo o campo das ciências naturais, numa excelente obra popular que se limitava quase que exclusivamente aos aspectos qualitativos (Bernstein, Popular Books on Natural Science, em cinco ou seis volumes), e que li com absorvente atenção. Já estudara também um pouco de física teórica quando, com dezessete anos, entrei para a Escola Politécnica de Zurique para estudar matemática e física.*

Nessas palavras de Einstein aparecem indicações importantes para o processo de ensino-aprendizagem: fazer uso de bons livros e estudá-los com atenção e interesse. Tais estratégias precisam ser estimuladas no ensino médio – é mais uma atribuição do professor.

É claro que, selecionar bons livros de Matemática para o ensino médio e, a partir deles fazer interpretações e inferências é, em certa medida, crucial para melhorar a aprendizagem matemática dos alunos. Entretanto, por *experiência*, podemos dizer que não é uma prática muito disseminada – principalmente na escola pública. Aliás, muito comum, é encontrar professores de Matemática que apenas apresentam tópicos sobre um determinado assunto em suas aulas, e não fazem *nenhuma* referência a livros ou autores. De fato, se o aluno do ensino médio não é estimulado a ler diferentes livros, compará-los, escolhê-los, certamente, sua aprendizagem será prejudicada.

É oportuno dizer que o desenvolvimento de metodologias para o ensino de Matemática é um campo ainda em formação, apesar de ser bastante amplo. Segundo Pires (2000, p.161),

> *Nas últimas décadas, os recursos metodológicos para o ensino de Matemática foram colocados no centro das atenções de grande parte das ações de capacitação de professores, como também das pesquisas acadêmicas: o uso de jogos, de materiais de construção e manipulação, a incorporação didática da História da Matemática, dos elementos do cotidiano (especialmente por mio do uso de jornais e revistas), a utilização de vídeos, calculadoras e computadores (mesmo em menor escala) são alguns indicadores dessa preocupação. No entanto, apesar do farto material existente, contendo sugestões metodológicas para o professor, na prática há uma grande dificuldade para incorporá-los à prática da sala de aula.*

Parte dessa dificuldade evidenciada por Pires para articular as metodologias já existentes à prática pedagógica pode ser atribuída aos problemas de formação técnica do professor – é necessário saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar e à rapidez das mudanças – uma delas é o ritmo do crescimento quantitativo que atinge o ensino médio atualmente.

Observemos então, que para desenvolver e aplicar quaisquer estratégias, os professores mantêm um constante ir e vir entre o que sabem e o que não sabem, entre o que tem de fazer e o que podem fazer, entre o que experimentaram anteriormente e a necessidade de introduzir inovações, entre o que haviam previsto realizar e o que as condições de cada momento parecem aconselhar. É nesse contexto que o professor cria e recria sua atuação sistematicamente a cada novo dia, a cada novo conceito, mas precisa de algo mais que o "saber sobre" determinado assunto, e mais do que reproduzir atividades em série, as quais pressupõem uma classe homogênea; ele precisa de conhecimentos que possibilitam uma atuação que considere seus alunos reais – com suas diversidades.

Desse modo, podemos pensar o quanto é fundamental reconhecer a importância do comprometimento pessoal do professor em relação aos seus alunos e à própria tarefa de ensinar.

Numa perspectiva contextualizada, podemos dizer que um professor comprometido com a sua tarefa de ensinar não é um professor "bonzinho", principalmente se "ser bonzinho" for resultado do pensamento tipo: "Ele passa a mão pela cabeça, não é preciso estudar, qualquer coisa que se faça é aceita". Mas o que enfrenta a dinâmica do dia-a-dia da sala de aula prestando apoio objetivo na superação das dificuldades que os alunos apresentam. Uma dessas dificuldades é a falta de atenção e motivação para o estudo. Por isso, é salutar observar (apesar de discutível) que em determinados momentos na sala de aula do ensino médio, uma "dura", se dada na hora certa, pode provocar um efeito estimulador muito maior do que palavras ditas em um tom bem suave por parte do professor.

De qualquer modo, sempre estaremos sujeitos a "deslizes" na dinâmica do dia-a-dia na sala de aula, e isto acontece pelo fato de não estarmos suficientemente preparados para conviver com as diferenças e para assumirmos a responsabilidade de ensinarmos a todos. Contudo, é preciso encarar esta realidade e não desistir de buscar uma forma de atuação mais consistente e eficiente, enquanto professores de Matemática que primam por melhorar a qualidade da aprendizagem matemática no ensino médio.

Deve-se prestar muita atenção à questão do treinamento que passou a ser mal visto no ensino de Matemática. Entretanto, ninguém estranha ao ver uma criança, um jovem praticando, por exemplo, piano, violino, várias horas por dia. Parece-nos que no Oriente não existe esse viés[4]. O treinamento intensivo parece ser bastante oportuno para desenvolver habilidades de cálculo envolvendo as operações fundamentais tanto com inteiros como com racionais, visto que, boa parte dos alunos que ingressam no ensino médio, ainda apresentarem deficiências quanto a essas operações. Diante disso, o importante é entender que memorizar e compreender são tarefas complementares e não antagônicas. Que ambas são extremamente importantes para a aprendizagem do aluno – importante também é levar o aluno a discernir quando precisa usar as duas ou apenas uma (e qual) delas. Por isso, não basta apenas criticar este ou aquele método de ensino, é preciso olhá-lo com prudência e criatividade. Tal atitude, vai exigir da parte dos professores um discernimento metodológico bem superior ao atual que vemos hoje nas salas de aula. Polya (1995) dizia não existir método de ensino considerado indiscutivelmente o melhor.

Certamente! Procuremos então nos dar conta da existência de vários pontos de vista, sob os quais uma mesma questão deve ser tratada.

---

(4) Basta observamos o método Kumon criado no Japão, cuja característica principal é a repetição até que o aluno se sinta seguro nos procedimentos das operações. Esse método vem experimentando um grande sucesso aqui no Brasil.

Em Matemática, muitos professores ainda fogem da diversidade, principalmente no ensino médio, oferecendo, na maioria das vezes, um único padrão para resolver as questões propostas. Dessa atitude, também decorrem, o autoritarismo e o dogmatismo de suas aulas. É claro, se o aluno só se familiariza com um único método de resolução de problemas, por exemplo, defenderá que só a sua maneira de resolver é correta – é dogma. Infelizmente, isso ainda ocorre no ensino de Matemática. Mas, em "tempos de mudanças" tais professores não poderão continuar a ignorar a diversidade das idéias matemáticas.

Portanto, é salutar mostrar para o aluno do ensino médio que o cálculo não-standard é uma alternativa interessante ao cálculo tradicional e que estudar seus conceitos se constitui em uma possibilidade pedagógica para observar ambigüidades dos conceitos, conveniências matemáticas, comparar teorias e métodos e decidir por qual caminho resolver um determinado problema; também para desenvolver, em certa medida, o senso crítico dos alunos e a capacidade de perceber que por diferentes caminhos pode se chegar ao mesmo resultado. Para tanto, o começo é olhar a trajetória de formação dos conceitos matemáticos e, conseqüentemente, das teorias matemáticas.

Além disso, apresentar o caráter amplo e integrador dos conceitos do cálculo não-standard e sua contemporaneidade. Não se trata de fazer uma mera revelação dessa teoria, pois além de idéias extremamente férteis, temos também um conjunto de termos específicos e símbolos correspondentes, sendo que o todo se constitui num mundo novo para os alunos. Daí a importância de não reduzi-la às palavras, símbolos e técnicas operatórias, imaginando que as idéias brotarão por si só; mas, de incutir nos alunos do ensino médio, o gosto pela busca de outros *padrões* que também possam contribuir para sua aprendizagem.

Dada a diversidade da Matemática, os *padrões* surgem do mundo a nossa volta, das relações entre tempo e espaço e do funcionamento da mente humana (DEVLIN, 2004). Devlin (2004, p. 26) também assinala que "*os padrões estudados pelo matemático podem ser reais* *ou imaginários*, *visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, utilitários ou recreativos.*" O cálculo não-standard, por exemplo, nos permite lidar com padrões de movimento e variação.

Por outro lado, embora se observe que a maioria dos alunos do ensino médio apresenta pouca aprendizagem matemática, a qualidade futura de sua aprendizagem pode ser melhorada se as noções do cálculo não-standard puderem ser abordadas com o intuito de proporcionar rupturas no comportamento do aluno frente à sua aprendizagem, ou seja, leva-os a perceber que podem ir além das questões rotineiras, aquelas que exigem apenas a aplicação direta de conceitos ou a utilização de procedimentos automatizados. Mas o fato de grande parte dos alunos do ensino médio conseguirem um melhor desempenho somente em questões rotineiras, revela, de certa forma, as prioridades que foram tratadas em sala de aula, ainda que nem sempre os professores demonstrem ter consciência disso.

Desse modo, a aprendizagem matemática no ensino médio não deve – e não pode, ficar limitada à manipulação (manuseio) de fórmulas, ao saber fazer contas ou ao assinalar a resposta correta de uma questão (em certos vestibulares e concurso e também no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)). Mais do que tudo, ela poderá conduzir à interpretação de enunciados, à criação de significados/sentidos, à construção de instrumentos para a resolução de problemas. Daí, uma das suas metas ser o reconhecimento da importância da *análise*, da *síntese*, da *abstração* e da *generalização* para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Aliás, esses quatro *movimentos mentais* são importantes para o desenvolvimento do conhecimento em geral.

Sabemos que o cálculo é considerado uma das maiores criações da Matemática. Podemos até dizer que antes dessa criação, os matemáticos ficavam bastante restritos às questões estáticas de contar, medir e descrever formas. Contudo, pela sua importância, consideramos ser os conceitos do cálculo não-standard instrumentos que podem favorecer o desenvolvimento desses *movimentos mentais* (já citados), que se empregados de forma constante, pode melhorar sensivelmente a aprendizagem matemática. De qualquer modo, esses conceitos podem se tornar grandes aliados do processo ensino-aprendizagem de Matemática para o ensino médio, ao propiciar a familiarização e interação do intuitivo com o lógico-formal. Na verdade, ao dar menos ênfase ao contexto lógico-formal rigoroso, no qual prevalece operações e técnicas matemáticas, e entrar num contexto onde a intuição é considerada fundamento para enfrentar problemas, é de fato, uma mudança significativa para o ensino de Matemática, visto que, para resolver problemas – não exercícios – antes de mais nada, é necessário ter idéias, intuir; saber o que significam os conceitos que aparecem no problema e decidir pelo procedimento a ser utilizado na resolução. Assim sendo, cabe tornar essa mudança, numa prática constante de sala de aula para o ensino de Matemática na Educação Básica.

É importante salientar, que essas mudanças de postura em relação ao ensino de Matemática não podem ser superficiais. Aliás, basta observar os pressupostos dos PCNEMs para encontrar referências sobre a necessidade de se explorar os conteúdos além da dimensão conceitual, ou seja, é preciso contemplar também "o *desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização*"(BRASIL: PCNEM, 1999, p. 16). Os procedimentos e as atividades devem ser valorizados, na busca incessante de soluções. Os conteúdos devem colaborar para que os alunos desenvolvam capacidades e construam competências, de modo que articulem os diferentes conhecimentos de diferentes naturezas, formando uma verdadeira *teia de informações* (PIRES, 2000). De forma mais explícita, podemos dizer que além da capacidade de relacionar, a idéia de *competência* inclui e exige outras capacidades dos alunos, tais como percepção, pensamento, avaliação e ação. Além disso, há a necessidade de mobilizar com discernimento inferências, antecipações, analogias, generalizações, apreciação de possibilidades, busca de informações pertinentes, estabelecimento de uma estratégia a partir de informações obtidas, tomada de decisão, etc..

Segundo Perrenoud (1999), independentemente da idade e faixa de escolaridade, competências se desenvolvem no enfrentamento de situações complexas, sem solução evidente. O desenvolvimento de competências exige oportunidades para que o aluno/indivíduo explicite sua forma de pensar, se conscientize de suas decisões, para que possa inferir, hesitar, tentar e errar, para depois, gradativamente, constituir-se como aquisição pessoal, como um repertório ao qual ele poderá recorrer sempre que desejar, para auxiliá-lo no enfrentamento de novas situações, ou para se articular com outras habilidades e compor competências mais complexas.

Reconhecemos que tais preocupações surgiram diante das necessidades de mudanças radicais nas diversas áreas do conhecimento, em função da revolução tecnológica que estamos vivendo e de seus desdobramentos (ainda desconhecidos), tendo em vista a formação de um aluno autônomo, que saiba raciocinar e relacionar os conhecimentos aprendidos na escola com as necessidades profissionais e sociais, agindo com segurança, criatividade e naturalidade. Nesse contexto, o processo educativo pode possibilitar ao aluno uma *formação geral*, através da interação entre os diversos aspectos dos conceitos; do incentivo ao raciocínio e a capacidade de aprender; da busca de significado/sentido para o novo conhecimento. Em outros termos, "*a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação*"(BRASIL:PCNEM, 1999, p.15).

Entretanto, é previsível que essa *formação geral* só aconteça se houver mudança de postura por parte de professores, alunos e escolas. Existem aí inúmeras questões a serem observadas e, ao que parece, só haverá avanços com trabalho sério, persistência e paciência. Então, no caso do ensino de Matemática que é uma dessas questões, que caminho tomar? Já fizemos algumas *indicações*[5] para o ensino médio que julgamos pertinentes, e até mesmo necessárias, porém, não suficientes.

(5) Essas indicações nós ousamos chamá-las de contribuições.

Isso significa que, apesar da limitação que é intrínseca a qualquer alternativa de abordagem dos temas matemáticos, no que diz respeito à solucionar os problemas do ensino de Matemática, elas cumprem a função de suscitar o *pensar* e o *fazer* matemático.

Sob este foco, os conceitos do cálculo não-standard no ensino médio, podem possibilitar ao aluno pensar por si mesmo, construir possibilidades de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos, errar, e, enfim, perseverar na busca da solução. E, como conseqüência de um aprendizado crítico e significativo desses conceitos, enfatizamos a possibilidade de diminuir a distância entre o que aprenderam no ensino médio e que aprenderão no ensino superior. Certamente, que as técnicas operatórias, as definições e propriedades estudadas, são importantes, mas o essencial são as idéias – sua formação e desenvolvimento. O diferencial destes alunos não está garantido apenas pelo fato de possuírem informações, mas por serem capazes de articular as idéias matemáticas.

De qualquer modo, se essas *indicações* sobre os conceitos de cálculo não-standard têm um valor pedagógico, como possibilidade de ensino, é porque elas podem funcionar, ao menos teoricamente.... Creio que, raciocinando assim, nossas *indicações* possam ser observadas de forma crítica, e que só sejam desconsideradas, após um sincero trabalho pedagógico para aplicá-las de forma eficiente.

Como falamos inicialmente, não temos *receitas* para a problemática da aprendizagem matemática no ensino médio, mas a percepção de que é possível melhorá-la.

CONCLUSÃO

A Matemática é uma componente do patrimônio cultural da humanidade, constitui uma maneira de pensar, é base fundamental do conhecimento científico e tecnológico e influencia fortemente nossa vida cotidiana. Por isso, é que seu ensino precisa rever práticas rígidas, obsoletas e até mesmo insuficientes que não promovem aprendizagem. Insistir em processos algorítmicos, principalmente se estes não têm sentido para o aluno - não leva à aprendizagem.

Neste estudo, as considerações sobre os conceitos do cálculo não-standard são fruto de uma análise teórica, que embora incompleta, revela o quanto é oportuno discutir no ensino médio aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos dos conceitos matemáticos, como também aponta possibilidades de mudança na dinâmica dos processos de ensinar e aprender Matemática. Podemos dizer que inúmeras análises e reflexões no campo do ensino de Matemática, têm impulsionado as práticas educativas a se comprometerem com a aprendizagem do aluno (ALMEIDA; DIAS, 2004; CAMARGO, 1999; MICOTTI, 1999; ONUCHIC, 1999). E o mais importante é que esse comprometimento pode possibilitar uma maior compreensão das diversidades dos alunos, explicitando a necessidade de não ignorá-las, ao contrário, de respeitá-las e considerá-las não só como um valor humano, mas também como base para estruturar e desenvolver o trabalho pedagógico.

Porém, é perceptível que tal comprometimento ainda está mais presente nos discursos (pesquisas teóricas) do que na efetivação de práticas/ações que aumente o interesse e o envolvimento dos alunos. Mas, a aceitação crescente das diversidades faz com que seja necessário rever hábitos, crenças e padrões presentes no ensino de Matemática. Aliás, algumas crenças, a exemplo da *resolução de exercícios*, que tem sido sustentada, merecem/precisam ser repensadas. Ainda assim, parece-me ser inegável que nós professores somos propensos a sustentar, ao menos, algumas crenças.

Uma crença ainda bastante forte no ensino médio é sobre *a linearidade dos conceitos matemáticos*, representada, ora pela sucessão de conteúdos que devem ser dados numa certa ordem, ora pela definição de pré-requisitos, ou seja, informações, habilidades que precisam ser dominadas pelo aluno, antes que lhe dê acesso a outras idéias, conceitos – se não for assim, não há aprendizagem. Isso tem acarretado, ao nosso ver, em entraves para a aprendizagem das idéias matemáticas. Mas também é fato, que existem idéias que precedem outras e que há que se escolher, um certo caminho, mas nada que justifique o condicionamento tão forte que em geral observamos.

A quebra dessa linearidade atribuída aos conceitos matemáticos é uma possibilidade para a qual Bruner (1974) chama atenção em seu livro "*O processo da educação*" quando diz:

> *Partimos da hipótese de que qualquer assunto pode ser ensinado com eficiência, de alguma forma intelectualmente honesta, a qualquer criança, em qualquer estágio de desenvolvimento. É uma hipótese arrojada, mas essencial, quando se pensa sobre a natureza de um currículo. Não há evidência alguma que a contradiga e muitas provas estão sendo acumuladas para comprová-la*. (BRUNER apud PIRES, 2000, p.68).

Na verdade, o caminho percorrido pelas idéias matemáticas até a sua sistematização e mesmo sua formalização não é linear, pelo contrário, chega a ser tortuoso, ambíguo, contraditório, pois resulta do trabalho de muitas pessoas durante longos períodos de tempo. A exemplo, essa trajetória não linear aparece claramente no desenvolvimento dos infinitésimos.

O processo de construção/abstração de alguns conceitos matemáticos demanda idas e vindas. Essa idéia, especialmente no meio pedagógico, ainda não foi bem esclarecida, ou seja, é comum tratar os conceitos matemáticos, na maioria das vezes, na sua forma sistematizada ou formalizada - tal como são apresentados à comunidade matemática, o que leva a uma não identificação das diversas relações que apareceram ao longo da evolução do conceito. Diante desta constatação, podemos dizer que a crença na *linearidade* não é tão eficiente para a aprendizagem matemática. Porém, faz sentido demonstrar aos alunos que, os estágios iniciais das idéias matemáticas são informais, predominantemente intuitivos, e que, o mais importante são os significados/sentidos dos conceitos matemáticos explicitados através de suas respectivas definições, as quais, por sua vez, têm sido relegadas pela maioria dos professores de Matemática.

As *definições* matemáticas fazem parte do método axiomático que organiza o conhecimento matemático em: *termos primitivos, definições, axiomas e teoremas*. A axiomática é, sem dúvida, uma forma importante de organizar e sistematizar o conhecimento matemático, mas serve a propósitos definidos que, muitas vezes, se chocam com os pedagógicos. Segundo Borges (1998), o método axiomático é um método organizador que pode ser empregado no ensino médio com parcimônia. Costa (1992) também defende o método axiomático. Mas, em termos do ensino de Matemática, a abordagem lógico-formal não é suficiente para a sistematização dos conceitos matemáticos, às vezes é até inadequada.

De qualquer modo, não existe um método único para aprender e, o mais importante no ensino médio é transformar o *saber matemático* em conteúdos acessíveis aos alunos, visto que, as raízes do *saber matemático* estão plantadas no território acadêmico e exercem uma influência na prática educativa. Nesta tarefa, é essencial saber usar a língua materna, tanto oral como escrita para comunicar-se matematicamente.

> *O ensino de matemática deve ser um convite para que o aluno empregue a língua materna com mais correção e clareza. [...] pois um dos aspectos formativos dessa disciplina é precisamente o emprego correto e claro da língua mãe, importante até mesmo em nossa própria identidade.* (BORGES, 2004, p. 1).

Nesses termos, os aspectos intuitivos, epistemológicos, filosóficos e históricos dos conceitos do cálculo não-standard são *fecundos* para a aprendizagem matemática. E uma das conclusões da nossa análise é que não podemos depreciar ou minimizar a importância da *intuição*, pois é um elemento decisivo na apropriação dos conceitos matemáticos, e imprescindível ao espírito criativo – não só dos matemáticos. Portanto, trazê-la para o ensino é resgatá-la com objetivos definidos, entre inúmeras atividades que o aluno realiza no decorrer do seu dia a dia. Intuir, enfim, constitui-se numa prática a ser estimulada. Porém, cabe lembrar que o papel da intuição tem limites. Não é panacéia para os problemas do ensino de Matemática, mas é um forte instrumento para ser trabalhado, isto por que, aprender Matemática não é apenas resolver exercícios e problemas da vida cotidiana, embora também o seja, mas promover o desenvolvimento da capacidade abstrata do aluno, fazendo uso, digamos, de uma intuição mais elaborada – intelectual.

De fato, reconhecer a intuição como elemento de aprendizagem frente ao *paradigma formal*, cuja idéia dominante é a de que, fora da organização lógico-formal, o conhecimento matemático torna-se um amontoado de fatos dispersos, sem conexões e, portanto, sem o formato de uma teoria, não é uma tarefa fácil. Por isso, procurou-se mostrar como elementos, aparentemente opostos, como intuição e rigor participam do desenvolvimento das idéias matemáticas. E, que quando articulados na medida certa, mostra-nos o quanto é equivocado considerar o conhecimento matemático pronto, acabado. Aumenta a complexidade das relações estabelecidas entre os conceitos, e conseqüentemente pode auxiliar de forma significativa na formação de novas práticas para o ensino de Matemática.

Em relação aos aspectos epistemológicos, parece razoável considerar a necessidade de uma reflexão que examine criticamente os conceitos do cálculo não-standard mediante suas formulações, propriedades, caráter intuitivo e definições que apresentam; como também as rupturas que provocaram no desenvolvimento da Matemática.

Na raiz dessas rupturas está o fato de que é possível tratar dos conceitos *derivada* e *integral*, abrindo mão das definições e tecnicidades relativas a teoria dos limites, partindo-se de noções como: grandezas constantes e variáveis, proporcionalidade, área, velocidade, reta tangente, taxas de variação de diferentes tipos, etc., tal como são utilizadas no cotidiano. Desse modo, é possível compreender o significado/sentido tanto da derivada como da integral, mesmo sem dispor de inúmeras técnicas operatórias e do arsenal de definições precisas – essa precisão das definições está relacionada ao rigor (no emprego) da linguagem matemática, pois, epistemologicamente, existem diversas possibilidades de compreensão desses conceitos que são corretas e coerentes do ponto de vista matemático.

No que concerne aos aspectos filosóficos e históricos dos conceitos do cálculo não- standard, procurou-se mostrar a viabilidade de tratá-los como elementos que favorecem a aprendizagem, pois, nas criações científicas, o importante, é não só os resultados, mas também o processo para chegar a eles, a atitude dos estudiosos. Esses processos são repletos de situações e idéias que geralmente instigam a curiosidade, daí a necessidade de saber explorá-los de uma perspectiva suficientemente ampla através da interação de diferentes fatores, e de inculcar nos alunos uma atitude de busca e de confrontos de idéias.

Além dos elementos observados, é possível afirmar que atribuir "novos" significados aos conceitos do cálculo não-standard, depende, em certa medida, do que se entende por ciência matemática, processos de formação e apropriação de conceitos matemáticos e possibilidades de práticas educativas (estratégias), pois, estes podem contribuir significativamente para a melhoria da aprendizagem matemática no ensino médio por serem provocadores de reflexão crítica.

Uma outra conclusão que emergiu da nossa análise é a necessidade de tornar acessível ao ensino médio os aspectos relevantes dos conceitos do cálculo não-standard. Neste contexto, o papel do professor é de grande importância. As contribuições deste, por sua vez, podem ser no sentido de não pressupor que os alunos têm um certo interesse pelos conceitos científicos, e sim criar, antes de tudo, esse interesse e a necessidade desse conhecimento. Para isso, é possível partir de problemas reais que afetem o aluno; fazer-lhe procurar informações relevantes, usar seus conhecimentos anteriores, mostrar lacunas e apresentar-lhe elementos novos que possa necessitar, pois é previsível que não os encontre por si mesmo.

De qualquer modo, é preciso que o aluno aprenda a direcionar seu aprendizado. Daí, a necessidade que se instale no ensino médio – o quanto antes possível, uma cultura que busque o *conhecimento matemático* através da interação de seus diversos aspectos e de práticas que possibilitem: 1) conhecer, em um nível apropriado, as idéias e os métodos fundamentais da Matemática, bem como apreciar o seu valor e a sua natureza; 2) desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática para solucionar problemas, raciocinar e comunicar, com confiança em si mesmo; 3) pensar como matemático, isto é, explorar situações matemáticas, buscar modelos, formular e comprovar hipóteses, generalizar e pensar logicamente. Enfim, a competência matemática que todo aluno do ensino médio pode e deve desenvolver é a de integrar essas práticas visando a uma compreensão conceitual contextualizada e significativa.

Por isso, um outro aspecto que merece destaque, refere-se ao contexto no qual está inserido o aluno, pois este fornece a estrutura para o aprendizado. Desse modo, vivenciar várias situações diferentes (problemas), ou tentar coisas diferentes (resoluções - por exemplo), é muito importante. Acreditamos que numa perspectiva contextualizada do ensino de Matemática, não saber agir diante de um problema faz com que o aluno se concentre em aprender uma maneira de realizar algo desconhecido, novo e também procurar entender as razões pelas quais falhou ou foi bem sucedido.

Segundo o cientista da computação e psicólogo cognitivo Roger Schank[1] (1997, p.200),

> *O segredo para aprender, depois de ter tentado fazer algo, ter falhado e avaliado suas próprias ações, está no processo de generalização. Não é suficiente apenas aprender como agir em determinada situação; você deve saber também como generalizar a lição que aprendeu, para que ela se aplique em outras situações. Se você não for capaz de fazer isso, adquiriu uma coleção estreita de informações não relacionadas, úteis apenas em domínio específicos, mas inúteis em qualquer outro caso*.

Eis-nos então diante de uma questão crucial não só para o aprendizado de Matemática: *estabelecer relações*. Mostrar que é possível desenvolver essa prática nas aulas de Matemática, ainda que teoricamente – por enquanto, foi um dos objetivos desse trabalho, que espero, pelo menos em parte, tê-lo conseguido. É altamente desejável que os conceitos do cálculo não-standard sejam desenvolvidos a partir de situações desafiadoras e que as atividades enfatizem o estabelecimento de relações, visando à compreensão e à consolidação dos conceitos.

Dada a complexidade das questões que analisamos, é preciso deixar claro que abordar conceitos científicos no ensino médio não é simples, requer por parte de professores e alunos, esforço, disciplina e dedicação (concentração). É como disse Lima (2001, p.5), "*a única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente. Não só para aprender Matemática, mas para tudo na vida*". Entretanto, pode-se dizer que, para muitos alunos é apaixonante, e poucas experiências são tão gratificantes como descobrir a solução de alguma coisa que estivemos procurando. Enfim, o conhecimento científico é um dos instrumentos mais

(1) É diretor do Institute for the Learning Sciences na Northwestern University e autor de diversos livros sobre criatividade, aprendizado e inteligência artificial, entre os quais destacamos: *The Creative Attitude: Learning to Ask and Answer the Right Questions,* com Peter Childers*, Dynamic Memory, Tell me a Story* e *The Connoisseur's Guide to the Mind.*

poderosos que a cultura humana desenvolveu para conhecer e explicar a realidade, por isso, é preciso contextualizá-lo nas nossas salas de aula e, mostrar que é uma maneira muito frutífera de resolver problemas.

Por fim, esperamos que esse trabalho se torne um instrumento de discussões proveitosas, para que possamos avançar, de forma eficiente, na melhoria da qualidade do aprendizado de Matemática no ensino médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. Episódios da história antiga da matemática. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ABRAHÃO, Ana Maria C.; PALIS, Gilda de La R. A questão da escola e as concepções de professores ao analisarem gráficos de funções f: R → R obtidos em calculadoras. Educação matemática em Revista. SBEM. São Paulo, Ano 11, Nº 16, p. 30-36, mai. 2004.

ALMEIDA, Lourdes Maria W. de; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. Bolema, Rio Claro/SP, Ano 17, Nº 22, p. 19-35. 2004.

AOL Educação. Estudantes brasileiros são piores em matemática. 2004. Disponível em: <http://www.educacao.aol.com.br>. Acesso em 17/01/2005.

ÁVILA, Geraldo. Introdução ao cálculo. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1998.

__________ Introdução às funções e à derivada. São Paulo: Atual Editora, 1994.

__________ Análise matemática para licenciatura. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Cálculo infinitesimal: passado ou futuro? In: O ensino de cálculo.Temas e Debates, Rio Claro/SP, Ano 8, Nº 6, p. 5-21, abr. 1995.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Desenvolvimento de essências de cálculo infinitesimal. Série: Reflexão em Educação Matemática. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998, V. 4.

BARALDI, Ivete Maria. Matemática na escola: que ciência é esta? Bauru/SP: EDUSC, 1999.

BENDICK, Jeanne. Arquimedes: uma porta para a ciência. Trad. Cecília Prada. Imortais da Ciência. São Paulo: Odysseus Editora, 2002.

BICUDO, Irineu. O nome "Matemática". Folhetim de Educação Matemática. Número especial, 2003.

BLANCHÊ, Robert. A axiomática. Trad. Maria do Carmo Cary. Portugal: Livraria Martins Fontes Brasil, 1978.

BLÁSQUEZ, S. & ORTEGA, T. Evolução histórica do conceito de limite. Jornal de Matemática Elementar. Lisboa, Ano 19, Nº 213, p. 11-15, fev. 2003.

BODEN, Margaret A. As idéias de Piaget. Trad. Álvaro Cabral. São Paulo: Cultrix: Ed. da Universidade de São Paulo, 1983.

BORGES, Carloman Carlos. A Matemática: suas origens, seus objetos e seus métodos. Feira de Santana: UEFS, 1983. (mimeografado)

________________________. O ensino da matemática. Conferência pronunciada em 24/08/84. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Vitória da Conquista – Ba. [publicada no Folhetim de Educação Matemática. Ano 3, nº 45, dez. 1995.]

______________ . Problemas filosóficos do conhecimento matemático. In TENÓRIO, Robinson M. (org). Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1995.

___________ . Reflexões sobre o ensino da matemática. In TENÓRIO, Robinson M. (org). Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1995.

______________. Folhetim de educação matemática. Ano 5, nº 68, jul. 1998.

______________ . Folhetim de educação matemática. Ano 6, nº 76, mar. 1999.

______________ . Folhetim de educação matemática. Ano 7, nº 87, fev. 2000.

______________. Folhetim de educação matemática. Ano 8, nº 98, jan. 2001.

_____________ . Folhetim de educação matemática. Ano 9, nº 107, mar/abr. 2002a.

_____________ . Folhetim de educação matemática. Ano 9, nº 108, mai/jun. 2002b.

_____________. Folhetim de educação matemática. Ano 9/10, nº 109, jul/ago. 2002c.

_____________. Folhetim de educação matemática. Ano 10, nº 111, nov/dez. 2002d.

___________. Folhetim de educação matemática. Ano 11, nº 123, nov/dez. 2004.

BOYER, C. História da matemática. 12ª Reimpressão. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

___________. Cálculo: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula Trad.Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: SEMT/MEC, 1999.

CABRAL, T. C. B.; CATAPANI, E. Imagens e olhares em uma disciplina de cálculo em serviço. Zetetiké, Campinas/SP. V. 11, Nº 19, p. 101-116. 2003.

CAMARGO, Dair A. F. Estruturação da sala de aula: efeitos sobre o desenvolvimento intelectual e sobre o estilo de funcionamento cognitivo dos alunos. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisas em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 169-184.

CARAÇA, B. de Jesus. Conceitos fundamentais da matemática. 9ª edição Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

CARVALHO, João Pitombeira de. Avaliação e perspectiva da área de ensino de matemática no Brasil. Em Aberto, Brasília, Ano 14, Nº 62, p. 74-88, abr/jun. 1994.

CATUNDA, Omar. O ensino da matemática – conceito e caricatura. In: Folhetim de educação matemática. Ano 1. Nº 1, 1993.

___________. et al. Matemática: segundo ciclo atualizado. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1971, vol 2.

___________. et al. Matemática: segundo ciclo atualizado. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1973, vol 3

CONNES, Alain. In: CHANGEUX, Jean-Pierre; CONNES, Alain. Matéria pensante. Trad. Carlos Lourenço e Ana Paula Oliveira. Lisboa: Gradiva, 1991.

COLL, César; GOTZENS, Concepción; MONEREO, Carles; ONRUBIA, Javier; POZO, Juan I; TAPIA, Alonso. Psicologia da aprendizagem no ensino médio. Trad. Cristina M. Oliveira. Porto Alegre: Artmed, 2003.

COSTA, Newton C. A.. Introdução aos fundamentos da matemática. 3ª edição. São Paulo: Editora Hucitec, 1992.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. O que é matemática?. Trad. Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

DANTZIG, Tobias. Número: a linguagem da ciência. Trad. Sergio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DELVAL, Juan. Aprender na vida e aprender na escola. Trad. Jussara Rodrigues. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DEVLIN. Keith. O gene da matemática.Trad. Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004.

DICIONÁRIO DE MATEMÁTICA. Trad. Benedito Castrucci. São Paulo: Melhoramentos, 1980.

DOMINGUEZ, Dominique Colinvaux de. A formação do conhecimento físico: um estudo da causalidade em Jean Piaget. Niterói/RJ: EDUFF, 1992.

EINSTEIN, Albert. Notas autobiográficas. Trad. Aulyde Soares Rodrigues. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas/ SP: Editora Unicamp, 1995.

FREITAG, Bárbara. Piaget: encontros e desencontros. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1985.

FROTA, Maria Clara Rezende. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. Bosco. (org.) Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumare, 2001, p. 89-122.

GLUCKSBERG, Sam. Psicologia dos processos simbólicos. Trad. Maria Helena Souza Patto. Rio de Janeiro: Livraria José Olympio Editora, 1971.

GRATTAN-GUINNESS. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: una introducción histórica. Versión: Mariano Martinez Pérez. Madrid: Alianza Editorial, S. A., 1984.

GUILLEN, Michael. Pontes para o infinito: o lado humano das matemáticas. Trad. Jorge da Silva Branco. Lisboa: Gradiva, 1987.

GOULART, Íris B. Piaget: Experiências básicas para utilização pelo professor. 20ª edição. Petrópolis/RJ: Vozes, 2003.

HALMOS, Paul R. Teoria ingênua dos conjuntos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

HARDY, G. H. Em defesa de um matemático. Trad. Luís Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HEGENBERG, Leônidas. Definições: termos teóricos e significado. São Paulo: Cultrix, Ed.da Universidade de São Paulo, 1974.

HOFFMANN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

IFRAH, Georges. Os números: história de uma grande invenção. 3ª edição. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

KEISLER, H. Jerome. Elementary calculus: an infinitesimal approach. Second Edition. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schimidt, 1986.

KRISHNAMURTI, Jiddu. A educação e o significado da vida. 11ª edição. Trad. Hugo Veloso. São Paulo: Editora Cultrix, 2003.

KUHN, Thomas S. A estrutura das revoluções científicas. 6ª edição. Trad. Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. São Paulo: Editora Perspectiva, 2001.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. Bosco. (org.) Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumare, 2001, p. 146-190.

LAKATOS, Imre. Mathematics, science and epistemology. Cambridge: University Press, 1983.

____________ . A lógica do descobrimento matemático: prova e refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VYGOTSKY, L.S; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. 8ª edição. Trad. Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 2001.

LIMA, Elon Lages. Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 1991a.

________________ . Meu professor de matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 1991b.

________________. Matemática e ensino. Rio de Janeiro: SBM., 2001.

LURIA, A . R. Linguagem e pensamento. Coleção Curso de Psicologia Geral. Trad. Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasil, 1979, V. 4.

LURIA, A . R. Pensamento e linguagem. As últimas conferências de Luria. Porto Alegre: Artes Médicas, 1987.

MACHADO, José Nilson. Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. 3ª edição. São Paulo: Editora Cortez, 1993.

MAOR, Eli. *e*: A história de um número. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2003.

MARIOTTI, Humberto. In: MATURANA, H. R. & VARELA, F. J. A árvore do conhecimento: as bases biológicas da compreensão humana. Trad. Humberto Mariotti e Lia Diskin. São Paulo: Palas Athena, 2001, p. 7-17.

MARTOS, Z. G. Contribuições da teoria sociocultural para o ensino de geometria no ensino fundamental. Bolema, Rio Claro/SP, Ano 17, Nº21, p. 61-80. 2004.

MATURANA, H. R. & VARELA, F. J. A árvore do conhecimento: as bases biológicas da compreensão humana. Tradução de Humberto Mariotti e Lia Diskin. São Paulo: Palas Athena, 2001.

MELO, M. P.; SANTOS, S. A. Mancha negra: reflexões sobre um projeto no ensino de cálculo. Zetetiké, Campinas/SP, V. 10, Nº 17/18, p. 71-112, jan/dez. 2002.

MORRIS, Richard. Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Coleção Ciência & Cultura. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

MOYSÉS, Lucia. Aplicações de Vygotsky à educação matemática. Campinas/SP: Papirus, 1997.

MIALERET, G. A aprendizagem da matemática. Trad. Marcelino Paiva e Licília Paiva. Coimbra, Portugal: Livraria Almedina, 1975

MICOTTI, M. C. de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisas em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 153-167.

NEELEMAN, Wim. Hans Freudenthal. Bolema, Rio Claro/SP, Ano 6, Nº 7, p. 36-46. 1991.

NÚÑEZ, Isauro Beltrán; PACHECO, Otmara González. La formación de conceitos científicos: una perspectiva desde la teoria da la actividad. Natal – RN: EDUFRN – Editora da UFRN, 1997.

OLIVEIRA, A. J. Franco de. O advento da matemática não-standard. Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática, Curitiba, Nº 8, abr. 1990.

OLIVEIRA, Telma Alves de. Análise não-standard: uma apologia ao seu ensino. 1994. f. 78. Mestrado. UNESP, Rio Claro/São Paulo.

ONUCHIC, Lourdes de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisas em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte – MG: Autêntica Editora, 2001.

PERRENOUD, Philippe. Construir as competências desde a escola. Porto Alegre: Artmed, 1999.

___________________. Dez novas competências para ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIAGET, Jean. Seis estudos de psicologia. 24ª edição. Trad. Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2004.

____________. A construção do real na criança. 3ª edição. Trad. Ramon Américo Vasques. São Paulo: Editora Ática, 2003.

____________ Para onde vai a educação? 16ª edição. Trad. Ivette Braga. Rio de Janeiro: José Olympio, 2002.

____________. Epistemologia genética. Trad. Álvaro Cabral. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando. Psicogênese e História das Ciências. Trad. Maria Fernanda Rebelo Jesuíno.Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PIRES, Célia Maria Carolino. Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

POINCARÉ, Henri. O valor da ciência. Trad. Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. 2ª reimpressão. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROBINSON, Abraham. Non-standard analysis. London. Amsterdam: North-Hollan, 1966.

RUSSEL, Bertrand. História do pensamento ocidental: a aventura dos pré-socráticos a Wittgenstein. Trad. Laura Alves e Aurélio Rebello. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001.

SCHANK, Roger. O que saber e como aprendê-lo. In: BROCKMAN, John; MATSON, Katinka (orgs). As coisas são assim: pequeno repertório científico do mundo que nos cerca. Trad. Diogo Meyer e Suzana Sturlini Couto. São Paulo: Companhia das Letras, 1997, p. 195-202.

SCLIEMANN, Analúcia. Da matemática da vida diária à matemática da escola. In: SCLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David (orgs). A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa. Campinas/ SP: Papirus, 1998, p. 11-38.

SEELEY, Robert T. Cálculo de uma variável.Trad. João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1973, vol. 1.

SELVAGGI, S. J. Filippo. Filosofia do mundo: cosmologia filosófica. Trad. Alexander A. Maclntyre. São Paulo: Loyola, 1988.

SNAPPER, Ernst. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. Humanidades. Trad. João Pitombeira de Carvalho.Brasília: UnB, Número 8, vol II, p. 58-93, jul/set. 1984.

SMOLIN, Lee. O que é o tempo? In: BROCKMAN, John; MATSON, Katinka (orgs). As coisas são assim: pequeno repertório científico do mundo que nos cerca. Trad. Diogo Meyer e Suzana Sturlini Couto. São Paulo: Companhia das Letras, 1997, p. 245-253.

STRUIK, Dirk J. História concisa das matemáticas. Trad. João Cosme Santos Guereiro. Lisboa: Gradiva, 1989.

SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com geometria analítica. 2ª edição. Trad. Alfredo Alves de Faria. São Paulo: Makron Books, 1994, vol. 1.

_________________. Cálculo com geometria analítica. Trad. Alfredo Alves de Faria. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983, vol.2.

VERGANI, Teresa. Matemática & linguagens(s): olhares interactivos e transculturais.Lisboa: Pandora Edições, 2002.

VYGOTSKY, L.S. Pensamento e linguagem. 2ª edição.Trad. Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1998a.

VYGOTSKY, L.S. A formação social da mente. 6ª edição. São Paulo: Martins Fontes, 1998b.

VYGOTSKY, L.S; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. 8ª edição. Trad. Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 2001.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, Jesuína L. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio. Zetetiké. CEMPEM. FE/UNICAMP. V.8, Nº13/14, p.7-28, jan/dez. 2000.

ZUIN, E. de S. L. Cálculo, uma abordagem histórica. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. Bosco. (org.) Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumare, 2001, p. 13-38.